FUNDAMENTOS DE
FÍSICA

HALLIDAY & RESNICK | 9ª Edição

JEARL WALKER

MECÂNICA

VOLUME 1

genio
GEN | Informação Online

gen | LTC

VOLUME 1

9ª EDIÇÃO

FUNDAMENTOS DE FÍSICA

Mecânica

VOLUME 1

9ª EDIÇÃO

HALLIDAY & RESNICK

FUNDAMENTOS DE FÍSICA

Mecânica

Jearl Walker
Cleveland State University

Tradução e Revisão Técnica
Ronaldo Sérgio de Biasi, Ph.D.
Professor Titular do Instituto Militar de Engenharia – IME

gen | LTC

Apesar dos melhores esforços dos autores, do tradutor, do editor e dos revisores, é inevitável que surjam erros no texto. Assim, são bem-vindas as comunicações de usuários sobre correções ou sugestões referentes ao conteúdo ou ao nível pedagógico que auxiliem o aprimoramento de edições futuras. Os comentários dos leitores podem ser encaminhados à **LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora** pelo e-mail ltc@grupogen.com.br.

Travessa do Ouvidor, 11
Rio de Janeiro, RJ – CEP 20040-040
Tels.: 21-35430770 / 11-5080-0770
Fax: 21-3543-0896
ltc@grupogen.com.br
www.ltceditora.com.br

Projeto de Capa: M77 Design
Imagem de Capa: ©Eric Heller/Photo Researchers, Inc. Used with permission of John Wiley & Sons, Inc. Reproduzida com permissão da John Wiley & Sons, Inc.

Editoração Eletrônica: Performa

CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ

H691f
v.1

Halliday, David, 1916-2010
Fundamentos de física, volume 1 : mecânica / David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker ; tradução e revisão técnica Ronaldo Sérgio de Biasi. - Rio de Janeiro : LTC, 2012.
il. ; 28 cm

Tradução de: Fundamentals of physics, 9th ed.
Apêndice
Inclui índice
ISBN 978-85-216-1903-1

1. Mecânica. 2. Física. I. Resnick, Robert, 1923-. II. Walker, Jearl, 1945-. III. Título.

12-2452. CDD: 530
CDU: 53

Volume 1

1 Medição
2 Movimento Retilíneo
3 Vetores
4 Movimento em Duas e Três Dimensões
5 Força e Movimento — I
6 Força e Movimento — II
7 Energia Cinética e Trabalho
8 Energia Potencial e Conservação da Energia
9 Centro de Massa e Momento Linear
10 Rotação
11 Rolamento, Torque e Momento Angular

Volume 2

12 Equilíbrio e Elasticidade
13 Gravitação
14 Fluidos
15 Oscilações
16 Ondas — I
17 Ondas — II
18 Temperatura, Calor e a Primeira Lei da Termodinâmica
19 A Teoria Cinética dos Gases
20 Entropia e a Segunda Lei da Termodinâmica

Volume 3

21 Cargas Elétricas
22 Campos Elétricos
23 Lei de Gauss
24 Potencial Elétrico
25 Capacitância
26 Corrente e Resistência
27 Circuitos
28 Campos Magnéticos
29 Campos Magnéticos Produzidos por Correntes
30 Indução e Indutância
31 Oscilações Eletromagnéticas e Corrente Alternada
32 Equações de Maxwell; Magnetismo da Matéria

Volume 4

33 Ondas Eletromagnéticas
34 Imagens
35 Interferência
36 Difração
37 Relatividade
38 Fótons e Ondas de Matéria
39 Mais Ondas de Matéria
40 Tudo sobre os Átomos
41 Condução de Eletricidade nos Sólidos
42 Física Nuclear
43 Energia Nuclear
44 Quarks, Léptons e o Big Bang

Apêndices | Respostas dos Testes e das Perguntas e Problemas Ímpares | Índice

SUMÁRIO

Volume 1

1 MEDIÇÃO 1

1-1 O que É Física? 1
1-2 Medindo Grandezas 1
1-3 O Sistema Internacional de Unidades 2
1-4 Mudança de Unidades 3
1-5 Comprimento 3
1-6 Tempo 5
1-7 Massa 6
REVISÃO E RESUMO 8 PROBLEMAS 8

2 MOVIMENTO RETILÍNEO 13

2-1 O que É Física? 13
2-2 Movimento 13
2-3 Posição e Deslocamento 13
2-4 Velocidade Média e Velocidade Escalar Média 14
2-5 Velocidade Instantânea e Velocidade Escalar Instantânea 17
2-6 Aceleração 19
2-7 Aceleração Constante: Um Caso Especial 22
2-8 Mais sobre Aceleração Constante 25
2-9 Aceleração em Queda Livre 26
2-10 Integração de Gráficos em Análise de Movimento 27
REVISÃO E RESUMO 29 PERGUNTAS 30 PROBLEMAS 31

3 VETORES 40

3-1 O que É Física? 40
3-2 Vetores e Escalares 40
3-3 Soma Geométrica de Vetores 41
3-4 Componentes de Vetores 43
3-5 Vetores Unitários 45
3-6 Soma de Vetores a partir das Componentes 46
3-7 Vetores e as Leis da Física 49
3-8 Multiplicação de Vetores 49
REVISÃO E RESUMO 54 PERGUNTAS 55 PROBLEMAS 56

4 MOVIMENTO EM DUAS E TRÊS DIMENSÕES 61

4-1 O que É Física? 61
4-2 Posição e Deslocamento 61
4-3 Velocidade Média e Velocidade Instantânea 63
4-4 Aceleração Média e Aceleração Instantânea 65
4-5 Movimento Balístico 67
4-6 Análise do Movimento Balístico 69
4-7 Movimento Circular Uniforme 73
4-8 Movimento Relativo em Uma Dimensão 75
4-9 Movimento Relativo em Duas Dimensões 77
REVISÃO E RESUMO 78 PERGUNTAS 79 PROBLEMAS 80

5 FORÇA E MOVIMENTO – I 91

5-1 O que É Física? 91
5-2 Mecânica Newtoniana 91
5-3 A Primeira Lei de Newton 91
5-4 Força 92
5-5 Massa 94
5-6 A Segunda Lei de Newton 95
5-7 Algumas Forças Especiais 99
5-8 A Terceira Lei de Newton 102
5-9 Aplicando as Leis de Newton 103
REVISÃO E RESUMO 109 PERGUNTAS 110 PROBLEMAS 112

6 FORÇA E MOVIMENTO - II 121

6-1 O que É Física? 121
6-2 Atrito 121
6-3 Propriedades do Atrito 124
6-4 Força de Arrasto e Velocidade Terminal 126
6-5 Movimento Circular Uniforme 129
REVISÃO E RESUMO 133 PERGUNTAS 134 PROBLEMAS 135

7 ENERGIA CINÉTICA E TRABALHO 145

7-1 O que É Física? 145
7-2 O que É Energia? 145
7-3 Energia Cinética 146
7-4 Trabalho 147
7-5 Trabalho e Energia Cinética 147
7-6 Trabalho Realizado pela Força Gravitacional 151
7-7 Trabalho Realizado por uma Força Elástica 154

7-8 Trabalho Realizado por uma Força Variável Genérica **157**
7-9 Potência **160**
REVISÃO E RESUMO **162** PERGUNTAS **163** PROBLEMAS **165**

8 ENERGIA POTENCIAL E CONSERVAÇÃO DA ENERGIA **172**

8-1 O que É Física? **172**
8-2 Trabalho e Energia Potencial **173**
8-3 Independência da Trajetória para o Trabalho de Forças Conservativas **174**
8-4 Cálculo da Energia Potencial **176**
8-5 Conservação da Energia Mecânica **179**
8-6 Interpretação de uma Curva de Energia Potencial **182**
8-7 Trabalho Realizado por uma Força Externa sobre um Sistema **186**
8-8 Conservação da Energia **189**
REVISÃO E RESUMO **192** PERGUNTAS **193** PROBLEMAS **195**

9 CENTRO DE MASSA E MOMENTO LINEAR **207**

9-1 O que É Física? **207**
9-2 O Centro de Massa **207**
9-3 A Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas **212**
9-4 Momento Linear **216**
9-5 O Momento Linear de um Sistema de Partículas **217**
9-6 Colisão e Impulso **217**
9-7 Conservação do Momento Linear **221**
9-8 Momento e Energia Cinética em Colisões **224**
9-9 Colisões Inelásticas em Uma Dimensão **224**
9-10 Colisões Elásticas em Uma Dimensão **227**
9-11 Colisões em Duas Dimensões **230**
9-12 Sistemas de Massa Variável: Um Foguete **231**
REVISÃO E RESUMO **233** PERGUNTAS **235** PROBLEMAS **236**

10 ROTAÇÃO **249**

10-1 O que É Física? **249**
10-2 As Variáveis da Rotação **249**
10-3 As Grandezas Angulares São Vetores? **254**
10-4 Rotação com Aceleração Angular Constante **255**
10-5 Relações entre as Variáveis Lineares e Angulares **258**
10-6 Energia Cinética de Rotação **261**
10-7 Cálculo do Momento de Inércia **262**
10-8 Torque **267**
10-9 A Segunda Lei de Newton para Rotações **268**
10-10 Trabalho e Energia Cinética de Rotação **270**
REVISÃO E RESUMO **273** PERGUNTAS **275** PROBLEMAS **276**

11 ROLAMENTO, TORQUE E MOMENTO ANGULAR **286**

11-1 O que É Física? **286**
11-2 O Rolamento como uma Combinação de Translação e Rotação **286**
11-3 A Energia Cinética de Rolamento **288**
11-4 As Forças do Rolamento **289**
11-5 O Ioiô **292**
11-6 Revisão do Torque **292**
11-7 Momento Angular **294**
11-8 Segunda Lei de Newton para Rotações **297**
11-9 O Momento Angular de um Sistema de Partículas **299**
11-10 Momento Angular de um Corpo Rígido Girando em Torno de um Eixo Fixo **300**
11-11 Conservação do Momento Angular **302**
11-12 Precessão de um Giroscópio **306**
REVISÃO E RESUMO **307** PERGUNTAS **308** PROBLEMAS **309**

APÊNDICES

A O Sistema Internacional de Unidades (SI) **319**
B Algumas Constantes Fundamentais da Física **321**
C Alguns Dados Astronômicos **322**
D Fatores de Conversão **323**
E Fórmulas Matemáticas **327**
F Propriedades dos Elementos **330**
G Tabela Periódica dos Elementos **333**

RESPOSTAS

dos Testes e das Perguntas e Problemas Ímpares **334**

ÍNDICE **338**

POR QUE ESCREVI ESTE LIVRO

Diversão com um grande desafio. É assim que venho encarando a física desde o dia em que Sharon, uma das alunas do curso que eu ministrava enquanto doutorando, me perguntou de repente:
– O que isto tem a ver com a minha vida?
Respondi prontamente:
– Sharon, isto é física! Tem tudo a ver com a sua vida!
A moça me pediu um exemplo. Dei tratos à bola, mas não consegui encontrar nenhum. Nessa noite criei *O Circo Voador da Física* (LTC, 2008) para Sharon, mas também para mim, porque percebi que compartilhava com ela a mesma angústia. Tinha passado seis anos estudando em dezenas de livros de física escritos segundo elaboradas estratégias pedagógicas e com a melhor das intenções, mas faltava alguma coisa. A física é o assunto mais interessante que existe porque descreve o modo como o mundo funciona, mas não havia nos livros qualquer ligação com a realidade cotidiana. Faltava diversão.

Procurei incluir muita física do mundo real neste livro, ligando-o à nova edição de *O Circo Voador da Física*. Boa parte dos assuntos vem das minhas aulas, nas quais posso julgar, pelas expressões e comentários dos alunos, os assuntos e apresentações que funcionam. As observações que registrei a respeito de meus sucessos e fracassos ajudaram a estabelecer as bases para este livro. Minha mensagem aqui é a mesma que passei a todos os estudantes que encontrei desde o dia em que a Sharon fez aquele comentário:

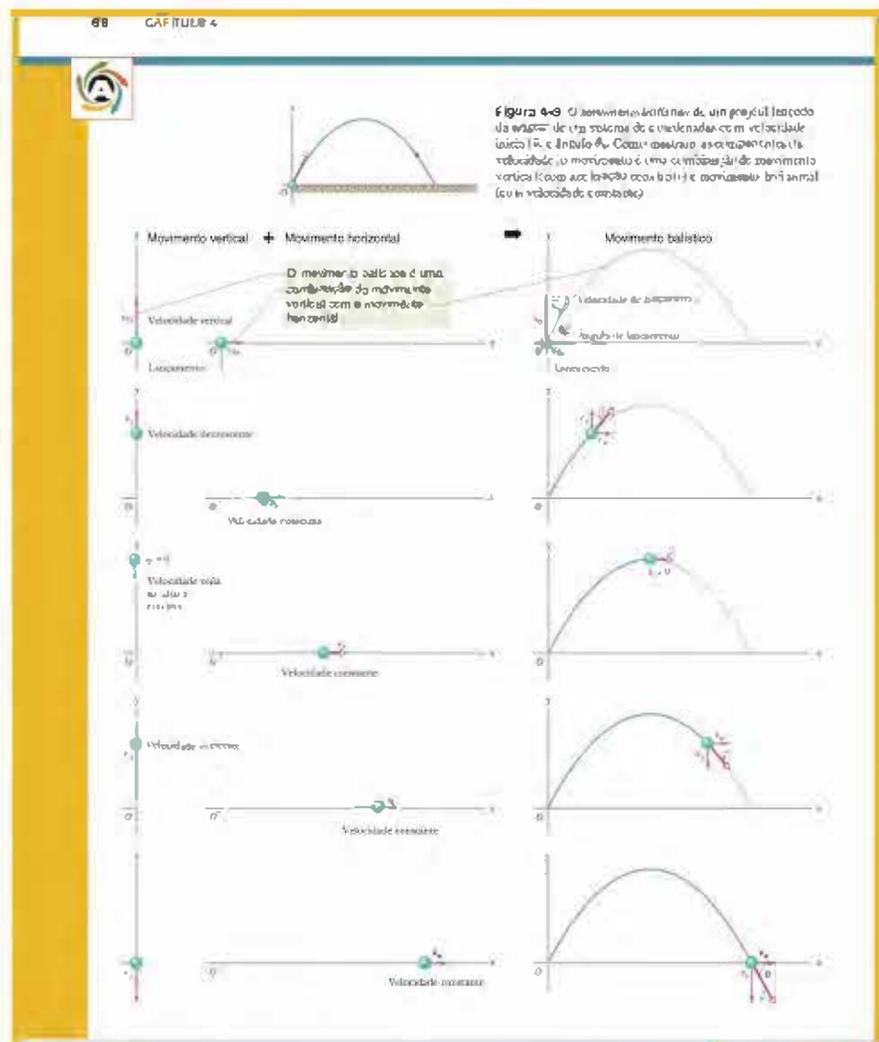
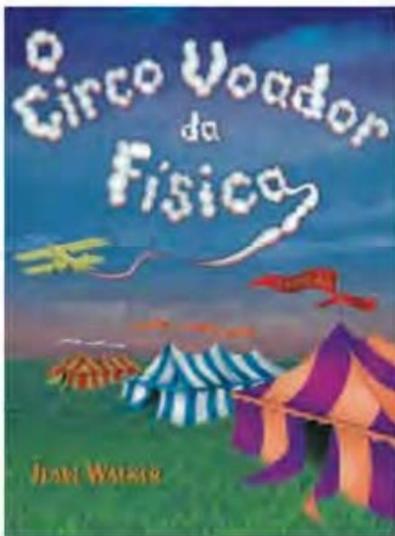
– Sim, você *pode* usar os conceitos básicos da física para chegar a conclusões válidas a respeito do mundo real, e é nesse entendimento que está a diversão.

Estabeleci muitos objetivos ao escrever este livro, mas o principal foi proporcionar aos professores um instrumento através do qual possam ensinar aos alunos como estudar assuntos científicos, identificar conceitos fundamentais, pensar a respeito de questões científicas e resolver problemas quantitativos. Este processo não é fácil, nem para estudantes, nem para professores. Na verdade, o curso associado a este livro pode ser um dos mais difíceis do currículo acadêmico. Entretanto, pode ser também um dos mais recompensadores, pois revela os mecanismos fundamentais do mundo, responsáveis por todas as aplicações científicas e de engenharia.

Muitos usuários da oitava edição (professores e estudantes) enviaram comentários e sugestões para aperfeiçoar o livro. Esses melhoramentos foram incorporados à exposição e aos problemas desta edição. A Editora John Wiley & Sons e eu encaramos este livro como um projeto permanente e gostaríamos de contar com uma participação crescente dos leitores. Sinta-se à vontade para enviar sugestões, correções e comentários positivos ou negativos para John Wiley & Sons (http:wiley.com/college/halliday) ou Jearl Walker (endereço postal: Physics Department, Cleveland State University, Cleveland, OH 44115 USA; endereço de e-mail: physics@wiley.com; blog: http://www.flyingcircusofphysics.com/Blog.aspx. Talvez não seja possível responder a todas as sugestões, mas lemos e consideramos cada uma delas.

FERRAMENTAS DE APRENDIZADO

ILUSTRAÇÕES

- Muitas ilustrações deste livro foram modificadas de modo a ressaltar as ideias principais relacionadas à física.
- Pelo menos uma figura em cada capítulo foi ampliada para que sua mensagem fosse apresentada em etapas.

CIRCO VOADOR DA FÍSICA

- Tópicos de *O Circo Voador da Física* foram introduzidos de várias formas: em textos de abertura dos capítulos, em exemplos e em problemas. Isso foi feito com dois objetivos: (1) tornar o assunto mais interessante e divertido; (2) mostrar ao estudante que o mundo que nos cerca pode ser examinado e compreendido usando os princípios fundamentais da física.
- Os assuntos que também são discutidos em *O Circuito Voador da Física* estão indicados pelo desenho de um biplano. A bibliografia do *Circo Voador* (mais de 11.000 referências a revistas científicas e de engenharia) pode ser encontrada no site http://www.flyingcircusofphysics.com.

Os **EXEMPLOS** foram escolhidos para mostrar que os problemas de física devem ser resolvidos usando o raciocínio, em vez de simplesmente introduzir números em uma equação sem nenhuma preocupação com o significado.

As **IDEIAS-CHAVE** dos exemplos mostram ao estudante quais são os conceitos básicos necessários para resolver um problema. O que queremos dizer com essas ideias-chave é o seguinte: "Vamos começar a solução usando este conceito básico, um método que nos prepara para resolver muitos outros problemas. Não começamos sacando do bolso uma equação para uma simples substituição de números, um método que não nos prepara para nada."

O QUE É FÍSICA? O corpo de cada capítulo agora começa com esta pergunta e com a resposta relacionada ao assunto examinado. (Um bombeiro hidráulico uma vez me perguntou: "Em que você trabalha?" Respondi: "Sou professor de física." O bombeiro pensou por alguns instantes e depois me perguntou: "O que é física?" Embora a profissão dele dependesse inteiramente dessa ciência, ele não sabia nem mesmo o que ela significava. Muitos estudantes de física básica não sabem definir essa ciência, mas supõem que isso é irrelevante para a carreira que escolheram.)

SÍMBOLOS O quadro representado abaixo é repetido no início de cada lista de problemas e mostra os símbolos usados neste livro.

• •• ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema
Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física* de Jearl Walker, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas contribuíram para este livro. J. Richard Christman, da Academia da Guarda Costeira dos Estados Unidos, mais uma vez criou muitos suplementos valiosos; suas sugestões para este livro foram inestimáveis. Sen-Ben Liao do Lawrence Livermore National Laboratory, James Whitenton da Southern Polytechnic State University e Jerry Shi, do Pasadena City College, foram responsáveis pela tarefa hercúlea de resolver todos os problemas do livro. Na John Wiley, a produção do livro foi acompanhada por Stuart Johnson e Geraldine Osnato, os editores que supervisionaram todo o projeto, do início ao fim, e por Tom Kulesa, que coordenou a preparação do site deste livro na Internet.[1] Agradecemos a Elizabeth Swain, a editora de produção, por juntar as peças durante esse complexo processo. Agradecemos também a Maddy Lesure pelos projetos gráficos de capa e miolo; a Lee Goldstein, pela editoração de texto, e a Lilian Brady, que se encarregou da revisão de provas. Hilary Newman foi brilhante na pesquisa de fotografias inusitadas e interessantes. Tanto a editora, John Wiley & Sons, Inc., como Jearl Walker gostariam de agradecer às seguintes pessoas pelos comentários e ideias a respeito da oitava edição: Jonathan Abramson, Portland State University; Omar Adawi, Parkland College; Edward Adelson, The Ohio State University; Steven R. Baker, Naval Postgraduate School; George Caplan, Wellesley College; Richard Kass, The Ohio State University; M. R. Khoshbin-e-Khoshnazar, Research Institution for Curriculum Development & Educational Innovations (Teerã); Stuart Loucks, American River College; Laurence Lurio, Northern Illinois University; Ponn Maheswaranathan, Winthrop Universi-

[1] Colaborou para a edição original em inglês. (N.E.)

ty; Joe McCullough, Cabrillo College; Don N. Page, University of Alberta; Elie Riachi, Fort Scott Community College; Andrew G. Rinzler, University of Florida; Dubravka Rupnik, Louisiana State University; Robert Schabinger, Rutgers University; Ruth Schwartz, Milwaukee School of Engineering; Nora Thornber, Raritan Valley Community College; Frank Wang, LaGuardia Community College; Graham W. Wilson, University of Kansas; Roland Winkler, Northern Illinois University; Ulrich Zurcher, Cleveland State University. Finalmente, nossos revisores externos realizaram um trabalho excepcional e expressamos a cada um deles nossos agradecimentos.

Maris A. Abolins, *Michigan State University*
Edward Adelson, *Ohio State University*
Nural Akchurin, *Texas Tech*
Yildirim Aktas, *University of North Carolina- Charlotte*
Barbara Andereck, *Ohio Wesleyan University*
Tetyana Antimirova, *Ryerson University*
Mark Arnett, *Kirkwood Community College*
Arun Bansil, *Northeastern University*
Richard Barber, *Santa Clara University*
Neil Basecu, *Westchester Community College*
Anand Batra, *Howard University*
Richard Bone, *Florida International University*
Michael E. Browne, *University of Idaho*
Timothy J. Burns, *Leeward Community College*
Joseph Buschi, *Manhattan College*
Philip A. Casabella, *Rensselaer Polytechnic Institute*
Randall Caton, *Christopher Newport College*
Roger Clapp, *University of South Florida*
W. R. Conkie, *Queen's University*
Renate Crawford, *University of Massachusetts-Dartmouth*
Mike Crivello, *San Diego State University*
Robert N. Davie, Jr., *St. Petersburg Junior College*
Cheryl K. Dellai, *Glendale Community College*
Eric R. Dietz, *California State University at Chico*
N. John DiNardo, *Drexel University*
Eugene Dunnam, *University of Florida*
Robert Endorf, *University of Cincinnati*
F. Paul Esposito, *University of Cincinnati*
Jerry Finkelstein, *San Jose State University*
Robert H. Good, *California State University-Hayward*
Michael Gorman, *University of Houston*
Benjamin Grinstein, *University of California, San Diego*
John B. Gruber, *San Jose State University*
Ann Hanks, *American River College*
Randy Harris, *University of California-Davis*
Samuel Harris, *Purdue University*
Harold B. Hart, *Western Illinois University*
Rebecca Hartzler, *Seattle Central Community College*
John Hubisz, *North Carolina State University*
Joey Huston, *Michigan State University*
David Ingram, *Ohio University*
Shawn Jackson, *University of Tulsa*
Hector Jimenez, *University of Puerto Rico*
Sudhakar B. Joshi, *York University*
Leonard M. Kahn, *University of Rhode Island*
Sudipa Kirtley, *Rose-Hulman Institute*
Leonard Kleinman, *University of Texas at Austin*
Craig Kletzing, *University of Iowa*
Peter F. Koehler, *University of Pittsburgh*
Arthur Z. Kovacs, *Rochester Institute of Technology*
Kenneth Krane, *Oregon State University*
Priscilla Laws, *Dickinson College*
Edbertho Leal, *Polytechnic University of Puerto Rico*
Vern Lindberg, *Rochester Institute of Technology*
Peter Loly, *University of Manitoba*
James MacLaren, *Tulane University*
Andreas Mandelis, *University of Toronto*
Robert R. Marchini, *Memphis State University*
Andrea Markelz, *University at Buffalo, SUNY*
Paul Marquard, *Caspar College*
David Marx, *Illinois State University*
Dan Mazilu, *Washington and Lee University*
James H. McGuire, *Tulane University*
David M. McKinstry, *Eastern Washington University*
Jordon Morelli, *Queen's University*
Eugene Mosca, *United States Naval Academy*
Eric R. Murray, *Georgia Institute of Technology, School of Physics*
James Napolitano, *Rensselaer Polytechnic Institute*
Blaine Norum, *University of Virginia*
Michael O'Shea, *Kansas State University*
Patrick Papin, *San Diego State University*
Kiumars Parvin, *San Jose State University*
Robert Pelcovits, *Brown University*
Oren P. Quist, *South Dakota State University*
Joe Redish, *University of Maryland*
Timothy M. Ritter, *University of North Carolina at Pembroke*
Dan Styer, *Oberlin College*
Frank Wang, *LaGuardia Community College*

Material Suplementar

Este livro conta com os seguintes materiais suplementares disponíveis para docentes:

- Simulações
- Soluções dos Problemas (Manual)
- Ilustrações da obra em formato de apresentação
- Testes em PowerPoint
- Ensaios de Jearl Walker
- Aulas em PowerPoint
- Manuais das Calculadoras Gráficas TI-86 & TI-89
- Testes Conceituais
- Testes em Múltipla Escolha
- Respostas dos problemas
- Respostas das perguntas

E os seguintes materiais suplementares de livre acesso:

- Simulações
- Ensaios de Jearl Walker
- Manuais das Calculadoras Gráficas TI-86 & TI-89
- Seleção de Problemas Solucionados

O acesso ao material suplementar é gratuito, bastando que o leitor se cadastre em: http://gen-io.grupogen.com.br

genio
GEN | Informação Online

GEN-IO (GEN | Informação Online) é o repositório de material suplementar e de serviços relacionados com livros publicados pelo GEN | Grupo Editorial Nacional, o maior conglomerado brasileiro de editoras do ramo científico-técnico-profissional, composto por Guanabara Koogan, Santos, Roca, AC Farmacêutica, Forense, Método, LTC, E.P.U. e Forense Universitária.

CAPÍTULO 1

MEDIÇÃO

1-1 O QUE É FÍSICA?

A ciência e a engenharia se baseiam em medições e comparações. Assim, precisamos de regras para estabelecer de que forma as grandezas devem ser medidas e comparadas e de experimentos para estabelecer as unidades para essas medições e comparações. Um dos propósitos da física (e também da engenharia) é projetar e executar esses experimentos.

Assim, por exemplo, os físicos se empenham em desenvolver relógios extremamente precisos para que intervalos de tempo possam ser medidos e comparados com exatidão. O leitor pode estar se perguntando se essa exatidão é realmente necessária. Eis um exemplo de sua importância: se não houvesse relógios extremamente precisos, o Sistema de Posicionamento Global (GPS — *Global Positioning System*), usado atualmente no mundo inteiro em uma infinidade de aplicações, não seria possível.

1-2 Medindo Grandezas

Descobrimos a física aprendendo a medir e comparar grandezas como comprimento, tempo, massa, temperatura, pressão e corrente elétrica.

Medimos cada grandeza física em unidades apropriadas, por comparação com um **padrão**. A **unidade** é um nome particular que atribuímos às medidas dessa grandeza. Assim, por exemplo, o metro (m) é uma unidade da grandeza comprimento. O padrão corresponde a exatamente 1,0 unidade da grandeza. Como veremos, o padrão de comprimento, que corresponde a exatamente 1,0 m, é a distância percorrida pela luz, no vácuo, durante uma certa fração de um segundo. Em princípio, podemos definir uma unidade e seu padrão da forma que quisermos, mas é importante que cientistas em diferentes partes do mundo concordem que nossas definições são ao mesmo tempo razoáveis e práticas.

Depois de escolher um padrão (de comprimento, digamos), precisamos estabelecer procedimentos através dos quais qualquer comprimento, seja ele o raio do átomo de hidrogênio, a largura de um skate, ou a distância de uma estrela, possa ser expresso em termos do padrão. Usar uma régua de comprimento aproximadamente igual ao padrão pode ser uma forma de executar medidas de comprimento. Entretanto, muitas comparações são necessariamente indiretas. É impossível usar uma régua, por exemplo, para medir o raio de um átomo ou a distância de uma estrela.

Existem tantas grandezas físicas que não é fácil organizá-las. Felizmente, não são todas independentes; a velocidade, por exemplo, é a razão entre as grandezas comprimento e tempo. Assim, o que fazemos é escolher, através de um acordo internacional, um pequeno número de grandezas físicas, como comprimento e tempo, e definir padrões apenas para essas grandezas. Em seguida, definimos as demais grandezas físicas em termos dessas *grandezas fundamentais* e de seus padrões (conhecidos como *padrões fundamentais*). A velocidade, por exemplo, é definida em termos das grandezas fundamentais comprimento e tempo e seus padrões fundamentais.

Os padrões fundamentais devem ser acessíveis e invariáveis. Se definimos o padrão de comprimento como a distância entre o nariz de uma pessoa e a ponta do dedo indicador da mão direita com o braço estendido, temos um padrão acessível, mas que varia, obviamente, de pessoa para pessoa. A necessidade de precisão na ciência e engenharia nos força, em primeiro lugar, a buscar a invariabilidade. Só então nos

Tabela 1-1

Unidades de Três Grandezas Fundamentais do SI

Grandeza	Nome da Unidade	Símbolo da Unidade
Comprimento	metro	m
Tempo	segundo	s
Massa	quilograma	kg

preocupamos em produzir réplicas dos padrões fundamentais que sejam acessíveis a todos que precisem utilizá-los.

1-3 O Sistema Internacional de Unidades

Em 1971, na 14ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, foram selecionadas como fundamentais sete grandezas para constituir a base do Sistema Internacional de Unidades (SI), popularmente conhecido como *sistema métrico*. A Tabela 1-1 mostra as unidades das três grandezas fundamentais (comprimento, massa e tempo) que serão usadas nos primeiros capítulos deste livro. Essas unidades foram definidas de modo a serem da mesma ordem de grandeza que a "escala humana".

Muitas *unidades derivadas* do SI são definidas em termos dessas unidades fundamentais. Assim, por exemplo, a unidade de potência do SI, chamada de **watt** (**W**), é definida em termos das unidades fundamentais de massa, comprimento e tempo. Como veremos no Capítulo 7,

$$1 \text{ watt} = 1 \text{ W} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3, \tag{1-1}$$

onde o último conjunto de símbolos de unidades é lido como quilograma metro quadrado por segundo ao cubo.

Para expressar as grandezas muito grandes ou muito pequenas frequentemente encontradas na física, usamos a *notação científica*, que emprega potências de 10. Nessa notação,

$$3.560.000.000 \text{ m} = 3{,}56 \times 10^9 \text{ m} \tag{1-2}$$

e

$$0{,}000\,000\,492 \text{ s} = 4{,}92 \times 10^{-7} \text{ s}. \tag{1-3}$$

Nos computadores, a notação científica às vezes assume uma forma abreviada, como 3.56 E9 e 4.92 E-7, onde E é usado para designar o "expoente de dez". Em algumas calculadoras, a notação é mais abreviada, com o E substituído por um espaço em branco.

Também por conveniência, quando lidamos com grandezas muito grandes ou muito pequenas, usamos os prefixos da Tabela 1-2. Como se pode ver, cada prefixo representa uma certa potência de 10, sendo usado como um fator multiplicativo. Incorporar um prefixo a uma unidade do SI tem o efeito de multiplicar a unidade pelo fator correspondente. Assim, podemos expressar uma certa potência elétrica como

$$1{,}27 \times 10^9 \text{ watts} = 1{,}27 \text{ gigawatt} = 1{,}27 \text{ GW} \tag{1-4}$$

ou um certo intervalo de tempo como

$$2{,}35 \times 10^{-9} \text{ s} = 2{,}35 \text{ nanossegundos} = 2{,}35 \text{ ns}. \tag{1-5}$$

Tabela 1-2

Prefixos das Unidades do SI

Fator	Prefixo[a]	Símbolo	Fator	Prefixo[a]	Símbolo
10^{24}	iota-	I	10^{-1}	deci-	d
10^{21}	zeta-	Z	$\mathbf{10^{-2}}$	**centi-**	**c**
10^{18}	exa-	E	$\mathbf{10^{-3}}$	**mili-**	**m**
10^{15}	peta-	P	$\mathbf{10^{-6}}$	**micro-**	$\boldsymbol{\mu}$
10^{12}	tera-	T	$\mathbf{10^{-9}}$	**nano-**	**n**
$\mathbf{10^{9}}$	**giga-**	**G**	$\mathbf{10^{-12}}$	**pico-**	**p**
$\mathbf{10^{6}}$	**mega-**	**M**	10^{-15}	femto-	f
$\mathbf{10^{3}}$	**quilo-**	**Q**	10^{-18}	ato-	a
10^{2}	hecto-	h	10^{-21}	zepto-	z
10^{1}	deca-	da	10^{-24}	iocto-	i

[a] Os prefixos mais usados aparecem em negrito.

Alguns prefixos, como os usados em mililitro, centímetro, quilograma e megabyte, são provavelmente familiares para o leitor.

1-4 Mudança de Unidades

Muitas vezes, precisamos mudar as unidades nas quais uma grandeza física está expressa, o que pode ser feito usando um método conhecido como *conversão em cadeia*. Nesse método, multiplicamos o valor original por um **fator de conversão** (uma razão entre unidades que é igual à unidade). Assim, por exemplo, como 1 min e 60 s correspondem a intervalos de tempo iguais, temos:

$$\frac{1\ \text{min}}{60\text{s}} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{60\text{s}}{1\ \text{min}} = 1.$$

Assim, as razões (1 min)/(60 s) e (60 s)/(1 min) podem ser usadas como fatores de conversão. Note que isso *não é* o mesmo que escrever 1/60 = 1 ou 60 = 1; cada *número* e sua *unidade* devem ser tratados conjuntamente.

Como a multiplicação de qualquer grandeza por um fator unitário deixa essa grandeza inalterada, podemos usar fatores de conversão sempre que isso for conveniente. No método de conversão em cadeia, usamos os fatores de conversão para cancelar unidades indesejáveis. Para converter 2 min em segundos, por exemplo, temos:

$$2\ \text{min} = (2\ \text{min})(1) = (2\ \cancel{\text{min}})\left(\frac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}}\right) = 120\ \text{s}. \tag{1-6}$$

Se você introduzir um fator de conversão e as unidades indesejáveis não desaparecerem, inverta o fator e tente novamente. Nas conversões, as unidades obedecem às mesmas regras algébricas que os números e variáveis.

O Apêndice D apresenta fatores de conversão entre unidades de SI e unidades de outros sistemas, como as que ainda são usadas até hoje nos Estados Unidos. Os fatores de conversão estão expressos na forma "1 min = 60 s" e não como uma razão; cabe ao leitor escrever a razão na forma correta.

1-5 Comprimento

Em 1792, a recém-criada República da França criou um novo sistema de pesos e medidas. A base era o metro, definido como um décimo milionésimo da distância entre o polo norte e o equador. Mais tarde, por motivos práticos, esse padrão foi abandonado e o metro passou a ser definido como a distância entre duas linhas finas gravadas perto das extremidades de uma barra de platina-irídio, a **barra do metro padrão**, mantida no Bureau Internacional de Pesos e Medidas, nas vizinhanças de Paris. Réplicas precisas dessa barra foram enviadas a laboratórios de padronização em várias partes do mundo. Esses **padrões secundários** foram usados para produzir outros padrões, mais acessíveis, de tal forma que, no final, todos os instrumentos de medição de comprimento estavam relacionados à barra do metro padrão por meio de uma complicada cadeia de comparações.

Com o passar do tempo, um padrão mais preciso que a distância entre duas finas ranhuras em uma barra de metal se tornou necessário. Em 1960, foi adotado um novo padrão para o metro, baseado no comprimento de onda da luz. Especificamente, o metro foi redefinido como 1.650.763,73 comprimentos de onda de uma certa luz vermelho-alaranjada emitida por átomos de criptônio 86 (um isótopo do criptônio) em um tubo de descarga de gás. Esse número de comprimentos de onda aparentemente estranho foi escolhido para que o novo padrão não fosse muito diferente do que era definido pela antiga barra do metro padrão.

Em 1983, entretanto, a necessidade de maior precisão havia alcançado tal ponto que mesmo o padrão do criptônio 86 já não era suficiente e, por isso, foi dado um passo audacioso: o metro foi redefinido como a distância percorrida pela luz em um

intervalo de tempo especificado. Nas palavras da 17ª Conferência Geral de Pesos e Medidas:

> O metro é a distância percorrida pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de 1/299.792.458 de segundo.

Esse intervalo de tempo foi escolhido para que a velocidade da luz c fosse exatamente

$$c = 299.792.458 \text{ m/s}.$$

Como as medidas da velocidade da luz haviam se tornado extremamente precisas, fazia sentido adotar a velocidade da luz como uma grandeza definida e usá-la para redefinir o metro.

A Tabela 1-3 mostra uma vasta gama de comprimentos, que vai desde o tamanho do universo conhecido (linha de cima) até o tamanho de alguns objetos muito pequenos.

Tabela 1-3

Alguns Comprimentos Aproximados

Descrição	Comprimento em Metros
Distância das galáxias mais antigas	2×10^{26}
Distância da galáxia de Andrômeda	2×10^{22}
Distância da estrela mais próxima, Proxima Centauri	4×10^{16}
Distância de Plutão	6×10^{12}
Raio da Terra	6×10^{6}
Altura do Monte Everest	9×10^{3}
Espessura desta página	1×10^{-4}
Comprimento de um vírus típico	1×10^{-8}
Raio do átomo de hidrogênio	5×10^{-11}
Raio do próton	1×10^{-15}

Exemplo

Estimativa de ordem de grandeza: novelo de linha

O maior novelo do mundo tem cerca de 2 m de raio. Qual é a ordem de grandeza do comprimento L do fio que forma o novelo?

IDEIA-CHAVE

Poderíamos, evidentemente, desenrolar o novelo e medir o comprimento L do fio, mas isso daria muito trabalho, além de deixar o fabricante do novelo muito aborrecido. Em vez disso, como estamos interessados apenas na ordem de grandeza, podemos estimar as grandezas necessárias para fazer o cálculo.

Cálculos Vamos supor que o novelo seja uma esfera de raio $R = 2$ m. O fio do novelo certamente não está apertado (existem espaços vazios entre trechos vizinhos do fio). Para levar em conta esses espaços vazios, vamos superestimar um pouco a área de seção transversal do fio, supondo que seja quadrada, com lados de comprimento $d = 4$ mm. Nesse caso, com área da seção reta d^2 e comprimento L, a corda ocupa um volume total de

$$V = (\text{área da seção reta})(\text{comprimento}) = d^2 L.$$

Esse valor é aproximadamente igual ao volume do novelo, dado por $4\pi R^3/3$, que é quase igual a $4R^3$, já que π é quase igual a 3. Assim, temos:

$$d^2 L = 4R^3,$$

ou

$$L = \frac{4R^3}{d^2} = \frac{4(2 \text{ m})^3}{(4 \times 10^{-3} \text{ m})^2}$$
$$= 2 \times 10^6 \text{ m} \approx 10^6 \text{ m} = 10^3 \text{ km}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(Note que não é preciso usar uma calculadora para realizar um cálculo simples como este.) A ordem de grandeza do comprimento do fio é, portanto, 1000 km!

1-6 Tempo

O tempo tem dois aspectos. No dia a dia e para alguns fins científicos, queremos saber a hora do dia para podermos ordenar eventos em sequência. Em muitos trabalhos científicos, estamos interessados em conhecer a duração de um evento. Assim, qualquer padrão de tempo deve ser capaz de responder a duas perguntas: "*Quando* isso aconteceu?" e "*Quanto tempo* isso durou?" A Tabela 1-4 mostra alguns intervalos de tempo.

Tabela 1-4

Alguns Intervalos de Tempo Aproximados

Descrição	Intervalo de Tempo em Segundos
Tempo de vida do próton (teórico)	3×10^{40}
Idade do universo	5×10^{17}
Idade da pirâmide de Quéops	1×10^{11}
Expectativa de vida de um ser humano	2×10^{9}
Duração de um dia	9×10^{4}
Intervalo entre duas batidas de um coração humano	8×10^{-1}
Tempo de vida do múon	2×10^{-6}
Pulso luminoso mais curto obtido em laboratório	1×10^{-16}
Tempo de vida da partícula mais instável	1×10^{-23}
Tempo de Planck[a]	1×10^{-43}

[a]Tempo decorrido após o big bang a partir do qual as leis de física que conhecemos passaram a ser válidas.

Qualquer fenômeno repetitivo pode ser usado como padrão de tempo. A rotação da Terra, que determina a duração do dia, foi usada para esse fim durante séculos; a Fig. 1-1 mostra um exemplo interessante de relógio baseado nessa rotação. Um relógio de quartzo, no qual um anel de quartzo é posto em vibração contínua, pode ser sincronizado com a rotação da Terra por meio de observações astronômicas e usado para medir intervalos de tempo no laboratório. Entretanto, a calibração não pode ser realizada com a exatidão exigida pela tecnologia moderna da engenharia e da ciência.

Para atender à necessidade de um melhor padrão de tempo, foram desenvolvidos relógios atômicos. Um relógio atômico do National Institute of Standards and Technology (NIST) em Boulder, Colorado, EUA, é o padrão da Hora Coordenada Universal (UTC) nos Estados Unidos. Seus sinais de tempo estão disponíveis através de ondas curtas de rádio (estações WWV e WWVH) e por telefone (303-499-7111). Sinais de tempo (e informações relacionadas) estão também disponíveis no United States Naval Observatory no site http://tycho.usno.navy.mil/time.html.* (Para acertar um relógio de forma extremamente precisa no local onde você se encontra, seria necessário levar em conta o tempo necessário para que esses sinais cheguem até você.)

A Fig. 1-2 mostra as variações da duração de um dia na Terra durante um período de quatro anos, obtidas por comparação com um relógio atômico de césio. Como a variação mostrada na Fig. 1-2 é sazonal e repetitiva, desconfiamos da rotação da Terra quando existe uma diferença entre a Terra e um átomo como padrões de tempo. A variação se deve a efeitos de maré causados pela Lua e pela circulação atmosférica.

Em 1967, a 13ª Conferência Geral de Pesos e Medidas adotou como padrão de tempo um segundo com base no relógio de césio:

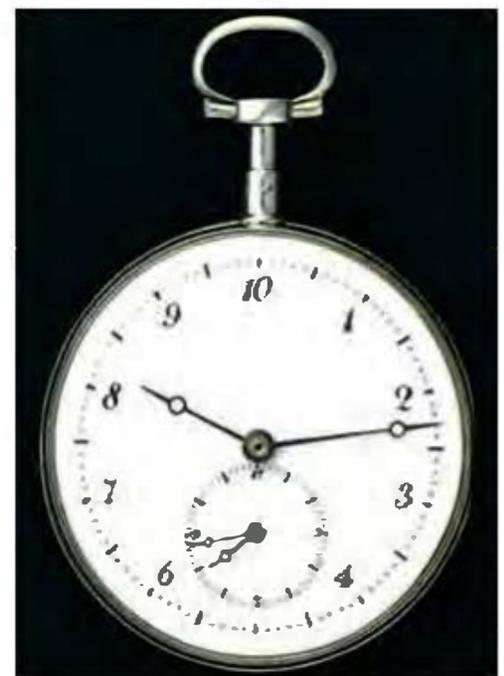
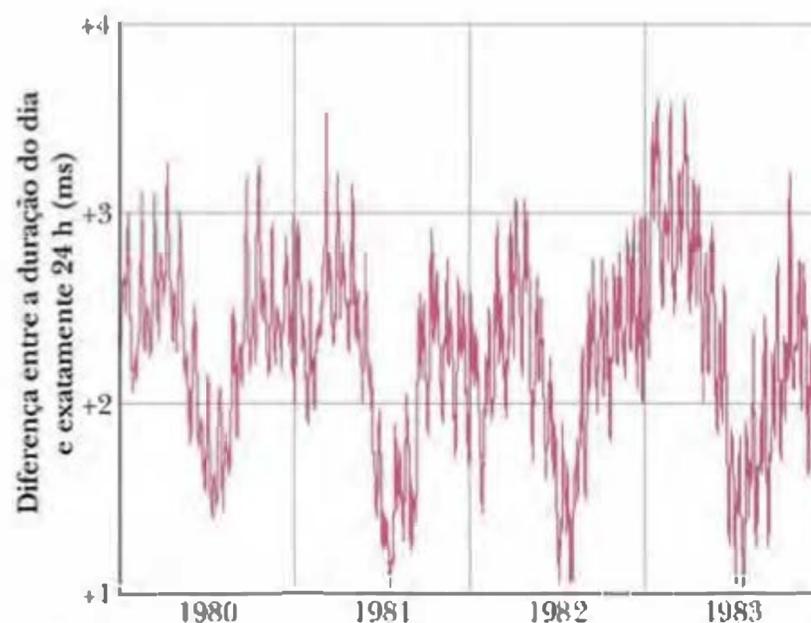



Figura 1-1 Quando o sistema métrico foi proposto em 1792, a definição de hora foi mudada para que o dia tivesse 10 horas, mas a ideia não pegou. O fabricante deste relógio de 10 horas, prudentemente, incluiu um mostrador menor que indicava o tempo da forma convencional. Os dois mostradores indicam a mesma hora? (*Steven Pitkin*)

* O Observatório Nacional fornece a hora legal brasileira no site http://pcdsh01.on.br. (N.T.)

Figura 1-2 Variações da duração do dia em um período de 4 anos. Note que a escala vertical inteira corresponde a apenas 3 ms (0,003 s).

Um segundo é o intervalo de tempo que corresponde a 9.192.631.770 oscilações da luz (de um comprimento de onda especificado) emitida por um átomo de césio 133.

Os relógios atômicos são tão estáveis que, em princípio, dois relógios de césio teriam que funcionar por 6000 anos para que a diferença entre as leituras fosse maior que 1 s. Mesmo assim, essa precisão não é nada em comparação com a dos relógios que estão sendo construídos atualmente, que pode chegar a 1 parte em 10^{18}, ou seja, 1 s em 1×10^{18} s (cerca de 3×10^{10} anos).

1-7 Massa

O Quilograma-Padrão

O padrão de massa do SI é um cilindro de platina–irídio (Fig. 1-3) mantido no Bureau Internacional de Pesos e Medidas, nas proximidades de Paris, ao qual foi atribuída, por acordo internacional, a massa de 1 quilograma. Cópias precisas desse cilindro foram enviadas a laboratórios de padronização de outros países e as massas de outros corpos podem ser determinadas comparando-os com uma dessas cópias. A Tabela 1-5 mostra algumas massas expressas em quilogramas, em uma faixa de aproximadamente 83 ordens de grandeza.

A cópia norte-americana do quilograma-padrão está guardada em um cofre do NIST e é removida, não mais do que uma vez por ano, para aferir duplicatas usadas em outros lugares. Desde 1889, foi levada para a França duas vezes para comparação com o padrão primário.

Figura 1-3 O quilograma-padrão internacional de massa, um cilindro de platina–irídio com 3,9 cm de altura e 3,9 cm de diâmetro. *(Cortesia do Bureau Internacional de Pesos e Medidas, França)*

Um Segundo Padrão de Massa

As massas dos átomos podem ser comparadas entre si mais precisamente que com o quilograma-padrão. Por essa razão, temos um segundo padrão de massa, o átomo de carbono 12, ao qual, por acordo internacional, foi atribuída uma massa de 12 **unidades de massa atômica** (u). A relação entre as duas unidades é a seguinte:

$$1 \text{ u} = 1{,}660\,538\,86 \times 10^{-27} \text{ kg}, \tag{1-7}$$

com uma incerteza de ±10 nas duas últimas casas decimais. Os cientistas podem determinar experimentalmente, com razoável precisão, as massas de outros átomos em relação à massa do carbono 12. O que nos falta no momento é uma forma confiável de estender tal precisão a unidades de massa mais comuns, como o quilograma.

Tabela 1-5

Algumas Massas Aproximadas

Descrição	Massa em Quilogramas
Universo conhecido	1×10^{53}
Nossa galáxia	2×10^{41}
Sol	2×10^{30}
Lua	7×10^{22}
Asteroide Eros	5×10^{15}
Montanha pequena	1×10^{12}
Transatlântico	7×10^{7}
Elefante	5×10^{3}
Uva	3×10^{-3}
Grão de poeira	7×10^{-10}
Molécula de penicilina	5×10^{-17}
Átomo de urânio	4×10^{-25}
Próton	2×10^{-27}
Elétron	9×10^{-31}

Massa Específica

Como vamos ver no Capítulo 14, a **massa específica** ρ de uma substância é a massa por unidade de volume:

$$\rho = \frac{m}{V}. \tag{1-8}$$

As massas específicas são normalmente expressas em quilogramas por metro cúbico ou em gramas por centímetro cúbico. A massa específica da água (1,00 grama por centímetro cúbico) é muito usada para fins de comparação. A massa específica da neve fresca é 10% da massa específica da água; a da platina é 21 vezes maior que a da água.

Exemplo

Massa específica e liquefação

Um objeto pesado pode afundar no solo durante um terremoto se o tremor faz com que o solo passe por um processo de *liquefação*, no qual as partículas do solo deslizam umas em relação às outras quase sem atrito. Nesse caso, o solo se torna praticamente uma areia movediça. A possibilidade de liquefação de um solo arenoso pode ser prevista em termos do *índice de vazios* de uma amostra do solo, representado pelo símbolo e e definido da seguinte forma:

$$e = \frac{V_v}{V_g}. \tag{1-9}$$

onde V_g é o volume total das partículas de areia na amostra e V_v é o volume total do espaço entre as partículas (isto é, dos *vazios*). Se e excede o valor crítico de 0,80, pode ocorrer liquefação durante um terremoto. Qual é a massa específica da areia, ρ_a, correspondente ao valor crítico? A massa específica do dióxido de silício (principal componente da areia) é $\rho_{SiO_2} = 2{,}600 \times 10^3$ kg/m³.

IDEIA-CHAVE

A massa específica da areia ρ_a em uma amostra é a massa por unidade de volume, ou seja, a razão entre a massa total m_a das partículas de areia e o volume total V_t da amostra:

$$\rho_a = \frac{m_a}{V_t}. \tag{1-10}$$

Cálculos O volume total V_t de uma amostra é dado por

$$V_t = V_g + V_v.$$

Substituindo V_v pelo seu valor, dado pela Eq. 1-9, e explicitando V_g, obtemos:

$$V_g = \frac{V_t}{1 + e}. \tag{1-11}$$

De acordo com a Eq. 1-8, a massa total m_a das partículas de areia é o produto da massa específica do dióxido de silício pelo volume total das partículas de areia:

$$m_a = \rho_{SiO_2} V_g. \tag{1-12}$$

Substituindo esta expressão na Eq. 1-10 e substituindo V_g pelo seu valor, dado pela Eq. 1-11, obtemos:

$$\rho_a = \frac{\rho_{SiO_2}}{V_t}\frac{V_t}{1 + e} = \frac{\rho_{SiO_2}}{1 + e}. \tag{1-13}$$

Fazendo $\rho_{SiO_2} = 2{,}600 \times 10^3$ kg/m³ e $e = 0{,}80$ nesta equação, descobrimos que a liquefação acontece quando a massa específica da areia é menor que

$$\rho_a = \frac{2{,}600 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}{1{,}80} = 1{,}4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

(Resposta)

Um edifício pode afundar vários metros por causa da liquefação.

REVISÃO E RESUMO

A Medição na Física A física se baseia na medição de grandezas físicas. Algumas grandezas físicas, como comprimento, tempo e massa, foram escolhidas como **grandezas fundamentais**; cada uma foi definida através de um **padrão** e recebeu uma **unidade** de medida (como metro, segundo e quilograma). Outras grandezas físicas são definidas em termos das grandezas fundamentais e de seus padrões e unidades.

Unidades do SI O sistema de unidades adotado neste livro é o Sistema Internacional de Unidades (SI). As três grandezas físicas mostradas na Tabela 1-1 são usadas nos primeiros capítulos. Os padrões, que têm que ser acessíveis e invariáveis, foram estabelecidos para essas grandezas fundamentais por um acordo internacional. Esses padrões são usados em todas as medições físicas, tanto das grandezas fundamentais quanto das grandezas secundárias. A notação científica e os prefixos da Tabela 1-2 são usados para simplificar a notação das medições.

Mudança de Unidades A conversão de unidades pode ser feita usando o método de *conversão em cadeia*, no qual os dados originais são multiplicados sucessivamente por fatores de conversão unitários e as unidades são manipuladas como quantidades algébricas até que apenas as unidades desejadas permaneçam.

Comprimento O metro é definido como a distância percorrida pela luz durante um intervalo de tempo especificado.

Tempo O segundo é definido em termos das oscilações da luz emitida por um isótopo de um certo elemento químico (césio 133). Sinais de tempo precisos são enviados a todo o mundo por sinais de rádio sincronizados por relógios atômicos em laboratórios de padronização.

Massa O quilograma é definido em termos de um padrão de massa de platina-irídio mantido em um laboratório nas vizinhanças de Paris. Para medições em escala atômica, é comumente usada a unidade de massa atômica, definida em termos do átomo de carbono 12.

Massa específica A massa específica ρ de uma substância é a massa por unidade de volume:

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (1\text{-}8)$$

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física* de Jearl Walker, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

Seção 1-5 Comprimento

•**1** A Terra tem a forma aproximada de uma esfera com $6{,}37 \times 10^6$ m de raio. Determine (a) a circunferência da Terra em quilômetros, (b) a área da superfície da Terra em quilômetros quadrados e (c) o volume da Terra em quilômetros cúbicos.

•**2** O *gry* é uma antiga medida inglesa de comprimento, definida como 1/10 de uma linha; *linha* é outra medida inglesa de comprimento, definida como 1/12 de uma polegada. Uma medida de comprimento usada nas gráficas é o *ponto*, definido como 1/72 de uma polegada. Quanto vale uma área de 0,50 gry^2 em pontos quadrados (pontos^2)?

•**3** O micrômetro (1 μm) também é chamado de *mícron*. (a) Quantos mícrons tem 1,0 km? (b) Que fração do centímetro é igual a 1,0 μm? (c) Quantos mícrons tem uma jarda?

•**4** As dimensões das letras e espaços neste livro são expressas em termos de pontos e paicas: 12 pontos = 1 paica e 6 paicas = 1 polegada. Se em uma das provas do livro uma figura apareceu deslocada de 0,80 cm em relação à posição correta, qual foi o deslocamento (a) em paicas e (b) em pontos?

•**5** Em um certo hipódromo da Inglaterra, um páreo foi disputado em uma distância de 4,0 furlongs. Qual é a distância da corrida em (a) varas e (b) cadeias? (1 furlong = 201,168 m, 1 vara = 5,0292 m e uma cadeia = 20,117 m.)

••**6** Hoje em dia, as conversões de unidades mais comuns podem ser feitas com o auxílio de calculadoras e computadores, mas é importante que o aluno saiba usar uma tabela de conversão como as do Apêndice D. A Tabela 1-4 é parte de uma tabela de conversão para um sistema de medidas de volume que já foi comum na Espanha; um volume de 1 fanega equivale a 55,501 dm^3 (decímetros cúbicos). Para completar a tabela, que números (com três algarismos significativos) devem ser inseridos (a) na coluna de cahizes, (b) na coluna de fanegas, (c) na coluna de cuartillas e (d) na coluna de almudes? Expresse 7,00 almudes em (e) medios, (f) cahizes e (g) centímetros cúbicos (cm^3).

Tabela 1-6

Problema 6

	cahiz	fanega	cuartilla	almude	medio
1 cahiz =	1	12	48	144	288
1 fanega =		1	4	12	24
1 cuartilla =			1	3	6
1 almude =				1	2
1 medio =					1

••**7** Os engenheiros hidráulicos dos Estados Unidos usam frequentemente, como unidade de volume de água, o *acre-pé*, definido como o volume de água necessário para cobrir 1 acre de terra até uma profundidade de 1 pé. Uma forte tempestade despejou 2,0 polegadas de chuva em 30 min em uma cidade com uma área de 26 km^2. Que volume de água, em acres-pés, caiu sobre a cidade?

••**8** A ponte de Harvard, que atravessa o rio Charles, ligando Cambridge a Boston, tem um comprimento de 364,4 smoots mais uma orelha. A unidade chamada de smoot tem como padrão a altura de Oliver Reed Smoot, Jr., classe de 1962, que foi carregado ou arrastado pela ponte para que outros membros da sociedade estudantil Lambda Chi Alpha pudessem marcar (com tinta) comprimentos de

1 smoot ao longo da ponte. As marcas têm sido refeitas semestralmente por membros da sociedade, normalmente em horários de pico, para que a polícia não possa interferir facilmente. (Inicialmente, os policiais talvez tenham se ressentido do fato de que o smoot não era uma unidade fundamental do SI, mas hoje parecem conformados com a brincadeira.) A Fig. 1-4 mostra três segmentos de reta paralelos medidos em smoots (S), willies (W), e zeldas (Z). Quanto vale uma distância de 50,0 smoots (a) em willies e (b) em zeldas?

Figura 1-4 Problema 8.

••**9** A Antártica é aproximadamente semicircular, com um raio de 2000 km (Fig. 1-5). A espessura média da cobertura de gelo é 3000 m. Quantos centímetros cúbicos de gelo contém a Antártica? (Ignore a curvatura da Terra.)

Figura 1-5 Problema 9.

Seção 1-6 Tempo

•**10** Até 1913, cada cidade do Brasil tinha sua hora local. Hoje em dia, os viajantes acertam o relógio apenas quando a variação de tempo é igual a 1,0 h (o que corresponde a um fuso horário). Que distância, em média, uma pessoa deve percorrer, em graus de longitude, para passar de um fuso horário a outro e ter que acertar o relógio? (*Sugestão:* a Terra gira 360° em aproximadamente 24 h.)

•**11** Por cerca de 10 anos após a Revolução Francesa, o governo francês tentou basear as medidas de tempo em múltiplos de dez: uma semana tinha 10 dias, um dia tinha 10 horas, uma hora consistia em 100 minutos e um minuto consistia em 100 segundos. Quais são as razões (a) da semana decimal francesa para a semana comum e (b) do segundo decimal francês para o segundo comum?

•**12** A planta de crescimento mais rápido de que se tem notícia é uma *Hesperoyucca whipplei* que cresceu 3,7 m em 14 dias. Qual foi a velocidade de crescimento da planta em micrômetros por segundo?

•**13** Três relógios digitais, A, B e C, funcionam com velocidades diferentes e não têm leituras simultâneas de zero. A Fig. 1-6 mostra leituras simultâneas de pares dos relógios em quatro ocasiões. (Na primeira ocasião, por exemplo, B indica 25,0 s e C indica 92,0 s.) Se o intervalo entre dois eventos é 600 s de acordo com o relógio A, qual é o intervalo entre os eventos (a) no relógio B e (b) no relógio C? (c) Quando o relógio A indica 400 s, qual é a indicação do relógio B? (d) Quando o relógio C indica 15,0 s, qual é a indicação do relógio B? (Suponha que as leituras sejam negativas para instantes anteriores a zero.)

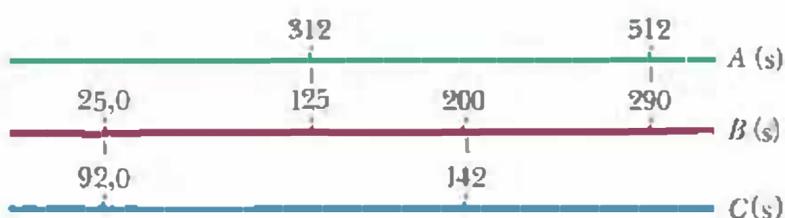



Figura 1-6 Problema 13.

•**14** Um tempo de aula (50 min) é aproximadamente igual a 1 microsséculo. (a) Qual é a duração de um microsséculo em minutos? (b) Usando a relação

$$\text{erro percentual} = \left(\frac{\text{real} - \text{aproximado}}{\text{real}}\right)100,$$

determine o erro percentual dessa aproximação.

•**15** O fortnight é uma curiosa medida inglesa de tempo igual a 2,0 semanas (a palavra é uma contração de "fourteen nights", ou seja, quatorze noites). Dependendo da companhia, esse tempo pode passar depressa ou transformar-se em uma interminável sequência de microssegundos. Quantos microssegundos tem um fortnight?

•**16** Os padrões de tempo são baseados atualmente em relógios atômicos, mas outra possibilidade seria usar os *pulsares*, estrelas de nêutrons (estrelas altamente compactas, compostas apenas de nêutrons) que possuem um movimento de rotação. Alguns pulsares giram com velocidade constante, produzindo um sinal de rádio que passa pela superfície da Terra uma vez a cada rotação, como o feixe luminoso de um farol. O pulsar PSR 1937+21 é um exemplo; ele gira uma vez a cada 1,557 806 448 872 75 ± 3 ms, onde o símbolo ±3 indica a incerteza na última casa decimal (e *não* ±3 ms). (a) Quantas rotações o PSR 1937+21 executa em 7,00 dias? (b) Quanto tempo o pulsar leva para girar exatamente um milhão de vezes e (c) qual é a incerteza associada?

•**17** Cinco relógios estão sendo testados em um laboratório. Exatamente ao meio-dia, de acordo com o Observatório Nacional, em dias sucessivos da semana, as leituras dos relógios foram anotadas na tabela a seguir. Coloque os relógios em ordem de confiabilidade, começando pelo melhor. Justifique sua escolha.

Relógio	Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sáb
A	12:36:40	12:36:56	12:37:12	12:37:27	12:37:44	12:37:59	12:38:14
B	11:59:59	12:00:02	11:59:57	12:00:07	12:00:02	11:59:56	12:00:03
C	15:50:45	15:51:43	15:52:41	15:53:39	15:54:37	15:55:35	15:56:33
D	12:03:59	12:02:52	12:01:45	12:00:38	11:59:31	11:58:24	11:57:17
E	12:03:59	12:02:49	12:01:54	12:01:52	12:01:32	12:01:22	12:01:12

••**18** Como a velocidade de rotação da Terra está diminuindo gradualmente, a duração dos dias está aumentando: o dia no final de 1,0 século é 1,0 ms mais longo que o dia no início do século. Qual é o aumento da duração do dia após 20 séculos?

•••**19** Suponha que você esteja deitado na praia, perto do Equador, vendo o Sol se pôr em um mar calmo, e liga um cronômetro no momento em que o Sol desaparece. Em seguida, você se levanta, deslocando os olhos para cima de uma distância $H = 1{,}70$ m, e desliga o cronômetro no momento em que o Sol volta a desaparecer. Se o tempo indicado pelo cronômetro é $t = 11{,}1$ s, qual é o raio da Terra?

Seção 1-7 Massa

•**20** O recorde para a maior garrafa de vidro foi estabelecido em 1992 por uma equipe de Millville, Nova Jersey, que soprou uma garrafa com um volume de 193 galões americanos. (a) Qual é a diferença entre esse volume e 1,0 milhão de centímetros cúbicos? (b) Se a garrafa fosse enchida com água a uma vazão de 1,8 g/min, em quanto tempo estaria cheia? A massa específica da água é 1000 kg/m³.

•**21** A Terra tem uma massa de $5{,}98 \times 10^{24}$ kg. A massa média dos átomos que compõem a Terra é 40 u. Quantos átomos existem na Terra?

•22 O ouro, que tem uma massa específica de 19,32 g/cm^3, é um metal extremamente dúctil e maleável, isto é, pode ser transformado em fios ou folhas muito finas. (a) Se uma amostra de ouro, com uma massa de 27,63 g, é prensada até se tornar uma folha com 1,000 μm de espessura, qual é a área dessa folha? (b) Se, em vez disso, o ouro é transformado em um fio cilíndrico com 2,500 μm de raio, qual é o comprimento do fio?

•23 (a) Supondo que a água tenha uma massa específica de exatamente 1 g/cm^3, determine a massa de um metro cúbico de água em quilogramas. (b) Suponha que sejam necessárias 10,0 h para drenar um recipiente com 5700 m^3 de água. Qual é a "vazão mássica" da água do recipiente, em quilogramas por segundo?

••24 Os grãos de areia das praias da Califórnia são aproximadamente esféricos, com um raio de 50 μm, e são feitos de dióxido de silício, que tem uma massa específica de 2600 kg/m^3. Que massa de grãos de areia possui uma área superficial total (soma das áreas de todas as esferas) igual à área da superfície de um cubo com 1,00 m de aresta?

••25 Durante uma tempestade, parte da encosta de uma montanha, com 2,5 km de largura, 0,80 km de altura ao longo da encosta e 2,0 m de espessura, desliza até um vale em uma avalanche de lama. Suponha que a lama fique distribuída uniformemente em uma área quadrada do vale com 0,40 km de lado e que a lama tem uma massa específica de 1900 kg/m^3. Qual é a massa da lama existente em uma área de 4,0 m^2 do vale?

••26 Em um centímetro cúbico de uma nuvem cúmulo típica existem de 50 a 500 gotas d'água, com um raio típico de 10 μm. Para essa faixa de valores, determine os valores mínimo e máximo, respectivamente, das seguintes grandezas: (a) número de metros cúbicos de água em uma nuvem cúmulo cilíndrica com 3,0 km de altura e 1,0 km de raio; (b) número de garrafas de 1 litro que podem ser enchidas com essa quantidade de água; (c) a massa da água contida nessa nuvem, sabendo que a massa específica da água é 1000 kg/m^3.

••27 A massa específica do ferro é 7,87 g/cm^3 e a massa de um átomo de ferro é $9,27 \times 10^{-26}$ kg. Se os átomos são esféricos e estão densamente compactados, (a) qual é o volume de um átomo de ferro e (b) qual é a distância entre os centros de dois átomos vizinhos?

••28 Um mol de átomos contém $6,02 \times 10^{23}$ átomos. Qual é a ordem de grandeza do número de mols de átomos que existem em um gato grande? As massas de um átomo de hidrogênio, de um átomo de oxigênio e de um átomo de carbono são 1,0 u, 16 u e 12 u, respectivamente.

••29 Em uma viagem à Malásia, você não resiste à tentação e compra um touro que pesa 28,9 piculs no sistema local de unidades de peso: 1 picul = 100 gins, 1 gin = 16 tahils, 1 tahil = 10 chees e 1 chee = 10 hoons. O peso de 1 hoon corresponde a uma massa de 0,3779 g. Quando você despacha o boi para casa, que massa deve declarar à alfândega? (*Sugestão:* use conversões em cadeia.)

••30 Despeja-se água em um recipiente que apresenta um vazamento. A massa m de água no recipiente em função do tempo t é dada por $m = 5,00t^{0,8} - 3,00t + 20,00$ para $t \geq 0$, onde a massa está em gramas e o tempo em segundos. (a) Em que instante a massa de água é máxima? (b) Qual é o valor dessa massa? Qual é a taxa de variação da massa, em quilogramas por minuto, (c) em $t = 2,00$ s e (d) em $t = 5,00$ s?

•••31 Um recipiente vertical cuja base mede 14,0 cm por 17,0 cm está sendo enchido com barras de chocolate que possuem um volume de 50 mm^3 e uma massa de 0,0200 g. Suponha que o espaço vazio entre as barras de chocolate seja tão pequeno que pode ser desprezado. Se a altura das barras de chocolate no recipiente aumenta à taxa de 0,250 cm/s, qual é a taxa de aumento da massa das barras de chocolate que estão no recipiente em quilogramas por minuto?

Problemas Adicionais

32 Nos Estados Unidos, uma casa de boneca tem uma escala de 1:12 em relação a uma casa de verdade (ou seja, cada distância na casa de boneca é 1/12 da distância correspondente na casa de verdade) e uma casa em miniatura (uma casa de boneca feita para caber em uma casa de boneca) tem uma escala de 1:144 em relação a uma casa de verdade. Suponha que uma casa de verdade (Fig. 1-7) tenha 20 m de comprimento, 12 m de largura, 6,0 m de altura, e um telhado inclinado padrão (com o perfil de um triângulo isósceles) de 3,0 m de altura. Qual é o volume, em metros cúbicos, (a) da casa de bonecas e (b) da casa em miniatura correspondente?

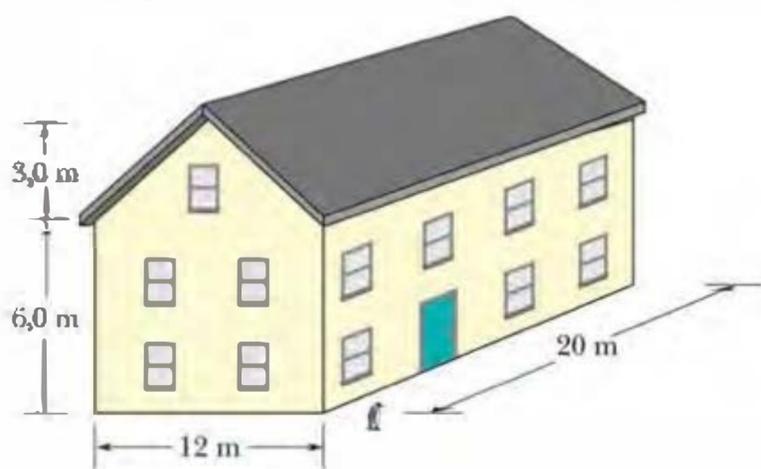



Figura 1-7 Problema 32.

33 A tonelada é uma medida de volume frequentemente empregada no transporte de mercadorias, mas seu uso requer uma certa cautela, pois existem pelo menos três tipos de tonelada: uma *tonelada de deslocamento* é igual a 7 barrels bulk, uma *tonelada de frete* é igual a 8 barrels bulk, e uma *tonelada de registro* é igual a 20 barrels bulk. O *barrel bulk* é outra medida de volume: 1 barrel bulk = 0,1415 m^3. Suponha que você esteja analisando um pedido de "73 toneladas" de chocolate M&M e tenha certeza de que o cliente que fez a encomenda usou "tonelada" como unidade de volume (e não de peso ou de massa, como será discutido no Capítulo 5). Se o cliente estava pensando em toneladas de deslocamento, quantos alqueires norte-americanos em excesso você vai despachar se interpretar equivocadamente o pedido como (a) 73 toneladas de frete e (b) 73 toneladas de registro? (1 m^3 = 28,378 alqueires norte-americanos.)

34 Dois tipos de *barril* foram usados como unidades de volume na década de 1920 nos Estados Unidos. O barril de maçã tinha um volume oficial de 7056 polegadas cúbicas; o barril de cranberry, 5826 polegadas cúbicas. Se um comerciante vende 20 barris de cranberry a um freguês que pensa estar recebendo barris de maçã, qual é a diferença de volume em litros?

35 Uma antiga poesia infantil inglesa diz o seguinte: "Little Miss Muffet sat on a tuffet, eating her curds and whey, when along came a spider who sat down beside her ..." ("A pequena Miss Muffet estava sentada em um banquinho, comendo queijo cottage, quando chegou uma aranha e sentou-se ao seu lado ...") A aranha não se aproximou por causa do queijo e sim porque Miss Muffet tinha 11 tuffets de moscas secas. O volume de um tuffet é dado por 1 tuffet = 2 pecks = 0,50 Imperial bushel, onde 1 Imperial bushel = 36,3687 litros (L). Qual era o volume das moscas de Miss Muffet em (a) pecks; (b) Imperial bushels; (c) litros?

36 A Tabela 1-7 mostra algumas unidades antigas de volume de líquidos. Para completar a tabela, que números (com três algarismos significativos) devem ser introduzidos (a) na coluna de weys; (b) na coluna de chaldrons; (c) na coluna de bags; (d) na coluna de pottles; (e) na coluna da gills? (f) O volume de 1 bag equivale a 0,1091 m³. Em uma história antiga, uma feiticeira prepara uma poção mágica em um caldeirão com um volume de 1,5 chaldron. Qual é o volume do caldeirão em metros cúbicos?

Tabela 1-7

Problema 36

	wey	chaldron	bag	pottle	gill
1 wey =	1	10/9	40/3	640	120 240
1 chaldron =					
1 bag =					
1 pottle =					
1 gill =					

37 Um cubo de açúcar típico tem 1 cm de aresta. Qual é o valor da aresta de uma caixa cúbica com capacidade suficiente para conter um mol de cubos de açúcar? (Um mol = $6{,}02 \times 10^{23}$ unidades.)

38 Um antigo manuscrito revela que um proprietário de terras no tempo do rei Artur possuía 3,00 acres de terra cultivada e uma área para criação de gado de 25,0 perchas por 4,00 perchas. Qual era a área total (a) na antiga unidade de roods e (b) na unidade mais moderna de metros quadrados? 1 acre é uma área de 40 perchas por 4 perchas, 1 rood é uma área de 40 perchas por 1 percha, e 1 percha equivale a 16,5 pés.

39 Um turista norte-americano compra um carro na Inglaterra e o despacha para os Estados Unidos. Um adesivo no carro informa que o consumo de combustível do carro é 40 milhas por galão na estrada. O turista não sabe que o galão inglês é diferente do galão norte-americano:

1 galão inglês = 4,546.090.0 litros
1 galão norteamericano = 3,785 411 8 litros

Para fazer uma viagem de 750 milhas nos Estados Unidos, de quantos galões de combustível (a) o turista pensa que precisa e (b) o turista realmente precisa?

40 Usando os dados fornecidos neste capítulo, determine o número de átomos de hidrogênio necessários para obter 1,0 kg de hidrogênio. Um átomo de hidrogênio tem uma massa de 1,0 u.

41 O *cord* é um volume de madeira cortada correspondente a uma pilha de 8 pés de comprimento, 4 pés de largura e 4 pés de altura. Quantos cords existem em 1,0 m³ de madeira?

42 Uma molécula de água (H_2O) contém dois átomos de hidrogênio e um átomo de oxigênio. Um átomo de hidrogênio tem uma massa de 1,0 u e um átomo de oxigênio tem uma massa de 16 u, aproximadamente. (a) Qual é a massa de uma molécula de água em quilogramas? (b) Quantas moléculas de água existem nos oceanos da Terra, cuja massa estimada é $1{,}4 \times 10^{21}$ kg?

43 Uma pessoa que está de dieta pode perder 2,3 kg por semana. Expresse a taxa de perda de massa em miligramas por segundo, como se a pessoa pudesse sentir a perda segundo a segundo.

44 Que massa de água caiu sobre a cidade no Problema 7? A massa específica da água é $1{,}0 \times 10^3$ kg/m³.

45 (a) O *shake* é uma unidade de tempo usada informalmente pelos físicos nucleares. Um shake é igual a 10^{-8} s. Existem mais shakes em um segundo que segundos em um ano? (b) O homem existe há aproximadamente 10^6 anos, enquanto a idade do universo é cerca de 10^{10} anos. Se a idade do universo for definida como 1 "dia do universo" e o "dia do universo" for dividido em "segundos do universo", da mesma forma como um dia comum é dividido em segundos comuns, quantos segundos do universo se passaram desde que o homem começou a existir?

46 Uma unidade de área frequentemente usada para medir terrenos é o *hectare*, definido como 10^4 m². Uma mina de carvão a céu aberto consome anualmente 75 hectares de terra até uma profundidade de 26 m. Qual é o volume de terra removido por ano em quilômetros cúbicos?

47 Uma unidade astronômica (UA) é a distância média entre a Terra e o Sol, aproximadamente $1{,}50 \times 10^8$ km. A velocidade da luz é aproximadamente $3{,}0 \times 10^8$ m/s. Expresse a velocidade da luz em unidades astronômicas por minuto.

48 A toupeira comum tem uma massa da ordem de 75 g, que corresponde a cerca de 7,5 mols de átomos. (Um mol de átomos equivale a $6{,}02 \times 10^{23}$ átomos.) Qual é a massa média dos átomos de uma toupeira em unidades de massa atômica (u)?

49 Uma unidade de comprimento tradicional no Japão é o ken (1 ken = 1,97 m). Determine a razão (a) entre kens quadrados e metros quadrados e (b) entre kens cúbicos e metros cúbicos. Qual é o volume de um tanque de água cilíndrico com 5,50 kens de altura e 3,00 kens de raio (c) em kens cúbicos e (d) em metros cúbicos?

50 Você recebeu ordens para navegar 24,5 milhas na direção leste, com o objetivo de posicionar seu barco de salvamento exatamente sobre a posição de um navio pirata afundado. Quando os mergulhadores não encontram nenhum sinal do navio, você se comunica com a base e descobre que deveria ter percorrido 24,5 *milhas náuticas* e não milhas comuns. Use a tabela de conversão de unidades de comprimento do Apêndice D para calcular a distância horizontal em quilômetros entre sua posição atual e o local onde o navio pirata afundou.

51 O cúbito é uma antiga unidade de comprimento baseada na distância entre o cotovelo e a ponta do dedo médio. Suponha que essa distância estivesse entre 43 e 53 cm e que gravuras antigas mostrem que uma coluna cilíndrica tinha 9 cúbitos de altura e 2 cúbitos de diâmetro. Determine os valores mínimo e máximo, respectivamente, (a) da altura da coluna em metros; (b) da altura da coluna em milímetros; (c) do volume da coluna em metros cúbicos.

52 Para ter uma ideia da diferença entre o antigo e o moderno e entre o grande e o pequeno, considere o seguinte: na antiga Inglaterra rural, 1 hide (entre 100 e 120 acres) era a área de terra necessária para sustentar uma família com um arado durante um ano. (Uma área de 1 acre equivale a 4047 m².) Além disso, 1 wapentake era a área de terra necessária para sustentar 100 famílias nas mesmas condições. Na física quântica, a área da seção reta de choque de um núcleo (definida através da probabilidade de que uma partícula incidente seja absorvida pelo núcleo) é medida em barns; 1 barn = 1×10^{-28} m². (No jargão da física nuclear, se um núcleo é "grande", acertá-lo com uma partícula é tão fácil quanto acertar um tiro em um celeiro.) Qual é a razão entre 25 wapentakes e 11 barns?

53 A *unidade astronômica* (UA) é a distância média entre a Terra e o Sol, cerca de $92{,}9 \times 10^6$ milhas. O *parsec* (pc) é a distância para a qual uma distância de 1 UA subtende um ângulo de exatamente 1 segundo de arco (Fig. 1-8). O *ano-luz* é a distância que a luz, viajando no vácuo com uma velocidade de 186.000 milhas por

segundo, percorre em 1,0 ano. Expresse a distância entre a Terra e o Sol (a) em parsecs e (b) em anos-luz.

Um ângulo de exatamente 1 segundo

1 pc

1 pc

1 UA

Figura 1-8 Problema 53.

54 Uma certa marca de tinta de parede promete uma cobertura de 460 pés quadrados por galão. (a) Expresse esse valor em metros quadrados por litro. (b) Expresse esse valor em uma unidade do SI (veja os Apêndices A e D). (c) Qual é o inverso da grandeza original e (d) qual é o significado físico da nova grandeza?

CAPÍTULO 2

MOVIMENTO RETILÍNEO

2-1 O QUE É FÍSICA?

Um dos objetivos da física é estudar o movimento dos objetos: a rapidez com que se movem, por exemplo, ou a distância que percorrem em um dado intervalo de tempo. Os engenheiros da NASCAR são fanáticos por este aspecto da física, que os ajuda a avaliar o desempenho dos carros antes e durante as corridas. Os geólogos usam esta física para estudar o movimento de placas tectônicas, na tentativa de prever terremotos. Os médicos necessitam dessa física para mapear o fluxo de sangue em um paciente quando examinam uma artéria parcialmente obstruída, e motoristas a usam para reduzir a velocidade e escapar de uma multa quando percebem que existe um radar à frente. Existem inúmeros outros exemplos. Neste capítulo, estudamos a física básica do movimento nos casos em que o objeto (carro de corrida, placa tectônica, célula sanguínea ou qualquer outro) está se movendo em linha reta. Este tipo de movimento é chamado de *movimento unidimensional*.

2-2 Movimento

O mundo, e tudo que nele existe, está sempre em movimento. Mesmo objetos aparentemente estacionários, como uma estrada, estão em movimento por causa da rotação da Terra, da órbita da Terra em torno do Sol, da órbita do Sol em torno do centro da Via Láctea e do deslocamento da Via Láctea em relação às outras galáxias. A classificação e comparação dos movimentos (chamada de **cinemática**) podem ser um desafio. O que exatamente deve ser medido? Com que deve ser comparado?

Antes de tentar responder a estas perguntas, vamos examinar algumas propriedades gerais do movimento unidimensional, restringindo a análise de três formas:

1. Vamos supor que o movimento se dá ao longo de uma linha reta. A trajetória pode ser vertical, horizontal ou inclinada, mas deve ser retilínea.
2. As forças (empurrões e puxões) modificam o movimento, mas não serão discutidas até o Capítulo 5. Neste capítulo, vamos discutir apenas o movimento em si e suas mudanças, sem nos preocupar com as causas. O objeto está se movendo cada vez mais depressa, cada vez mais devagar, ou o movimento mudou de direção? Se o movimento está mudando, essa mudança é brusca ou gradual?
3. Vamos supor que o objeto em movimento é uma **partícula** (ou seja, um objeto pontual, como um elétron) ou um objeto que se move como uma partícula (isto é, todas as partes do objeto se movem na mesma direção e com a mesma rapidez). Assim, por exemplo, podemos imaginar que o movimento de um porco rígido deslizando em um escorrega é semelhante ao de uma partícula; não podemos dizer o mesmo, porém, de uma bola rolando em uma mesa de sinuca.

2-3 Posição e Deslocamento

Localizar um objeto significa determinar a posição do objeto em relação a um ponto de referência, frequentemente a **origem** (ou ponto zero) de um eixo como o eixo *x*

Sentido positivo

Sentido negativo

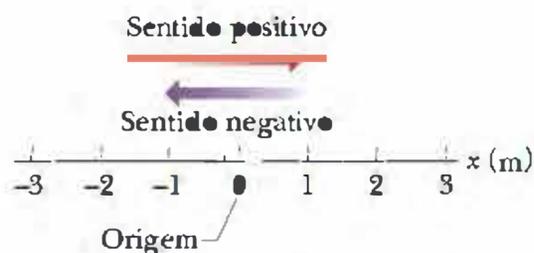
−3 −2 −1 0 1 2 3 x (m)

Origem

Figura 2-1 A posição é assinalada em um eixo marcado em unidades de comprimento (metros, por exemplo), que se estende indefinidamente nos dois sentidos. O nome do eixo, x, por exemplo, aparece sempre no lado positivo do eixo em relação à origem.

da Fig. 2-1. O **sentido positivo** do eixo é o sentido em que os números (coordenadas) que indicam a posição dos objetos aumentam de valor, que, na Fig. 2-1, é para a direita. O sentido oposto é o **sentido negativo**.

Assim, por exemplo, uma partícula pode estar localizada em $x = 5$ m, o que significa que está a 5 m da origem no sentido positivo. Se estivesse localizada em $x = -5$ m, estaria também a 5 m da origem, mas no sentido oposto. Sobre o eixo, uma coordenada de -5 m é menor que uma coordenada de -1 m e ambas são menores que uma coordenada de $+5$ m. O sinal positivo de uma coordenada não precisa ser mostrado explicitamente, mas o sinal negativo deve sempre ser mostrado.

A uma mudança de uma posição x_1 para uma posição x_2 é associado um **deslocamento** Δx, dado por

$$\Delta x = x_2 - x_1. \tag{2-1}$$

(O símbolo Δ, a letra grega delta maiúsculo, é usada para representar a variação de uma grandeza e corresponde à diferença entre o valor final e o valor inicial.) Quando atribuímos números às posições x_1 e x_2 da Eq. 2-1, um deslocamento no sentido positivo (para a direita na Fig. 2-1) sempre resulta em um deslocamento positivo e um deslocamento no sentido oposto (para a esquerda na figura) sempre resulta em um deslocamento negativo. Assim, por exemplo, se uma partícula se move de $x_1 = 5$ m para $x_2 = 12$ m, $\Delta x = (12 \text{ m}) - (5 \text{ m}) = +7$ m. O resultado positivo indica que o movimento é no sentido positivo. Se, em vez disso, a partícula se move de $x_1 = 5$ m para $x_2 = 1$ m, $\Delta x = (1 \text{ m}) - (5 \text{ m}) = -4$ m. O resultado negativo indica que o movimento é no sentido negativo.

O número de metros percorridos é irrelevante; o deslocamento envolve apenas as posições inicial e final. Assim, por exemplo, se a partícula se move de $x = 5$ m para $x = 200$ m e, em seguida, volta para $x = 5$ m, o deslocamento é $\Delta x = (5 \text{ m}) - (5 \text{ m}) = 0$.

O sinal positivo do deslocamento não precisa ser mostrado, mas o sinal negativo deve sempre ser mostrado. Quando ignoramos o sinal (e, portanto, o sentido) do deslocamento, ficamos com o **módulo** do deslocamento. Assim, por exemplo, a um deslocamento $\Delta x = -4$ m corresponde um módulo de 4 m.

O deslocamento é um exemplo de **grandeza vetorial**, uma grandeza que possui um módulo e uma orientação. Os vetores serão discutidos com mais detalhes no Capítulo 3 (na verdade, talvez alguns estudantes já tenham lido esse capítulo), mas tudo de que necessitamos no momento é a ideia de que o deslocamento possui duas características: (1) o *módulo* é a distância (como, por exemplo, o número de metros) entre as posições inicial e final; (2) a *orientação*, de uma posição inicial para uma posição final, que pode ser representada por um sinal positivo ou um sinal negativo se o movimento for retilíneo.

O que se segue é o primeiro dos muitos testes que o leitor encontrará neste livro. Os testes contêm uma ou mais questões cujas respostas requerem um raciocínio ou cálculo mental e permitem verificar a compreensão do ponto discutido. As respostas aparecem no final do livro.

TESTE 1

Considere três pares de posições iniciais e finais, respectivamente, ao longo do eixo x. A que pares correspondem deslocamentos negativos: (a) -3 m, $+5$ m; (b) -3 m, -7 m; (c) 7 m, -3 m?

2-4 Velocidade Média e Velocidade Escalar Média

Uma forma compacta de descrever a posição de um objeto é desenhar um gráfico da posição x em função do tempo t, ou seja, um gráfico de $x(t)$. [A notação $x(t)$ representa uma função x de t e não o produto de x por t.] Como exemplo simples,

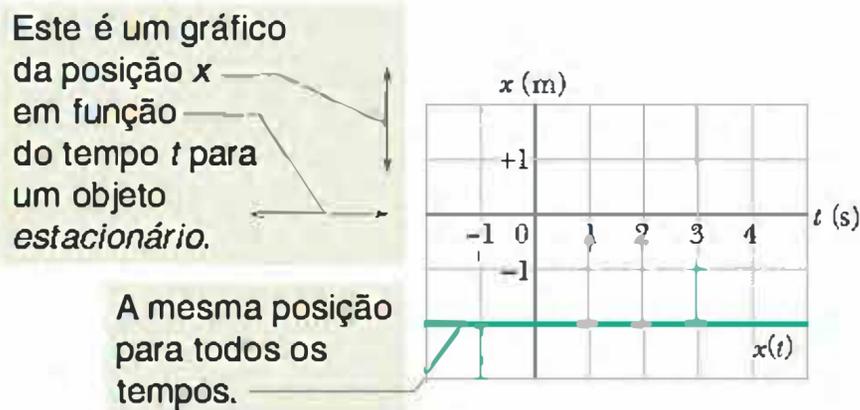



Figura 2-2 Gráfico de $x(t)$ para um tatu que está em repouso em $x = -2$ m. O valor de x é -2 m para qualquer instante t.

a Fig. 2-2 mostra a função posição $x(t)$ de um tatu em repouso (tratado como uma partícula) durante um intervalo de tempo de 7 s. A posição do animal tem sempre o mesmo valor, $x = -2$ m.

A Fig. 2-3 é mais interessante, já que envolve movimento. O tatu é avistado em $t = 0$, quando está na posição $x = -5$ m. Ele se move no sentido de $x = 0$, passa por esse ponto em $t = 3$ s e continua a se deslocar para maiores valores positivos de x. A Fig. 2-3 mostra também o movimento real do tatu em linha reta, através do desenho da posição em que o tatu se encontra em três instantes de tempo. O gráfico da Fig. 2-3 é mais abstrato e bem diferente daquilo que o leitor realmente veria, mas é muito mais rico em informações. Ele também revela com que rapidez o tatu se move.

Na verdade, várias grandezas estão associadas à expressão "com que rapidez". Uma é a **velocidade média** $v_{méd}$, que é a razão entre o deslocamento Δx e o intervalo de tempo Δt durante o qual esse deslocamento ocorre:

$$v_{méd} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \quad (2\text{-}2)$$

A notação significa que a posição é x_1 no instante t_1 e x_2 no instante t_2. A unidade de $v_{méd}$ no Sistema Internacional de Unidades (SI) é o metro por segundo (m/s). Outras unidades são usadas em alguns problemas, mas todas estão na forma de comprimento/tempo.

Em um gráfico de x em função de t, $v_{méd}$ é a **inclinação** da reta que liga dois pontos particulares da curva $x(t)$: um dos pontos corresponde a x_2 e t_2 e o outro a x_1 e t_1. Da mesma forma que o deslocamento, $v_{méd}$ também possui um módulo, uma

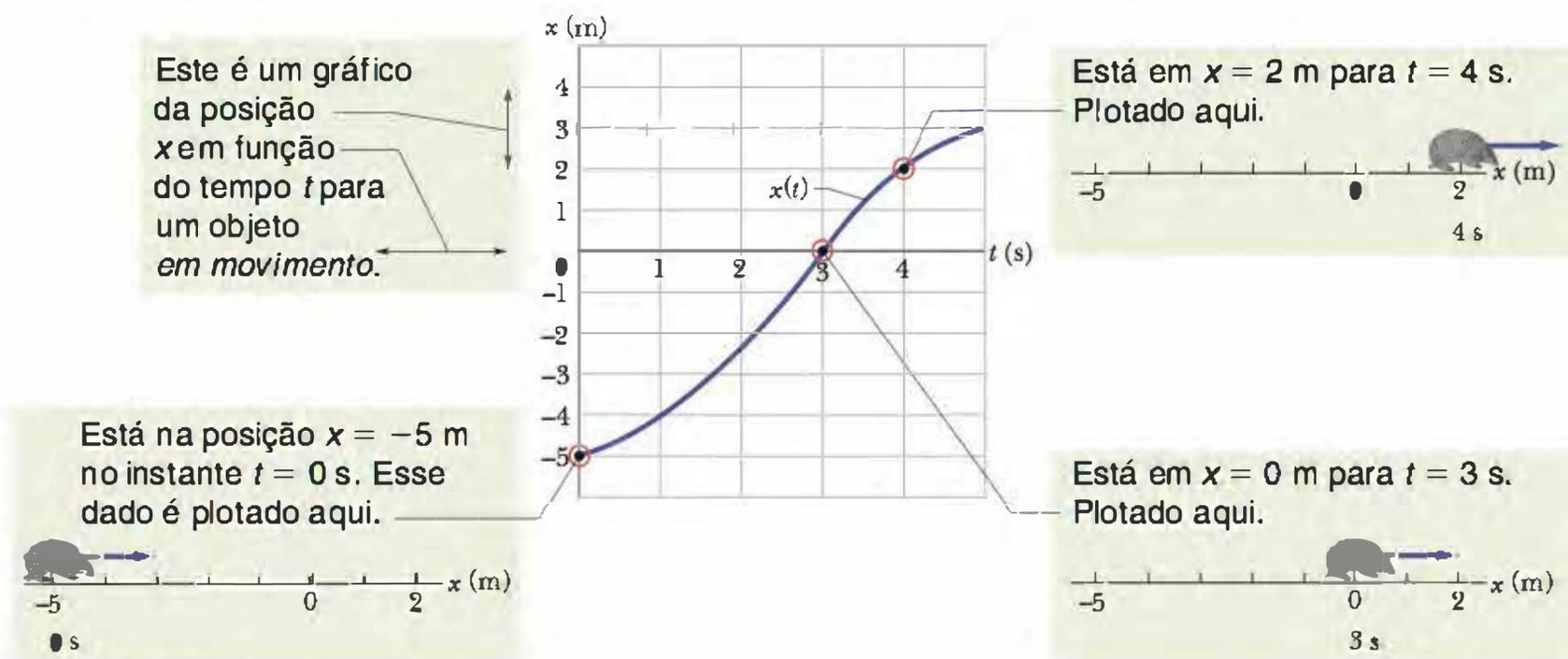
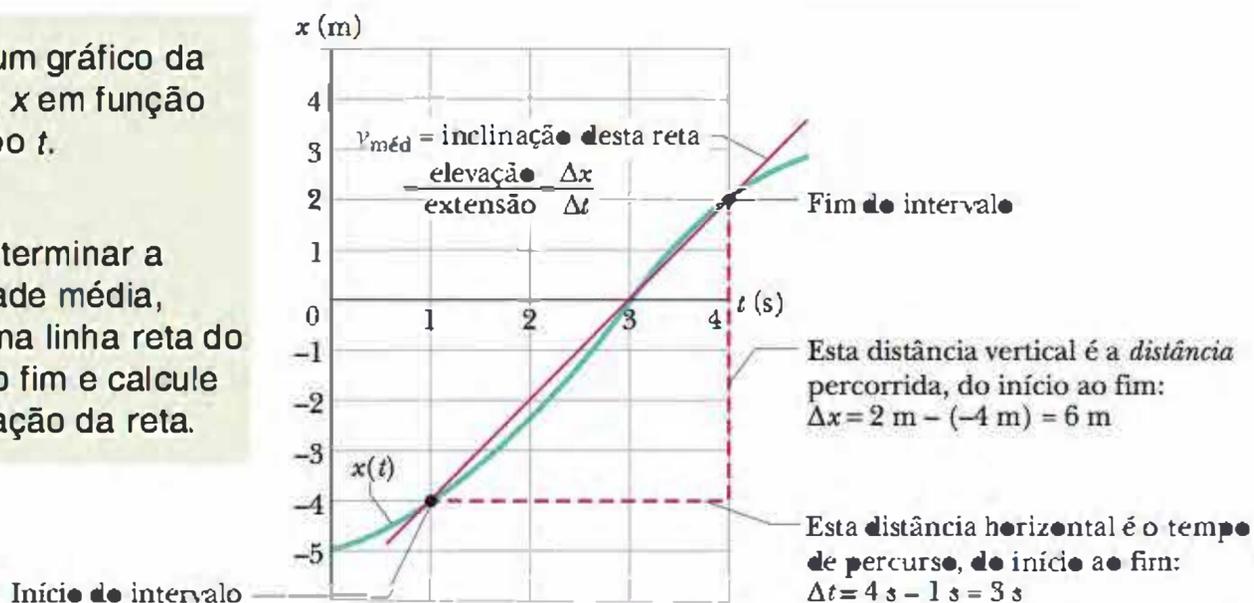



Figura 2-3 Gráfico de $x(t)$ para um tatu em movimento. Posições sucessivas do tatu também são mostradas para três instantes de tempo.

Figura 2-4 Cálculo da velocidade média entre $t = 1$ s e $t = 4$ s como a inclinação da reta que une os pontos sobre a curva $x(t)$ que correspondem a esses tempos.

direção e um sentido (também é uma grandeza vetorial). O módulo é valor absoluto da inclinação da reta. Um valor positivo de $v_{méd}$ (e da inclinação) significa que a reta está inclinada para cima da esquerda para a direita; um valor negativo de $v_{méd}$ (e da inclinação) significa que a reta está inclinada para baixo da esquerda para a direita. A velocidade média $v_{méd}$ tem sempre o mesmo sinal do deslocamento Δx porque Δt na Eq. 2-2 é sempre positivo.

A Fig. 2-4 mostra como determinar $v_{méd}$ na Fig. 2-3 para o intervalo de tempo de $t = 1$ s a $t = 4$ s. Traçamos a linha reta que une os pontos correspondentes ao início e ao final do intervalo de tempo considerado. Em seguida, calculamos a inclinação $\Delta x/\Delta t$ da linha reta. Para o intervalo de tempo dado, a velocidade média é

$$v_{méd} = \frac{6\text{ m}}{3\text{ s}} = 2\text{ m/s}.$$

A **velocidade escalar média** $s_{méd}$ é uma forma diferente de descrever "com que rapidez" uma partícula está se movendo. Enquanto a velocidade média envolve o deslocamento da partícula, Δx, a velocidade escalar média é definida em termos da distância total percorrida (o número de metros percorridos, por exemplo), independentemente da direção. Assim,

$$s_{méd} = \frac{\text{distância total}}{\Delta t}. \tag{2-3}$$

Como a definição de velocidade escalar média *não inclui* a direção e o sentido do movimento, ela não possui um sinal algébrico. Em alguns casos, $s_{méd}$ é igual (a não ser pela ausência de sinal) a $v_{méd}$. Entretanto, como é demonstrado no Exemplo 2-1, as duas velocidades podem ser bem diferentes.

Exemplo

Velocidade média de um carro velho

Depois de dirigir um carro em uma estrada retilínea por 8,4 km a 70 km/h, você para por falta de gasolina. Nos 30 min seguintes, você caminha por mais 2,0 km ao longo da estrada até chegar a um posto de gasolina.

(a) Qual foi o deslocamento total, do início da viagem até chegar ao posto de gasolina?

IDEIA-CHAVE

Suponha, por conveniência, que você se move no sentido positivo do eixo x, da posição inicial $x_1 = 0$ até a posição final x_2, no posto de gasolina. Essa segunda posição deve ser $x_2 = 8{,}4\text{ km} + 2{,}0\text{ km} = 10{,}4\text{ km}$. O deslocamento Δx ao longo do eixo x é a diferença entre a segunda posição e a primeira.

Cálculo De acordo com a Eq. 2-1, temos:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 10{,}4 \text{ km} - 0 = 10{,}4 \text{ km}. \quad \text{(Resposta)}$$

Assim, o deslocamento total é 10,4 km no sentido positivo do eixo x.

(b) Qual é o intervalo de tempo Δt entre o início da viagem e o instante em que você chega ao posto?

IDEIA-CHAVE

Já sabemos quanto tempo você passou caminhando, Δt_{cam} (0,50 h), mas não sabemos quanto tempo você passou dirigindo, Δt_{dir}. Sabemos, porém, que você viajou 8,4 km de carro a uma velocidade média $v_{méd,dir} = 70$ km/h. Esta velocidade média é igual à razão entre o deslocamento do carro e o intervalo de tempo correspondente a esse deslocamento.

Cálculos Em primeiro lugar, sabemos que

$$v_{méd,dir} = \frac{\Delta x_{dir}}{\Delta t_{dir}}.$$

Explicitando Δt_{dir} e substituindo os valores conhecidos, obtemos:

$$\Delta t_{dir} = \frac{\Delta x_{dir}}{v_{méd,dir}} = \frac{8{,}4 \text{ km}}{70 \text{ km/h}} = 0{,}12 \text{ h}.$$

Assim,

$$\Delta t = \Delta t_{dir} + \Delta t_{cam}$$
$$= 0{,}12 \text{ h} + 0{,}50 \text{ h} = 0{,}62 \text{ h}. \quad \text{(Resposta)}$$

(c) Qual é a velocidade média $v_{méd}$ do início da viagem até a chegada ao posto de gasolina? Determine a solução numericamente e graficamente.

IDEIA-CHAVE

De acordo com a Eq. 2-2, $v_{méd}$ *para todo o percurso* é a razão entre o deslocamento de 10,4 *para todo o percurso* e o intervalo de tempo de 0,62 h *para todo o percurso.*

Cálculo Nesse caso,

$$v_{méd} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10{,}4 \text{ km}}{0{,}62 \text{ h}}$$
$$= 16{,}8 \text{ km/h} \approx 17 \text{ km/h}. \quad \text{(Resposta)}$$

Para determinar $v_{méd}$ graficamente, traçamos o gráfico da função $x(t)$, como mostra a Fig. 2-5, onde os pontos de partida e chegada são a origem e o ponto assinalado como "Posto". A velocidade média é a inclinação da reta que une esses pontos, ou seja, $v_{méd}$ é a razão entre a *elevação* ($\Delta x = 10{,}4$ km) e o *curso* ($\Delta t = 0{,}62$ h), o que nos dá $v_{méd} = 16{,}8$ km/h.

(d) Suponha que para encher um bujão de gasolina, pagar e caminhar de volta para o carro você leva 45 min. Qual é a velocidade escalar média do início da viagem até o momento em que você chega de volta ao lugar onde deixou o carro?

IDEIA-CHAVE

A velocidade escalar média é a razão entre a distância total percorrida e o tempo gasto para percorrer essa distância.

Cálculo A distância total é 8,4 km + 2,0 km + 2,0 km = 12,4 km. O intervalo de tempo total é 0,12 h + 0,50 h + 0,75 h = 1,37 h. Assim, de acordo com a Eq. 2-3,

$$s_{méd} = \frac{12{,}4 \text{ km}}{1{,}37 \text{ h}} = 9{,}1 \text{ km/h}. \quad \text{(Resposta)}$$

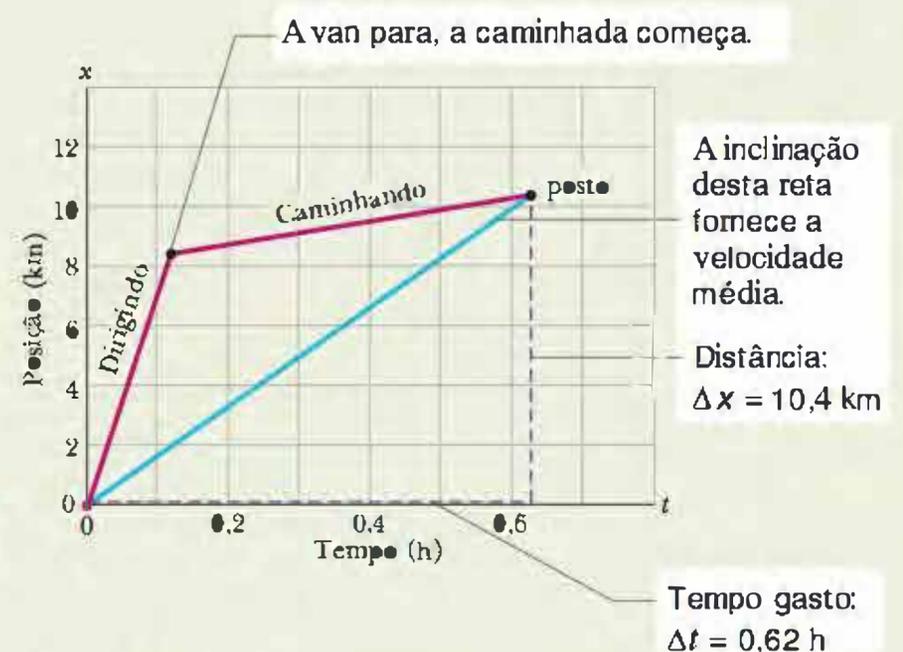



Figura 2-5 As retas "Dirigindo" e "Caminhando" são os gráficos da posição em função do tempo para os deslocamentos de carro e a pé. (O gráfico para o deslocamento a pé supõe uma caminhada com velocidade constante.) A inclinação da reta que liga a origem ao ponto "Posto" é a velocidade média para o percurso até o posto.

2-5 Velocidade Instantânea e Velocidade Escalar Instantânea

Vimos até agora duas formas de descrever a rapidez com a qual um objeto se move: a velocidade média e a velocidade escalar média, ambas medidas para um intervalo de tempo Δt. Entretanto, quando falamos em "rapidez", em geral estamos pensando na rapidez com a qual um objeto está se movendo em um certo instante, ou seja, na **velocidade instantânea** (ou, simplesmente, **velocidade**) v.

A velocidade em um dado instante é obtida a partir da velocidade média reduzindo o intervalo de tempo Δt até torná-lo próximo de zero. Quando Δt diminui, a velocidade média se aproxima cada vez mais de um valor limite, que é a velocidade instantânea:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \qquad (2\text{-}4)$$

Observe que v é a taxa com a qual a posição x está variando com o tempo em um dado instante, ou seja, v é a derivada de x em relação a t. Note também que v, em qualquer instante, é a inclinação da curva que representa a posição em função do tempo no instante considerado. A velocidade instantânea também é uma grandeza vetorial e, portanto, possui uma direção e um sentido.

Velocidade escalar instantânea, ou, simplesmente, **velocidade escalar**, é o módulo da velocidade, ou seja, a velocidade desprovida de qualquer indicação de direção. (*Atenção:* a velocidade escalar e a velocidade escalar média podem ser muito diferentes.) A velocidade escalar de um objeto que está se movendo a uma velocidade de +5 m/s é a mesma (5 m/s) que a de um objeto que está se movendo a uma velocidade de −5 m/s. O velocímetro do carro indica a velocidade escalar e não a velocidade, já que não mostra a direção e o sentido em que o carro está se movendo.

TESTE 2

As equações a seguir fornecem a posição $x(t)$ de uma partícula em quatro casos (em todas as equações, x está em metros, t em segundos e $t > 0$): (1) $x = 3t - 2$; (2) $x = -4t^2 - 2$; (3) $x = 2/t^2$; (4) $x = -2$. (a) Em que caso(s) a velocidade v da partícula é constante? (b) Em que caso(s) a velocidade v é no sentido negativo do eixo x?

Exemplo

Velocidade e inclinação da curva de x em função de t: elevador

A Fig. 2-6*a* mostra o gráfico $x(t)$ de um elevador que, depois de passar algum tempo parado, começa a se mover para cima (que tomamos como o sentido positivo de x) e depois para novamente. Plote $v(t)$.

IDEIA-CHAVE

Podemos determinar a velocidade em qualquer instante calculando a inclinação da curva de $x(t)$ nesse instante.

Cálculos A inclinação de $x(t)$, e também a velocidade, é zero nos intervalos de 0 a 1 s e de 9 s em diante, já que o elevador está parado nesses intervalos. Durante o intervalo *bc*, a inclinação é constante e diferente de zero, o que significa que o elevador se move com velocidade constante. A inclinação de $x(t)$ é dada por

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v = \frac{24\text{ m} - 4{,}0\text{ m}}{8{,}0\text{ s} - 3{,}0\text{ s}} = +4{,}0\text{ m/s}. \qquad (2\text{-}5)$$

O sinal positivo indica que o elevador está se movendo no sentido positivo de x. Esses intervalos (nos quais $v = 0$ e $v = 4$ m/s) estão plotados na Fig. 2-6*b*. Além disso, como o elevador começa a se mover a partir do repouso e depois reduz a velocidade até parar, v varia da forma indicada nos intervalos de 1 s a 3 s e de 8 s a 9 s. Assim, a Fig. 2-6*b* é o gráfico pedido. (A Fig. 2-6*c* será discutida na Seção 2-6.)

Dado um gráfico de $v(t)$ como a Fig. 2-6*b*, poderíamos "retroagir" para determinar a forma do gráfico de $x(t)$ correspondente (Fig. 2-6*a*). Entretanto, não conheceríamos os verdadeiros valores de x nos vários instantes de tempo, porque o gráfico de $v(t)$ contém informações apenas sobre as *variações* de x. Para determinar a variação de x em um intervalo dado, devemos, na linguagem do cálculo, calcular a área "sob a curva" no gráfico de $v(t)$ para esse intervalo. Assim, por exemplo, durante o intervalo de 3 s a 8 s, no qual o elevador tem uma velocidade de 4,0 m/s, a variação de x é

$$\Delta x = (4{,}0\text{ m/s})(8{,}0\text{ s} - 3{,}0\text{ s}) = +20\text{ m}. \qquad (2\text{-}6)$$

(Essa área é positiva porque a curva $v(t)$ está acima do eixo t.) A Fig. 2-6*a* mostra que x realmente aumenta de 20 m nesse intervalo. Entretanto, a Fig. 2-6*b* nada nos diz sobre os valores de x no início e no final do intervalo. Para isso, necessitamos de uma informação adicional, como o valor de x em um dado instante.

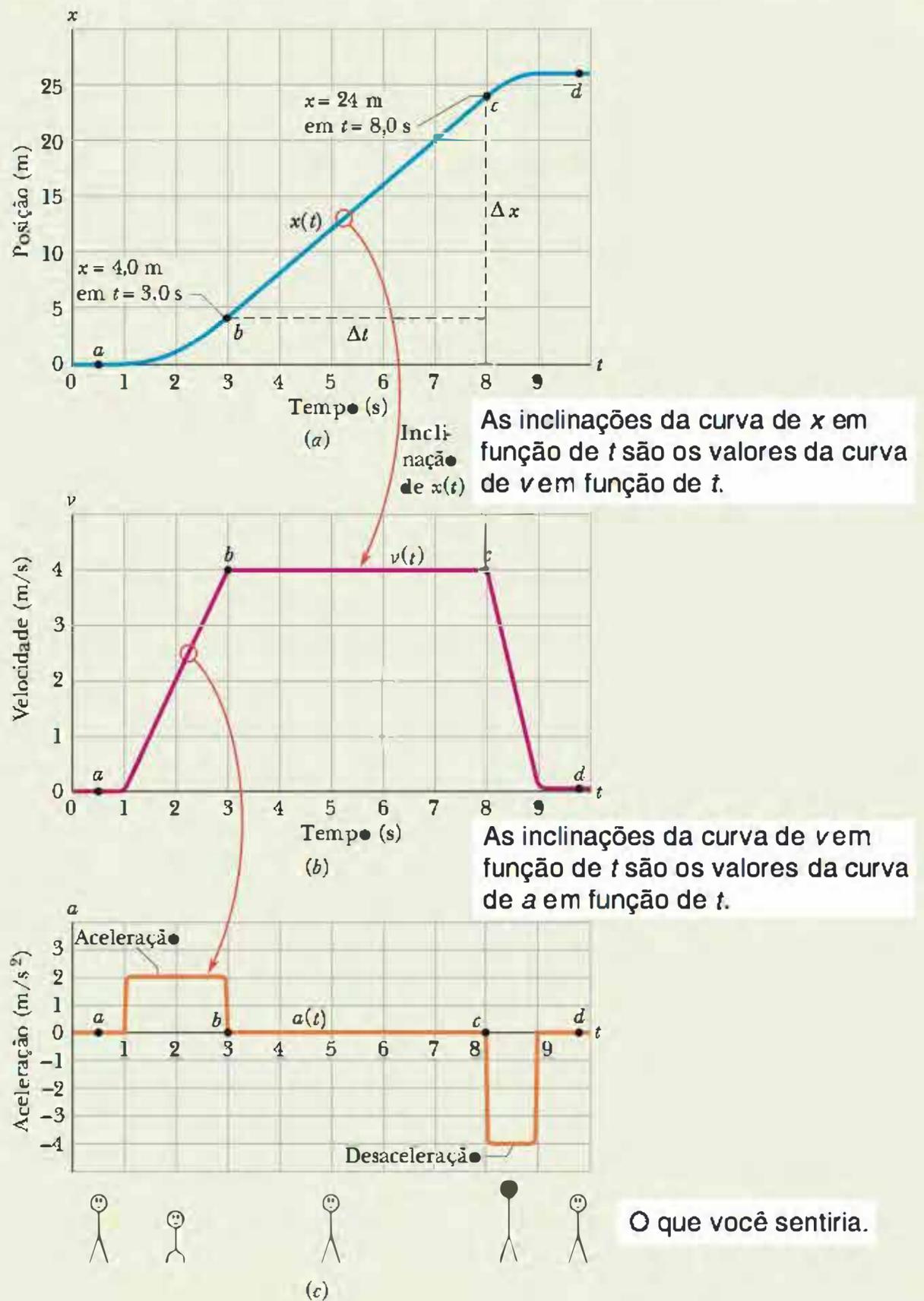



Figura 2-6 (*a*) A curva $x(t)$ de um elevador que se move para cima ao longo do eixo x. (*b*) A curva $v(t)$ do elevador. Observe que é a derivada da curva $x(t)$ ($v = dx/dt$). (*c*) A curva $a(t)$ do elevador, que é a derivada da curva $v(t)$ ($a = dv/dt$). As figuras na parte de baixo dão uma ideia de como um passageiro se sentiria durante as acelerações.

2-6 Aceleração

Quando a velocidade de uma partícula varia, diz-se que a partícula sofreu uma **aceleração** (ou foi acelerada). Para movimentos ao longo de um eixo, a **aceleração média** $a_{\text{méd}}$ em um intervalo de tempo Δt é

$$a_{\text{méd}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \tag{2-7}$$

onde a partícula tem uma velocidade v_1 no instante t_1 e uma velocidade v_2 no instante t_2. A **aceleração instantânea** (ou, simplesmente, **aceleração**) é dada por

$$a = \frac{dv}{dt}. \tag{2-8}$$

Em palavras, a aceleração de uma partícula em um dado instante é a taxa com a qual a velocidade está variando nesse instante. Graficamente, a aceleração em qualquer

Figura 2-7 O coronel J. P. Stapp em um trenó a jato cuja velocidade aumenta bruscamente (aceleração para fora do papel) e, em seguida, diminui bruscamente (aceleração para dentro do papel). (*Cortesia da Força Aérea dos Estados Unidos*)

ponto é a inclinação da curva de $v(t)$ nesse ponto. Podemos combinar a Eq. 2-8 com a Eq. 2-4 e escrever

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{2-9}$$

Em palavras, a aceleração de uma partícula em um dado instante é a derivada segunda da posição $x(t)$ em relação ao tempo nesse instante.

A unidade de aceleração no SI é o metro por segundo ao quadrado, m/s^2. Outras unidades são usadas em alguns problemas, mas todas estão na forma de comprimento/$tempo^2$. Da mesma forma que o deslocamento e a velocidade, a aceleração possui um módulo, uma direção e um sentido (também é uma grandeza vetorial). O sinal algébrico representa o sentido em relação a um eixo, ou seja, uma aceleração com um valor positivo tem o sentido positivo de um eixo, enquanto uma aceleração com valor negativo tem o sentido negativo.

A Fig. 2-6 mostra os gráficos da posição, velocidade e aceleração do elevador do exemplo. Compare a curva de $a(t)$ com a curva de $v(t)$; cada ponto na curva de $a(t)$ corresponde à derivada (inclinação) da curva de $v(t)$ no mesmo instante de tempo. Quando v é constante (com o valor de 0 ou 4 m/s), a derivada é nula e, portanto, a aceleração é nula. Quando o elevador começa a se mover, a curva de $v(t)$ tem derivada positiva (a inclinação é positiva), o que significa que $a(t)$ é positiva. Quando o elevador reduz a velocidade até parar, a derivada e a inclinação da curva de $v(t)$ são negativas, ou seja, $a(t)$ é negativa.

Compare as inclinações da curva de $v(t)$ nos dois períodos de aceleração. A inclinação associada à redução de velocidade do elevador (ou seja, à "desaceleração") é maior porque o elevador para na metade do tempo que levou para atingir uma velocidade constante. Uma inclinação maior significa que o módulo da desaceleração é maior que o da aceleração, como mostra a Fig. 2-6*c*.

As sensações que o leitor teria se estivesse no elevador da Fig. 2-6 estão indicadas pelos bonequinhos que aparecem na parte inferior da figura. Quando o elevador acelera, você se sente como se estivesse sendo empurrado para baixo; mais tarde, quando o elevador freia até parar, tem a impressão de que está sendo puxado para cima. Entre esses dois intervalos, não sente nada de especial. Em outras palavras, nosso corpo reage a acelerações (é um acelerômetro), mas não a velocidades (não é um velocímetro). Quando estamos viajando de carro a 90 km/h ou viajando de avião a 900 km/h, não temos nenhuma sensação de movimento. Entretanto, se o carro ou avião muda bruscamente de velocidade, percebemos imediatamente a mudança e podemos até ficar assustados. Boa parte da emoção que sentimos quando andamos de montanha-russa se deve às mudanças súbitas de velocidade às quais somos submetidos (pagamos pela aceleração, não pela velocidade). Um exemplo mais extremo aparece nas fotografias da Fig. 2-7, tiradas enquanto um trenó a jato era rapidamente acelerado sobre trilhos e depois freado bruscamente até parar.

Grandes acelerações são às vezes expressas em unidades g, definidas da seguinte forma:

$$1g = 9{,}8 \text{ m/s}^2 \qquad \text{(unidade de } g\text{)}. \tag{2-10}$$

(Como vamos discutir na Seção 2-9, g é o módulo da aceleração de um objeto em queda livre nas proximidades da superfície da Terra.) Uma montanha-russa submete os passageiros a uma aceleração de até $3g$, o equivalente a $(3)(9{,}8 \text{ m/s}^2)$ ou cerca de 29 m/s^2, um valor mais do que suficiente para justificar o preço do passeio.

Na linguagem comum, o sinal de uma aceleração tem um significado não científico: aceleração positiva significa que a velocidade do objeto está aumentando e aceleração negativa significa que a velocidade está diminuindo (o objeto está desacelerando). Neste livro, porém, o sinal de uma aceleração indica um sentido e não se a velocidade do objeto está aumentando ou diminuindo. Assim, por exemplo, se um carro com uma velocidade inicial $v = -25$ m/s é freado até parar em 5,0 s, então $a_{méd} = +5{,}0 \text{ m/s}^2$. A aceleração é *positiva*, mas a velocidade escalar do carro diminuiu. A razão está na diferença de sinais: o sentido da aceleração é contrário ao da velocidade.

A forma apropriada de interpretar os sinais é a seguinte:

Se os sinais da velocidade e da aceleração de uma partícula são iguais, a velocidade escalar da partícula aumenta. Se os sinais são opostos, a velocidade escalar diminui.

TESTE 3

Um marsupial se move ao longo do eixo x. Qual é o sinal da aceleração do animal se está se movendo (a) no sentido positivo com velocidade escalar crescente; (b) no sentido positivo com velocidade escalar decrescente; (c) no sentido negativo com velocidade escalar crescente; (d) no sentido negativo com velocidade escalar decrescente?

Exemplo

Aceleração e dv/dt

A posição de uma partícula no eixo x da Fig. 2-1 é dada por

$$x = 4 - 27t + t^3,$$

com x em metros e t em segundos.

(a) Como a posição x varia com o tempo t, a partícula está em movimento. Determine a função velocidade $v(t)$ e a função aceleração $a(t)$ da partícula.

IDEIAS-CHAVE

(1) Para obter a função velocidade $v(t)$, derivamos a função posição $x(t)$ em relação ao tempo. (2) Para obter a função aceleração $a(t)$, derivamos a função velocidade $v(t)$ em relação ao tempo.

Cálculos Derivando a função posição, obtemos

$$v = -27 + 3t^2, \qquad \text{(Resposta)}$$

com v em metros por segundo. Derivando a função velocidade, obtemos

$$a = +6t, \qquad \text{(Resposta)}$$

com a em metros por segundo ao quadrado.

(b) Existe algum instante para o qual $v = 0$?

Cálculo Fazendo $v(t) = 0$, obtemos

$$0 = -27 + 3t^2,$$

e, portanto,

$$t = \pm 3 \text{ s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, a velocidade é nula tanto 3 s antes como 3 s após o instante $t = 0$.

(c) Descreva o movimento da partícula para $t \geq 0$.

Raciocínio Precisamos examinar as expressões de $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$.

Em $t = 0$, a partícula está em $x(0) = +4$ m e está se movendo com velocidade $v(0) = -27$ m/s, ou seja, no sentido negativo do eixo x. A aceleração é $a(0) = 0$ porque, nesse instante, a velocidade da partícula não está variando.

Para $0 < t < 3$ s, a partícula ainda possui velocidade negativa e, portanto, continua a se mover no sentido negativo. Entretanto, a aceleração não mais é igual a zero e sim crescente e positiva. Como os sinais da velocidade e da aceleração são opostos, o módulo da velocidade da partícula deve estar diminuindo.

De fato, já sabemos que a partícula para momentaneamente em $t = 3$ s. Nesse instante, a partícula se encontra na maior distância à esquerda da origem da Fig. 2-1. Fazendo $t = 3$ s na expressão de $x(t)$, descobrimos que a posição da partícula nesse instante é $x = -50$ m. A aceleração é ainda positiva.

Para $t > 3$ s, a partícula se move para a direita sobre o eixo. A aceleração permanece positiva e aumenta progressivamente em módulo. A velocidade é agora positiva e o módulo da velocidade também aumenta progressivamente.

2-7 Aceleração Constante: Um Caso Especial

Em muitos tipos de movimento, a aceleração é constante ou aproximadamente constante. Assim, por exemplo, você pode acelerar um carro a uma taxa aproximadamente constante quando a luz de um sinal de trânsito muda de vermelho para verde. Nesse caso, os gráficos da posição, velocidade e aceleração do carro se assemelhariam aos da Fig. 2-8. [Note que $a(t)$ na Fig. 2-8*c* é constante, o que requer que $v(t)$ na Fig. 2-8*b* tenha uma inclinação constante.] Mais tarde, quando você freia o carro até parar, a aceleração (ou desaceleração, na linguagem comum) pode também ser aproximadamente constante.

Esses casos são tão frequentes que foi formulado um conjunto especial de equações para lidar com eles. Uma forma de obter essas equações é apresentada nesta seção; uma segunda forma será apresentada na seção seguinte. Nessas duas seções e mais tarde, quando você trabalhar na solução dos problemas, lembre-se de que *essas soluções são válidas apenas quando a aceleração é constante (ou em situações nas quais a aceleração pode ser considerada aproximadamente constante)*.

Quando a aceleração é constante, a aceleração média e a aceleração instantânea são iguais e podemos escrever a Eq. 2-7, com algumas mudanças de notação, na forma

$$a = a_{méd} = \frac{v - v_0}{t - 0},$$

onde v_0 é a velocidade no instante $t = 0$ e v é a velocidade em um instante de tempo posterior t. Explicitando v, temos:

$$v = v_0 + at. \qquad \text{(2-11)}$$

Como verificação, note que esta equação se reduz a $v = v_0$ para $t = 0$, como era de se esperar. Como verificação adicional, vamos calcular a derivada da Eq. 2-11. O resultado é $dv/dt = a$, o que corresponde à definição de a. A Fig. 2-8*b* mostra o gráfico da Eq. 2-11, a função $v(t)$; a função é linear e, portanto, o gráfico é uma linha reta.

De maneira análoga, podemos escrever a Eq. 2-2 (com algumas mudanças de notação) na forma

$$v_{méd} = \frac{x - x_0}{t - 0}$$

o que nos dá

$$x = x_0 + v_{méd}t, \tag{2-12}$$

onde x_0 é a posição da partícula em $t = 0$ e $v_{méd}$ é a velocidade média entre $t = 0$ e um instante de tempo posterior t.

Para a função velocidade linear da Eq. 2-11, a velocidade *média* em qualquer intervalo de tempo (de $t = 0$ a um instante posterior t, digamos) é a média aritmética da velocidade no início do intervalo (v_0) com a velocidade no final do intervalo (v). Para o intervalo de $t = 0$ até um instante posterior t, portanto, a velocidade média é

$$v_{méd} = \tfrac{1}{2}(v_0 + v). \tag{2-13}$$

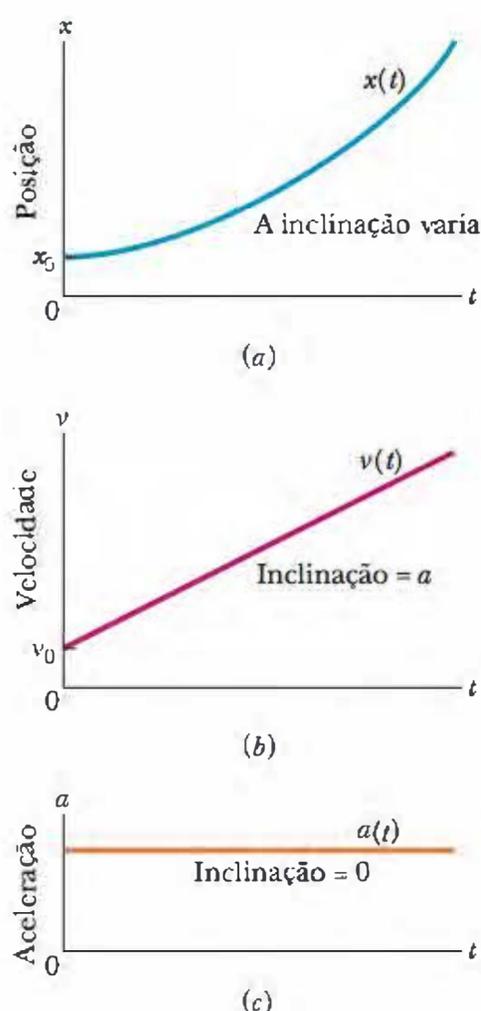
Substituindo v pelo seu valor, dado pela Eq. 2-11, obtemos, agrupando os termos,

$$v_{méd} = v_0 + \tfrac{1}{2}at. \tag{2-14}$$

Finalmente, substituindo a Eq. 2-14 na Eq. 2-12, obtemos:

$$x - x_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2. \tag{2-15}$$

Como verificação, note que esta equação se reduz a $x = x_0$ para $t = 0$, como era de se esperar. Como verificação adicional, vamos calcular a derivada da Eq. 2-15. O resultado é a Eq. 2-11, como era de se esperar. A Fig. 2-8*a* mostra o gráfico da Eq. 2-15; como a função é do segundo grau, o gráfico não é uma linha reta.

As Eqs. 2-11 e 2-15 são as *equações básicas do movimento com aceleração constante*; podem ser usadas para resolver qualquer problema deste livro que envolva uma aceleração constante. Entretanto, é possível deduzir outras equações que podem ser úteis em situações específicas. Observe que um problema com aceleração constante pode envolver até cinco grandezas: $x - x_0$, v, t, a e v_0. Normalmente, uma dessas grandezas *não está envolvida no problema, nem como dado, nem como incógnita*. São fornecidas três das grandezas restantes e o problema consiste em determinar a quarta.

As inclinações da curva de posição são plotadas na curva de velocidade.

A inclinação do gráfico de velocidade é plotada no gráfico de aceleração.

Figura 2-8 (*a*) A posição $x(t)$ de uma partícula que se move com aceleração constante. (*b*) A velocidade da partícula, $v(t)$, dada em cada ponto pela inclinação da curva de $x(t)$. (*c*) A aceleração (constante) da partícula, igual à inclinação (constante) da curva de $v(t)$.

Tabela 2-1

Equações do Movimento com Aceleração Constante[a]

Número da Equação	Equação	Grandeza que falta
2-11	$v = v_0 + at$	$x - x_0$
2-15	$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	v
2-16	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t
2-17	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	a
2-18	$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	v_0

[a]Certifique-se de que a aceleração é constante antes de usar as equações desta tabela.

As Eqs. 2-11 e 2-15 contêm, cada uma, quatro dessas grandezas, mas não as mesmas quatro. Na Eq. 2-11, a grandeza ausente é o deslocamento $x - x_0$; na Eq. 2-15, é a velocidade v. As duas equações também podem ser combinadas de três maneiras diferentes para produzir três novas equações, cada uma das quais envolvendo quatro grandezas diferentes. Em primeiro lugar, podemos eliminar t para obter

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0). \tag{2-16}$$

Esta equação é útil se não conhecemos t e não precisamos determinar o seu valor. Em segundo lugar, podemos eliminar a aceleração a, combinando as Eqs. 2-11 e 2-15 para obter uma equação em que a não aparece:

$$x - x_0 = \tfrac{1}{2}(v_0 + v)t. \tag{2-17}$$

Finalmente, podemos eliminar v_0, obtendo

$$x - x_0 = vt - \tfrac{1}{2}at^2. \tag{2-18}$$

Note a diferença sutil entre esta equação e a Eq. 2-15. Uma envolve a velocidade inicial v_0; a outra envolve a velocidade v no instante t.

A Tabela 2-1 mostra as equações básicas do movimento com aceleração constante (Eqs. 2-11 e 2-15), assim como as equações especiais que deduzimos. Para resolver um problema simples envolvendo aceleração constante, em geral é possível usar uma equação da lista (*se* você puder consultar a lista). Escolha uma equação para a qual a única variável desconhecida é a variável pedida no problema. Um plano mais simples é memorizar apenas as Eqs. 2-11 e 2-15 e montar com elas um sistema de equações, caso isso seja necessário.

TESTE 4

As equações a seguir fornecem a posição $x(t)$ de uma partícula em quatro casos: (1) $x = 3t - 4$; (2) $x = -5t^3 + 4t^2 + 6$; (3) $x = 2/t^2 - 4/t$; (4) $x = 5t^2 - 3$. Em que caso(s) as equações da Tabela 2-1 podem ser aplicadas?

Exemplo

Aceleração constante: gráfico de *v* em função de *x*

A Fig. 2-9 mostra a velocidade v de uma partícula em função da posição enquanto a partícula se move ao longo do eixo x com aceleração constante. Qual é a velocidade da partícula no ponto $x = 0$?

IDEIA-CHAVE

Podemos usar as equações de aceleração constante; em particular, podemos usar a Eq. 2-16 [$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$] que relaciona a velocidade à posição.

Primeira tentativa Normalmente, estamos interessados em usar uma equação que contenha a variável pedida. Na Eq. 2-16, podemos dizer que $x_0 = 0$ e que v_0 é a variável pedida. Para determinar o valor de v_0, precisamos conhecer os valores de v e x no mesmo ponto. O gráfico permite determinar dois pares de valores para v e x: (1) $v = 8$ m/s e $x = 20$ m; (2) $v = 0$ e $x = 70$ m. Usando o primeiro par, podemos escrever:

$$(8\text{ m/s})^2 = v_0^2 + 2a(20\text{ m} - 0). \tag{2-19}$$

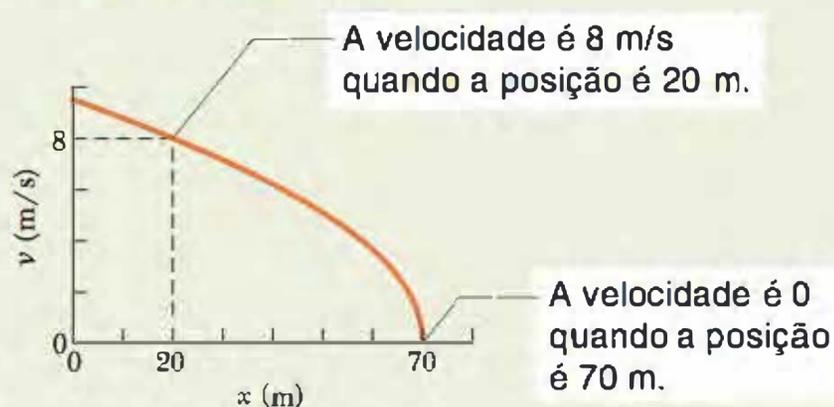



Figura 2-9 Velocidade de uma partícula em função da posição.

Entretanto, não podemos usar a Eq. 2-19 para calcular o valor de v_0, já que não conhecemos o valor de a.

Segunda tentativa Em vez de tentarmos determinar diretamente a variável pedida, vamos aplicar a Eq. 2-16 aos dois pontos conhecidos, chamando de $v_0 = 8$ m/s e $x_0 =$

20 m o primeiro par de valores e de $v = 0$ m/s e $x = 70$ m o segundo par. Nesse caso, podemos escrever:

$$(0\ \text{m/s})^2 = (8\ \text{m/s})^2 + 2a(70\ \text{m} - 20\ \text{m}),$$

o que nos dá $a = -0{,}64$ m/s^2. Substituindo este valor na Eq. 2-19 e explicitando v_0 (a velocidade associada à posição $x = 0$), obtemos

$$v_0 = 9{,}5\ \text{m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Comentário Alguns problemas envolvem uma equação que inclui a variável pedida. Os problemas mais difíceis são aqueles que exigem o uso de uma equação que *não* inclui a variável pedida, mas fornece um valor necessário para determiná-la. Às vezes, esse tipo de abordagem exige *coragem*, pois se trata de uma solução indireta. Entretanto, se o leitor aprimorar sua técnica resolvendo muitos tipos de problemas, esse tipo de abordagem exigirá uma dose cada vez menor de coragem e poderá até mesmo tornar-se óbvio. A solução de qualquer problema, seja físico ou social, requer uma certa dose de prática.

2-8 Mais sobre Aceleração Constante*

As duas primeiras equações da Tabela 2-1 são as equações básicas a partir das quais as outras podem ser deduzidas. Essas duas equações podem ser obtidas por integração da aceleração com a condição de que a seja uma constante. Para obter a Eq. 2-11, escrevemos a definição de aceleração (Eq. 2-8) na forma

$$dv = a\,dt.$$

Em seguida, escrevemos a *integral indefinida* (ou *antiderivada*) nos dois lados da equação:

$$\int dv = \int a\,dt.$$

Como a aceleração a é constante, pode ser colocada do lado de fora do sinal de integração. Nesse caso, temos:

$$\int dv = a \int dt$$

ou

$$v = at + C. \qquad \text{(2-20)}$$

Para determinar a constante de integração C, fazemos $t = 0$, instante no qual $v = v_0$. Substituindo esses valores na Eq. 2-20 (que é válida para qualquer valor de t, incluindo $t = 0$), obtemos

$$v_0 = (a)(0) + C = C.$$

Substituindo este valor na Eq. 2-20, obtemos a Eq. 2-11.

Para demonstrar a Eq. 2-15, escrevemos a definição de velocidade (Eq. 2-4) na forma

$$dx = v\,dt$$

e integramos ambos os membros desta equação para obter

$$\int dx = \int v\,dt.$$

Substituindo v pelo seu valor, dado pela Eq. 2-11, temos:

$$\int dx = \int (v_0 + at)\,dt.$$

*Esta seção se destina a alunos que conhecem cálculo integral.

Como v_0 e a são constantes, podemos escrever

$$\int dx = v_0 \int dt + a \int t\, dt.$$

Integrando, obtemos

$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 + C', \qquad (2\text{-}21)$$

onde C' é outra constante de integração. No instante $t = 0$, temos $x = x_0$. Substituindo esses valores na Eq. 2-21, obtemos $x_0 = C'$. Substituindo C' por x_0 na Eq. 2-21, obtemos a Eq. 2-15.

2-9 Aceleração em Queda Livre

Se o leitor arremessasse um objeto para cima ou para baixo e pudesse de alguma forma eliminar o efeito do ar sobre o movimento, observaria que o objeto sofre uma aceleração constante para baixo, conhecida como **aceleração em queda livre**, cujo módulo é representado pela letra g. O valor dessa aceleração não depende das características do objeto, como massa, densidade e forma; é a mesma para todos os objetos.

A Fig. 2-10 mostra dois exemplos de aceleração em queda livre através de uma série de fotos estroboscópicas de uma pena e de uma maçã. Enquanto esses objetos caem, sofrem uma aceleração para baixo, que nos dois casos é igual a g. Assim, suas velocidades aumentam com a mesma taxa e eles caem juntos.

O valor de g varia ligeiramente com a latitude e com a altitude. Ao nível do mar e em latitudes médias, o valor é 9,8 m/s², que é o valor que o leitor deve usar como número exato nos problemas deste livro, a menos que seja dito o contrário.

As equações de movimento da Tabela 2-1 para aceleração constante também se aplicam à queda livre nas proximidades da superfície da Terra, ou seja, se aplicam a um objeto que esteja descrevendo uma trajetória vertical, para cima ou para baixo, contanto que os efeitos do ar possam ser desprezados. Observe, porém, que, no caso da queda livre, (1) a direção do movimento é ao longo de um eixo y vertical e não ao longo de um eixo x horizontal, com o sentido positivo de y apontando para cima (isto será importante em capítulos subsequentes, em que examinaremos movimentos simultâneos nas direções horizontal e vertical); (2) a aceleração em queda livre é negativa, ou seja, para baixo, em direção ao centro da Terra, e, portanto, tem o valor g nas equações.

A aceleração em queda livre nas proximidades da superfície da Terra é $a = -g = -9{,}8\ \text{m/s}^2$ e o *módulo* da aceleração é $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$. Não substitua g por $-9{,}8\ \text{m/s}^2$ (e sim por $9{,}8\ \text{m/s}^2$).

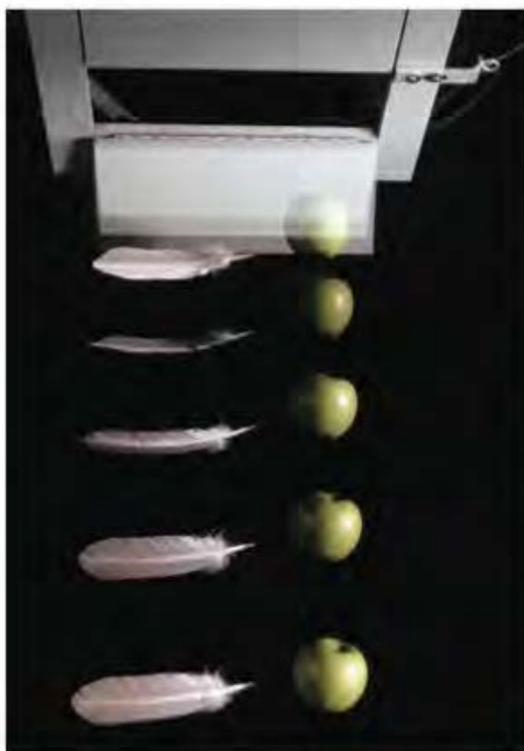



Figura 2-10 Uma pena e uma maçã em queda livre no vácuo sofrem a mesma aceleração g, que aumenta a distância entre imagens sucessivas. Na ausência de ar, a pena e a maçã caem juntas. *(Jim Sugar/Corbis Images)*

Suponha que você arremesse um tomate verticalmente para cima com uma velocidade inicial (positiva) v_0 e o apanhe quando volta ao nível inicial. Durante a *trajetória em queda livre* (do instante imediatamente após o lançamento ao instante imediatamente antes de ser apanhado), as equações da Tabela 2-1 se aplicam ao movimento do tomate. A aceleração é sempre $a = -g = -9{,}8\ \text{m/s}^2$, negativa e, portanto, dirigida para baixo. A velocidade, entretanto, varia, como mostram as Eqs. 2-11 e 2-16: na subida, a velocidade é positiva e o módulo diminui até se tornar momentaneamente igual a zero. Nesse instante, o tomate atinge a altura máxima. Na descida, o módulo da velocidade (agora negativa) cresce.

TESTE 5

(a) Se você arremessa uma bola verticalmente para cima, qual é o sinal do deslocamento da bola durante a subida, desde o ponto inicial até o ponto mais alto da trajetória? (b) Qual é o sinal do deslocamento durante a descida, desde o ponto mais alto da trajetória até o ponto inicial? (c) Qual é a aceleração da bola no ponto mais alto da trajetória?

Exemplo

Tempo de percurso de uma bola de beisebol lançada verticalmente

Na Fig. 2-11, um lançador arremessa uma bola de beisebol para cima ao longo do eixo y, com uma velocidade inicial de 12 m/s.

(a) Quanto tempo a bola leva para atingir a altura máxima?

IDEIAS-CHAVE

(1) Entre o instante em que a bola é lançada e o instante em que volta ao ponto de partida, sua aceleração é a aceleração em queda livre, $a = -g$. Como a aceleração é constante, podemos usar as equações da Tabela 2-1. (2) A velocidade v no instante em que a bola atinge a altura máxima é 0.

Figura 2-11 Um lançador arremessa uma bola de beisebol para cima. As equações de queda livre se aplicam tanto a objetos que estão subindo como a objetos que estão caindo, desde que a influência do ar possa ser desprezada.

Cálculo Como conhecemos v, a e a velocidade inicial $v_0 = 12$ m/s e estamos interessados em determinar o valor de t, escolhemos a Eq. 2-11, que contém essas quatro variáveis. Explicitando t, obtemos:

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 12 \text{ m/s}}{-9{,}8 \text{ m/s}^2} = 1{,}2 \text{ s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a altura máxima alcançada pela bola em relação ao ponto de lançamento?

Cálculo Podemos tomar o ponto de lançamento da bola como $y_0 = 0$. Nesse caso, podemos escrever a Eq. 2-16 com y no lugar de x, fazer $y - y_0 = y$ e $v = 0$ (na altura máxima) e explicitar y. O resultado é

$$y = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - (12 \text{ m/s})^2}{2(-9{,}8 \text{ m/s}^2)} = 7{,}3 \text{ m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(c) Quanto tempo a bola leva para atingir um ponto 5,0 m acima do ponto inicial?

Cálculos Como conhecemos v_0, $a = -g$ e o deslocamento $y - y_0 = 5{,}0$ m e queremos determinar t, escolhemos a Eq. 2-15. Substituindo x por y e fazendo $y_0 = 0$, obtemos

$$y = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2,$$

ou

$$5{,}0 \text{ m} = (12 \text{ m/s})t - (\tfrac{1}{2})(9{,}8 \text{ m/s}^2)t^2.$$

Omitindo temporariamente as unidades (depois de observar que são coerentes), podemos escrever esta equação na forma

$$4{,}9t^2 - 12t + 5{,}0 = 0.$$

Resolvendo esta equação do segundo grau, obtemos

$$t = 0{,}53 \text{ s} \quad \text{e} \quad t = 1{,}9 \text{ s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Existem dois tempos possíveis! Isso na verdade não chega a ser uma surpresa, pois a bola passa duas vezes pelo ponto $y = 5{,}0$ m, uma vez na subida e outra na descida.

2-10 Integração de Gráficos em Análise de Movimento

Quando temos o gráfico da aceleração de um objeto em função do tempo, podemos integrar o gráfico para obter a velocidade do objeto em qualquer instante dado. Como a aceleração a é definida em termos da velocidade como $a = dv/dt$, o Teorema Fundamental do Cálculo nos diz que

$$v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} a\, dt. \qquad (2\text{-}22)$$

O lado direito desta equação é uma integral definida (fornece um resultado numérico em vez de uma função), v_0 é a velocidade no instante t_0 e v_1 é a velocidade em

Exemplo

Tempo de percurso de uma bola de beisebol lançada verticalmente

Na Fig. 2-11, um lançador arremessa uma bola de beisebol para cima ao longo do eixo y, com uma velocidade inicial de 12 m/s.

(a) Quanto tempo a bola leva para atingir a altura máxima?

IDEIAS-CHAVE

(1) Entre o instante em que a bola é lançada e o instante em que volta ao ponto de partida, sua aceleração é a aceleração em queda livre, $a = -g$. Como a aceleração é constante, podemos usar as equações da Tabela 2-1. (2) A velocidade v no instante em que a bola atinge a altura máxima é 0.

Figura 2-11 Um lançador arremessa uma bola de beisebol para cima. As equações de queda livre se aplicam tanto a objetos que estão subindo como a objetos que estão caindo, desde que a influência do ar possa ser desprezada.

Cálculo Como conhecemos v, a e a velocidade inicial $v_0 = 12$ m/s e estamos interessados em determinar o valor de t, escolhemos a Eq. 2-11, que contém essas quatro variáveis. Explicitando t, obtemos:

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 12\text{ m/s}}{-9{,}8\text{ m/s}^2} = 1{,}2\text{ s}. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a altura máxima alcançada pela bola em relação ao ponto de lançamento?

Cálculo Podemos tomar o ponto de lançamento da bola como $y_0 = 0$. Nesse caso, podemos escrever a Eq. 2-16 com y no lugar de x, fazer $y - y_0 = y$ e $v = 0$ (na altura máxima) e explicitar y. O resultado é

$$y = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - (12\text{ m/s})^2}{2(-9{,}8\text{ m/s}^2)} = 7{,}3\text{ m}. \quad \text{(Resposta)}$$

(c) Quanto tempo a bola leva para atingir um ponto 5,0 m acima do ponto inicial?

Cálculos Como conhecemos v_0, $a = -g$ e o deslocamento $y - y_0 = 5{,}0$ m e queremos determinar t, escolhemos a Eq. 2-15. Substituindo x por y e fazendo $y_0 = 0$, obtemos

$$y = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2,$$

ou

$$5{,}0\text{ m} = (12\text{ m/s})t - (\tfrac{1}{2})(9{,}8\text{ m/s}^2)t^2.$$

Omitindo temporariamente as unidades (depois de observar que são coerentes), podemos escrever esta equação na forma

$$4{,}9t^2 - 12t + 5{,}0 = 0.$$

Resolvendo esta equação do segundo grau, obtemos

$$t = 0{,}53\text{ s} \quad \text{e} \quad t = 1{,}9\text{ s}. \quad \text{(Resposta)}$$

Existem dois tempos possíveis! Isso na verdade não chega a ser uma surpresa, pois a bola passa duas vezes pelo ponto $y = 5{,}0$ m, uma vez na subida e outra na descida.

2-10 Integração de Gráficos em Análise de Movimento

Quando temos o gráfico da aceleração de um objeto em função do tempo, podemos integrar o gráfico para obter a velocidade do objeto em qualquer instante dado. Como a aceleração a é definida em termos da velocidade como $a = dv/dt$, o Teorema Fundamental do Cálculo nos diz que

$$v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} a\, dt. \quad (2\text{-}22)$$

O lado direito desta equação é uma integral definida (fornece um resultado numérico em vez de uma função), v_0 é a velocidade no instante t_0 e v_1 é a velocidade em

um instante posterior t_1. A integral definida pode ser calculada a partir do gráfico de $a(t)$, como na Fig. 2-12a. Em particular,

$$\int_{t_0}^{t_1} a\,dt = \begin{pmatrix}\text{área entre a curva de aceleração}\\ \text{e o eixo dos tempos, de } t_0 \text{ a } t_1\end{pmatrix}. \quad (2\text{-}23)$$

Se a unidade de aceleração é 1 m/s² e a unidade de tempo é 1 s, a unidade de área no gráfico é

$$(1\ \text{m/s}^2)(1\ \text{s}) = 1\ \text{m/s},$$

que é (como devia ser) uma unidade de velocidade. Quando a curva da aceleração está acima do eixo do tempo, a área é positiva; quando a curva está abaixo do eixo do tempo, a área é negativa.

Da mesma forma, como a velocidade v é definida em termos da posição x como $v = dx/dt$,

$$x_1 - x_0 = \int_{t_0}^{t_1} v\,dt, \quad (2\text{-}24)$$

onde x_0 é a posição no instante t_0 e x_1 é a posição no instante t_1. A integral definida no lado direito da Eq. 2-24 pode ser calculada a partir do gráfico de $v(t)$, como mostra a Fig. 2-12b. Em particular,

$$\int_{t_0}^{t_1} v\,dt = \begin{pmatrix}\text{área entre a curva de velocidade}\\ \text{e o eixo dos tempos, de } t_0 \text{ a } t_1\end{pmatrix}. \quad (2\text{-}25)$$

Se a unidade de velocidade é 1 m/s e a unidade de tempo é 1 s, a unidade de área no gráfico é

$$(1\ \text{m/s})(1\ \text{s}) = 1\ \text{m},$$

que é (como devia ser) uma unidade de posição e deslocamento. A questão de essa área ser positiva ou negativa é determinada da mesma forma que para a curva $a(t)$ da Fig. 2-12a.

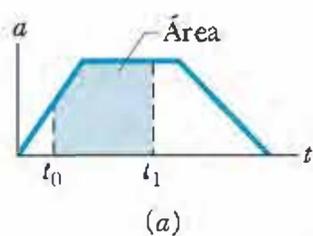
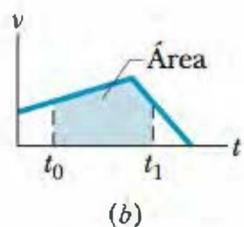



Figura 2-12 Área entre uma curva e o eixo dos tempos, do instante t_0 ao instante t_1, indicada (a) em um gráfico da aceleração a em função do tempo t e (b) em um gráfico da velocidade v em função do tempo t.

Exemplo

Integração do gráfico *a* em função de *t*: lesões no pescoço

Lesões no pescoço causadas pelo "efeito chicote" são frequentes em colisões traseiras, em que um automóvel é atingido por trás por outro automóvel. Na década de 1970, os pesquisadores concluíram que a lesão ocorria porque a cabeça do ocupante era jogada para trás por cima do banco quando o carro era empurrado para frente. A partir dessa observação, foram instalados encostos de cabeça nos carros, mas as lesões de pescoço nas colisões traseiras continuaram a acontecer.

Em um teste recente para estudar as lesões do pescoço em colisões traseiras, um voluntário foi preso por cintos a um assento, que foi movimentado bruscamente para simular uma colisão na qual o carro de trás estava se movendo a 10,5 km/h. A Fig. 2-13a mostra a aceleração do tronco e da cabeça do voluntário durante a colisão, que começa no instante $t = 0$. O início da aceleração do tronco sofreu um retardo de 40 ms, tempo que o encosto do assento levou para ser comprimido contra o voluntário. A aceleração da cabeça sofreu um retardo de mais 70 ms. Qual era a velocidade do tronco quando a cabeça começou a acelerar?

IDEIA-CHAVE

Podemos determinar a velocidade escalar do tronco em qualquer instante calculando a área sob a curva da aceleração do tronco, $a(t)$.

Cálculos Sabemos que a velocidade inicial do tronco é $v_0 = 0$ no instante $t_0 = 0$, ou seja, no início da "colisão". Queremos obter a velocidade do tronco v_1 no instante $t_1 = 110$ ms, ou seja, quando a cabeça começa a acelerar.

Combinando as Eqs. 2-22 e 2-23, podemos escrever:

$$v_1 - v_0 = \begin{pmatrix}\text{área entre a curva de aceleração}\\ \text{e o eixo dos tempos, de } t_0 \text{ a } t_1\end{pmatrix}. \quad (2\text{-}26)$$

Por conveniência, vamos separar a área em três regiões

(Fig. 2-13*b*). De 0 a 40 ms, a região *A* tem área nula:

$$\text{área}_A = 0.$$

De 40 ms a 100 ms, a região *B* tem a forma de um triângulo cuja área é

$$\text{área}_B = \tfrac{1}{2}(0{,}060\ \text{s})(50\ \text{m/s}^2) = 1{,}5\ \text{m/s}.$$

De 100 ms a 110 ms, a região *C* tem a forma de um retângulo cuja área é

$$\text{área}_C = (0{,}010\ \text{s})(50\ \text{m/s}^2) = 0{,}50\ \text{m/s}.$$

Substituindo esses valores e fazendo $v_0 = 0$ na Eq. 2-26, obtemos:

$$v_1 - 0 = 0 + 1{,}5\ \text{m/s} + 0{,}50\ \text{m/s},$$

ou $$v_1 = 2{,}0\ \text{m/s} = 7{,}2\ \text{km/h}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Comentários Quando a cabeça está começando a se mover para a frente, o tronco já tem uma velocidade de 7,2 km/h. Os pesquisadores afirmam que é esta diferença de velocidades nos primeiros instantes de uma colisão traseira que causa lesões do pescoço. O movimento brusco da cabeça para trás acontece depois e pode agravar a lesão, especialmente se não existir um encosto para a cabeça.

A área é igual à variação de velocidade.

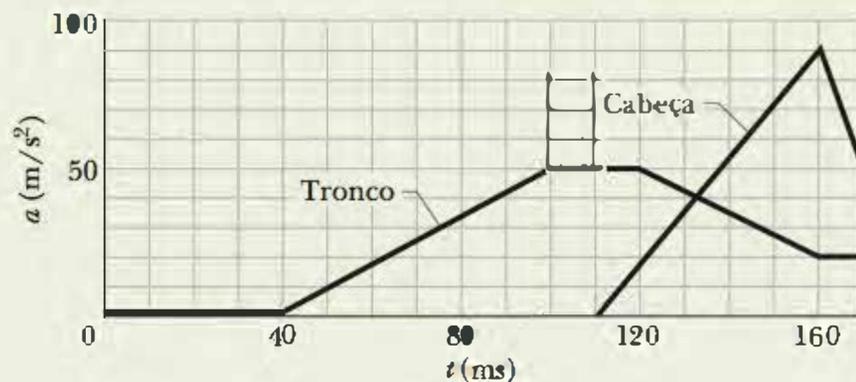
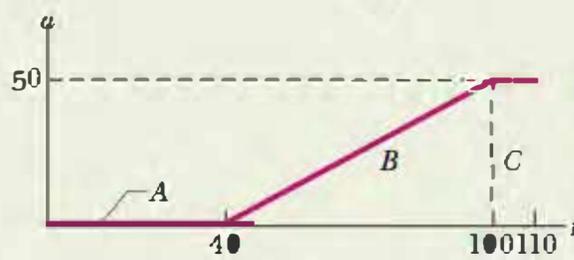



Figura 2-13 (*a*) Curva de $a(t)$ para o tronco e a cabeça de um voluntário em uma simulação de uma colisão traseira. (*b*) Separação em três partes da região entre a curva e o eixo dos tempos para calcular a área.

REVISÃO E RESUMO

Posição A *posição* x de uma partícula em um eixo x mostra a que distância a partícula se encontra da **origem**, ou ponto zero, do eixo. A posição pode ser positiva ou negativa, dependendo do lado em que se encontra a partícula em relação à origem (ou zero, se a partícula estiver exatamente na origem). O **sentido positivo** de um eixo é o sentido em que os números que indicam a posição da partícula aumentam de valor; o sentido oposto é o **sentido negativo**.

Deslocamento O *deslocamento* Δx de uma partícula é a variação da posição da partícula:

$$\Delta x = x_2 - x_1. \tag{2-1}$$

O deslocamento é uma grandeza vetorial. É positivo se a partícula se desloca no sentido positivo do eixo x e negativo se a partícula se desloca no sentido oposto.

Velocidade Média Quando uma partícula se desloca de uma posição x_1 para uma posição x_2 durante um intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, a *velocidade média* da partícula durante esse intervalo é dada por

$$v_{méd} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \tag{2-2}$$

O sinal algébrico de $v_{méd}$ indica o sentido do movimento ($v_{méd}$ é uma grandeza vetorial). A velocidade média não depende da distância que uma partícula percorre, mas apenas das posições inicial e final.

Em um gráfico de x em função de t, a velocidade média em um intervalo de tempo Δt é igual à inclinação da linha reta que une os pontos da curva que representam as duas extremidades do intervalo.

Velocidade Escalar Média A *velocidade escalar média* $s_{méd}$ de uma partícula durante um intervalo de tempo Δt depende da distância total percorrida pela partícula nesse intervalo:

$$s_{méd} = \frac{\text{distância total}}{\Delta t}. \tag{2-3}$$

Velocidade Instantânea A *velocidade instantânea* (ou simplesmente **velocidade**) v de uma partícula é dada por

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}, \tag{2-4}$$

onde Δx e Δt são definidos pela Eq. 2-2. A velocidade instantânea (em um certo instante de tempo) é igual à inclinação (nesse mesmo instante) do gráfico de x em função de t. A **velocidade escalar** é o módulo da velocidade instantânea.

Aceleração Média A *aceleração média* é a razão entre a variação de velocidade Δv e o intervalo de tempo Δt no qual essa variação ocorre:

$$a_{\text{méd}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \qquad (2\text{-}7)$$

O sinal algébrico indica o sentido de $a_{\text{méd}}$.

Aceleração Instantânea A *aceleração instantânea* (ou simplesmente **aceleração**) a é igual à derivada primeira em relação ao tempo da velocidade $v(t)$ ou à derivada segunda da posição $x(t)$ em relação ao tempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \qquad (2\text{-}8, 2\text{-}9)$$

Em um gráfico de v em função de t, a aceleração a em qualquer instante t é igual à inclinação da curva no ponto que representa t.

Aceleração Constante As cinco equações da Tabela 2-1 descrevem o movimento de uma partícula com aceleração constante:

$$v = v_0 + at, \qquad (2\text{-}11)$$

$$x - x_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2, \qquad (2\text{-}15)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0), \qquad (2\text{-}16)$$

$$x - x_0 = \tfrac{1}{2}(v_0 + v)t, \qquad (2\text{-}17)$$

$$x - x_0 = vt - \tfrac{1}{2}at^2. \qquad (2\text{-}18)$$

Essas equações *não são válidas* quando a aceleração não é constante.

Aceleração em Queda Livre Um exemplo importante de movimento retilíneo com aceleração constante é o de um objeto subindo ou caindo livremente nas proximidades da superfície da Terra. As equações para aceleração constante podem ser usadas para descrever o movimento, mas é preciso fazer duas mudanças na notação: (1) o movimento deve ser descrito em relação a um eixo vertical y, com $+y$ orientado verticalmente *para cima*; (2) a aceleração a deve ser substituída por $-g$, onde g é o módulo da aceleração em queda livre. Perto da superfície da Terra, $g = 9{,}8$ m/s^2.

PERGUNTAS

1 A Fig. 2-14 mostra a velocidade de uma partícula que se move em um eixo x. Determine (a) o sentido inicial e (b) o sentido final do movimento. (c) A velocidade da partícula se anula em algum instante? (d) A aceleração é positiva ou negativa? (e) A aceleração é constante ou variável?

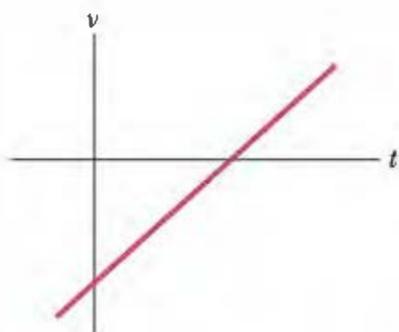



Figura 2-14 Pergunta 1.

2 A Fig. 2-15 mostra a aceleração $a(t)$ de um chihuahua que persegue um pastor alemão sobre um eixo. Em qual dos períodos de tempo indicados o chihuahua se move com velocidade constante?

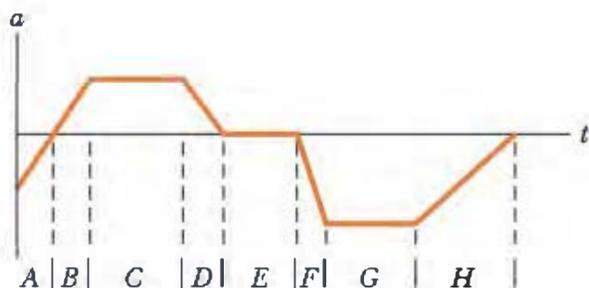



Figura 2-15 Pergunta 2.

3 A Fig. 2-16 mostra as trajetórias de quatro objetos de um ponto inicial a um ponto final, todas no mesmo intervalo de tempo. As trajetórias passam por três linhas retas igualmente espaçadas. Coloque as trajetórias (a) na ordem da velocidade média dos objetos e (b) na ordem da velocidade escalar média dos objetos, começando pela maior.

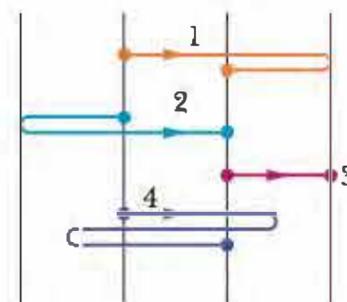



Figura 2-16 Pergunta 3.

4 A Fig. 2-17 é um gráfico da posição de uma partícula em um eixo x em função do tempo. (a) Qual é o sinal da posição da partícula no instante $t = 0$? A velocidade da partícula é positiva, negativa ou nula (b) em $t = 1$ s, (c) em $t = 2$ s e (d) em $t = 3$ s? (e) Quantas vezes a partícula passa pelo ponto $x = 0$?

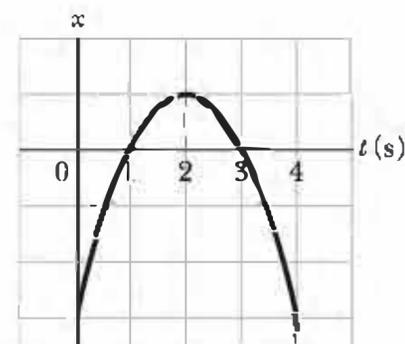



Figura 2-17 Pergunta 4.

5 A Fig. 2-18 mostra a velocidade de uma partícula que se move em um eixo. O ponto 1 é o ponto mais alto da curva; o ponto 4 é o ponto mais baixo; os pontos 2 e 6 estão na mesma altura. Qual é o sentido do movimento (a) no instante $t = 0$ e (b) no ponto 4? (c)

Em qual dos seis pontos numerados a partícula inverte o sentido de movimento? (d) Coloque os seis pontos na ordem do módulo da aceleração, começando pelo maior.

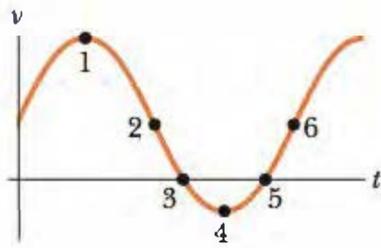



Figura 2-18 Pergunta 5.

6 No instante $t = 0$, uma partícula que se move em um eixo x está na posição $x_0 = -20$ m. Os sinais da velocidade inicial v_0 (no instante t_0) e da aceleração constante a da partícula são, respectivamente, para quatro situações: (1) +, +; (2) +, −; (3) −, +; (4) −, −. Em que situações a partícula (a) para momentaneamente, (b) passa pela origem e (c) não passa pela origem?

7 Debruçado no parapeito de uma ponte, você deixa cair um ovo (com velocidade inicial nula) e atira um segundo ovo para baixo. Qual das curvas da Fig. 2-19 corresponde à velocidade $v(t)$ (a) do ovo que caiu e (b) do ovo que foi atirado? (As curvas A e B são paralelas, assim como as curvas C, D, E, F e G.)

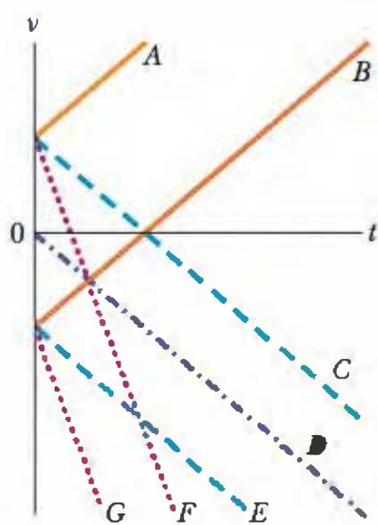



Figura 2-19 Pergunta 7.

8 As equações a seguir fornecem a velocidade $v(t)$ de uma partícula em quatro situações: (a) $v = 3$; (b) $v = 4t^2 + 2t - 6$; (c) $v = 3t - 4$; (d) $v = 5t^2 - 3$. Em que situações as equações da Tabela 2-1 podem ser aplicadas?

9 Na Fig. 2-20, uma tangerina é lançada verticalmente para cima e passa por três janelas igualmente espaçadas e de alturas iguais. Coloque as janelas na ordem decrescente (a) da velocidade escalar média da tangerina ao passar por elas, (b) do tempo que a tangerina leva para passar por elas, (c) do módulo de aceleração da tangerina ao passar por elas e (d) da variação Δv da velocidade escalar da tangerina ao passar por elas.

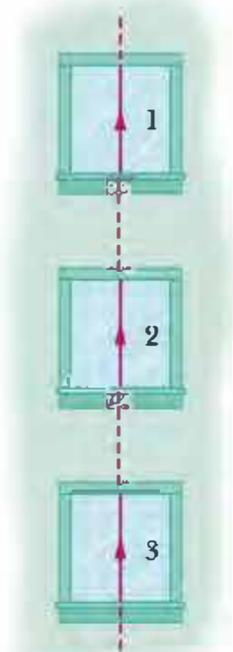



Figura 2-20 Pergunta 9.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física* de Jearl Walker, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

Seção 2-4 Velocidade Média e Velocidade Escalar Média

•1 Durante um espirro, os olhos podem se fechar por até 0,50 s. Se você está dirigindo um carro a 90 km/h e espirra, de quanto o carro pode se deslocar até você abrir novamente os olhos?

•2 Calcule a velocidade média nos dois casos seguintes: (a) você caminha 73,2 m a uma velocidade de 1,22 m/s e depois corre 73,2 m a m/s em uma pista reta; (b) você caminha 1,00 min com uma velocidade de 1,22 m/s e depois corre por 1,00 min a 3,05 m/s em uma pista reta. (c) Faça o gráfico de x em função de t nos dois casos e indique de que forma a velocidade média pode ser determinada a partir do gráfico.

•3 Um automóvel viaja em uma estrada retilínea por 40 km a 30 km/h. Em seguida, continuando no mesmo sentido, percorre outros 40 km a 60 km/h. (a) Qual é a velocidade média do carro durante este percurso de 80 km? (Suponha que o carro está se movendo no sentido positivo de x.) (b) Qual é a velocidade escalar média? (c) Desenhe o gráfico de x em função de t e mostre como calcular a velocidade média a partir do gráfico.

•4 Um carro sobe uma ladeira com uma velocidade constante de 40 km/h e desce a ladeira com uma velocidade constante de 60 km/h. Calcule a velocidade escalar média da viagem de ida e volta.

•5 A posição de um objeto que se move ao longo de um eixo x é dada por $x = 3t - 4t^2 + t^3$, onde x está em metros e t em segundos. Determine a posição do objeto para os seguintes valores de t: (a) 1 s, (b) 2 s, (c) 3 s, (d) 4 s. (e) Qual é o deslocamento do objeto entre $t = 0$ e $t = 4$ s? (f) Qual é a velocidade média para o intervalo de tempo de $t = 2$ s a $t = 4$ s? (g) Desenhe o gráfico de x em função de t para $0 \leq t \leq 4$ s e indique como a resposta do item (f) pode ser determinada a partir do gráfico.

•6 Em 1992, um recorde mundial de velocidade em uma bicicleta foi estabelecido por Chris Huber. O tempo para percorrer um trecho de 200 m foi apenas 6,509 s, ao final do qual Chris comentou: "Cogito ergo zoom!" (Penso, logo corro!). Em 2001, Sam Whittingham quebrou o recorde de Huber por 19 km/h. Qual foi o tempo gasto por Whittingham para percorrer os 200 m?

••7 Dois trens, ambos se movendo com uma velocidade de 30 km/h, trafegam em sentidos opostos na mesma linha férrea retilínea. Um pássaro parte da extremidade dianteira de um dos trens, quando estão separados por 60 km, voando a 60 km/h, e se dirige em linha reta para o outro trem. Ao chegar ao outro trem, o pássaro faz meia volta e se dirige para o primeiro trem, e assim por diante. (Não temos a menor ideia do *motivo* pelo qual o pássaro se comporta desta forma.) Qual é a distância que o pássaro percorre até os trens colidirem?

••8 *Situação de pânico* A Fig. 2-21 mostra uma situação na qual muitas pessoas tentam escapar por uma porta de emergência que está trancada. As pessoas se aproximam da porta com uma velocidade $v_s = 3{,}50$ m/s, têm $d = 0{,}25$ m de espessura e estão separadas por uma distância $L = 1{,}75$ m. A Fig. 2-21 mostra a posição das pessoas no instante $t = 0$. (a) Qual é a taxa média de aumento da camada de pessoas que se comprimem contra a porta? (b) Em que instante a espessura da camada chega a 5,0 m? (As respostas mostram com que rapidez uma situação deste tipo pode colocar em risco a vida das pessoas.)

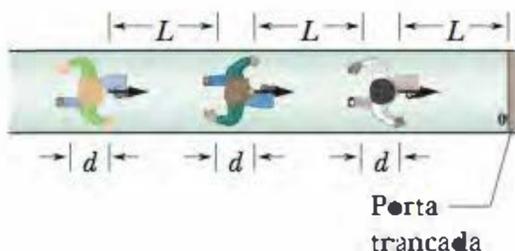



Figura 2-21 Problema 8.

••9 Em uma corrida de 1 km, o corredor 1 da raia 1 (com o tempo de 2 min, 27,95 s) parece ser mais rápido que o corredor 2 da raia 2 (2 min, 28,15 s). Entretanto, o comprimento L_2 da raia 2 pode ser ligeiramente maior que o comprimento L_1 da raia 1. Qual é o maior valor da diferença $L_2 - L_1$ para o qual a conclusão de que o corredor 1 é mais rápido é verdadeira?

••10 Para estabelecer um recorde de velocidade em uma distância d (em linha reta), um carro deve percorrer a distância primeiro em um sentido (em um tempo t_1) e depois no sentido oposto (em um tempo t_2). (a) Para eliminar o efeito do vento e obter a velocidade do carro v_c na ausência de vento, devemos calcular a média aritmética de d/t_1 e d/t_2 (método 1) ou devemos dividir d pela média aritmética de t_1 e t_2? (b) Qual é a diferença percentual dos dois métodos se existe um vento constante na pista e a razão entre a velocidade v_v do vento e a velocidade v_c do carro é 0,0240?

••11 Você tem que dirigir em uma via expressa para se candidatar a um emprego em outra cidade, que fica a 300 km de distância. A entrevista foi marcada para as 11h15min. Você planeja dirigir a 100 km/h e parte às 8h para ter algum tempo de sobra. Você dirige na velocidade planejada durante os primeiros 100 km, mas, em seguida, um trecho em obras o obriga a reduzir a velocidade para 40 km/h por 40 km. Qual é a menor velocidade que deve manter no resto da viagem para chegar a tempo?

•••12 *Onda de choque no trânsito.* Quando o trânsito é intenso, uma redução brusca de velocidade pode se propagar como um pulso, denominado *onda de choque*, ao longo da fila de carros. A onda de choque pode ter o sentido do movimento dos carros, o sentido oposto ou permanecer estacionária. A Fig. 2-22 mostra uma fila de carros regularmente espaçados que estão se movendo a uma velocidade $v = 25{,}00$ m/s em direção a uma fila de carros mais lentos, uniformemente espaçados, que estão se movendo a uma velocidade $v_s = 5{,}00$ m/s. Suponha que cada carro mais rápido acrescenta um comprimento $L = 12{,}0$ m (comprimento do carro mais a distância mínima de segurança) à fila de carros mais lentos ao se juntar à fila, e suponha que reduz bruscamente a velocidade no último momento. (a) Para que distância d entre os carros mais rápidos a onda de choque permanece estacionária? Se a distância é duas vezes maior que este valor, quais são (b) a velocidade e (c) o sentido (o sentido do movimento dos carros ou o sentido contrário) da onda de choque?

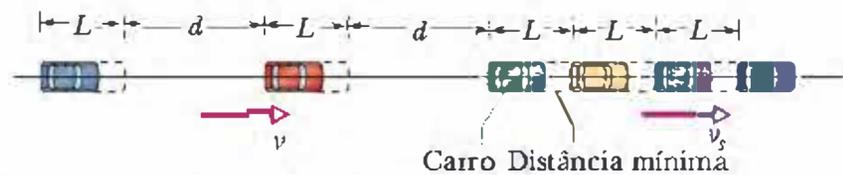



Figura 2-22 Problema 12.

•••13 Você dirige do Rio a São Paulo metade *do tempo* a 55 km/h e a outra metade a 90 km/h. Na volta, você viaja metade *da distância* a 55 km/h e a outra metade a 90 km/h. Qual é a velocidade escalar média (a) na viagem do Rio a São Paulo, (b) na viagem de São Paulo ao Rio, e (c) na viagem inteira? (d) Qual é a velocidade média na viagem inteira? (e) Plote o gráfico de x em função de t para o item (a), supondo que o movimento ocorre no sentido positivo de x. Mostre de que forma a velocidade média pode ser determinada a partir do gráfico.

Seção 2-5 Velocidade Instantânea e Velocidade Escalar

•14 A posição de um elétron que se move ao longo do eixo x é dada por $x = 16te^{-t}$ m, onde t está em segundos. A que distância da origem se encontra o elétron quando para momentaneamente?

•15 (a) Se a posição de uma partícula é dada por $x = 4 - 12t + 3t^2$ (onde t está em segundos e x em metros), qual é a velocidade da partícula em $t = 1$ s? (b) O movimento nesse instante é no sentido positivo ou negativo de x? (c) Qual é a velocidade escalar da partícula nesse instante? (d) A velocidade escalar está aumentando ou diminuindo nesse instante? (Tente responder às duas próximas perguntas sem fazer outros cálculos.) (e) Existe algum instante no qual a velocidade se anula? Caso a resposta seja afirmativa, para que valor de t isso acontece? (f) Existe algum instante após $t = 3$ s no qual a partícula está se movendo no sentido negativo de x? Caso a resposta seja afirmativa, para que valor de t isso acontece?

•16 A função posição $x(t)$ de uma partícula que está se movendo ao longo do eixo x é $x = 4{,}0 - 6{,}0t^2$, com x em metros e t em segundos. (a) Em que instante e (b) em que posição a partícula para (momentaneamente)? Em que (c) instante negativo e (d) instante positivo a partícula passa pela origem? (e) Plote o gráfico de x em função de t para o intervalo de -5 s a $+5$ s. (f) Para deslocar a curva para a direita no gráfico, devemos acrescentar a $x(t)$ o termo $+20t$ ou o termo $-20t$? (g) Essa modificação aumenta ou diminui o valor de x para o qual a partícula para momentaneamente?

••17 A posição de uma partícula que se move ao longo do eixo x é dada por $x = 9{,}75 + 1{,}50t^3$, onde x está em centímetros e t em segundos. Calcule (a) a velocidade média durante o intervalo de tempo de $t = 2{,}00$ s a $t = 3{,}00$ s; (b) a velocidade instantânea em $t = 2{,}00$ s; (c) a velocidade instantânea em $t = 3{,}00$ s; (d) a velocidade instantânea em $t = 2{,}50$ s; (e) a velocidade instantânea quando a partícula está na metade da distância entre as posições em $t = 2{,}00$ s e $t = 3{,}00$ s. (f) Plote o gráfico de x em função de t e indique suas respostas graficamente.

Seção 2-6 Aceleração

•18 A posição de uma partícula que se move ao longo do eixo x é dada por $x = 12t^2 - 2t^3$, onde x está em metros e t em segundos. Determine (a) a posição, (b) a velocidade e (c) a aceleração da partícula em $t = 3{,}0$ s. (d) Qual é a coordenada positiva máxima alcançada pela partícula e (e) em que instante de tempo é alcançada? (f) Qual é a velocidade positiva máxima alcançada pela partícula e (g) em que instante de tempo é alcançada? (h) Qual é a aceleração da

partícula no instante em que a partícula não está se movendo (além do instante $t = 0$)? (i) Determine a velocidade média da partícula entre $t = 0$ e $t = 3{,}0$ s.

• **19** Em um certo instante de tempo, uma partícula tinha uma velocidade de 18 m/s no sentido positivo de x; 2,4 s depois, a velocidade era 30 m/s no sentido oposto. Qual foi a aceleração média da partícula durante este intervalo de 2,4 s?

•**20** (a) Se a posição de uma partícula é dada por $x = 20t - 5t^3$, onde x está em metros e t em segundos, em que instante(s) a velocidade da partícula é zero? (b) Em que instante(s) a aceleração a é zero? (c) Para que intervalo de tempo (positivo ou negativo) a aceleração a é negativa? (d) Para que intervalo de tempo (positivo ou negativo) a aceleração a é positiva? (e) Desenhe os gráficos de $x(t)$, $v(t)$, e $a(t)$.

••**21** De $t = 0$ a $t = 5{,}00$ min, um homem fica em pé sem se mover; de $t = 5{,}00$ min a $t = 10{,}0$ min, caminha em linha reta com uma velocidade de 2,2 m/s. Quais são (a) a velocidade média $v_{méd}$ e (b) a aceleração média $a_{méd}$ do homem no intervalo de tempo de 2,00 min a 8,00 min? Quais são (c) $v_{méd}$ e (d) $a_{méd}$ no intervalo de tempo de 3,00 min a 9,00 min? (e) Plote x em função de t e v em função de t, e indique como as respostas de (a) a (d) podem ser obtidas a partir dos gráficos.

••**22** A posição de uma partícula que se desloca ao longo do eixo x varia com o tempo de acordo com a equação $x = ct^2 - bt^3$, onde x está em metros e t em segundos. Quais são as unidades (a) da constante c e (b) da constante b? Suponha que os valores numéricos de c e b são 3,0 e 2,0, respectivamente. (c) Em que instante a partícula passa pelo maior valor positivo de x? De $t = 0{,}0$ s a $t = 4{,}0$ s, (d) qual é a distância percorrida pela partícula e (e) qual é o deslocamento? Determine a velocidade da partícula nos instantes (f) $t = 1{,}0$ s, (g) $t = 2{,}0$ s, (h) $t = 3{,}0$ s e (i) $t = 4{,}0$ s. Determine a aceleração da partícula nos instantes (j) $t = 1{,}0$ s, (k) $t = 2{,}0$ s, (l) $t = 3{,}0$ s e (m) $t = 4{,}0$ s.

Seção 2-7 Aceleração Constante: Um Caso Especial

•**23** Um elétron com velocidade inicial $v_0 = 1{,}50 \times 10^5$ m/s penetra em uma região de comprimento $L = 1{,}00$ cm, onde é eletricamente acelerado (Figura 2-23), e sai dessa região com $v = 5{,}70 \times 10^6$ m/s. Qual é a aceleração do elétron, supondo que seja constante?

Sem aceleração

Com aceleração

L

Trajetória do elétron

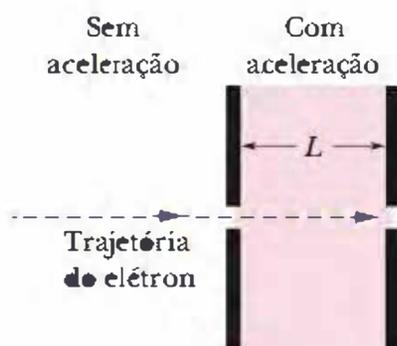



Figura 2-23 Problema 23.

•**24** *Cogumelos lançadores* Alguns cogumelos lançam esporos usando um mecanismo de catapulta. Quando o vapor d'água do ar se condensa em um esporo preso de um cogumelo, uma gota se forma de um lado do esporo e uma película de água se forma do outro lado. O peso da gota faz o esporo se encurvar, mas quando a película atinge a gota, a gota d'água se espalha bruscamente pelo filme e o esporo volta tão depressa à posição original que é lançado no ar. Tipicamente, o esporo atinge uma velocidade de 1,6 m/s em um lançamento de 5,0 μm; em seguida, a velocidade é reduzida a zero em 1,00 mm pelo atrito com o ar. Usando esses dados e supondo que a aceleração é constante, determine a aceleração em unidades de g (a) durante o lançamento; (b) durante a redução de velocidade.

•**25** Um veículo elétrico parte do repouso e acelera em linha reta a uma taxa de 2,0 m/s² até atingir a velocidade de 20 m/s. Em seguida, o veículo desacelera a uma taxa constante de 1,0 m/s² até parar. (a) Quanto tempo transcorre entre a partida e a parada? (b) Qual é a distância percorrida pelo veículo desde a partida até a parada?

•**26** Um múon (uma partícula elementar) penetra em uma região com uma velocidade de $5{,}00 \times 10^6$ m/s e passa a ser desacelerado a uma taxa de $1{,}25 \times 10^{14}$ m/s². (a) Qual é a distância percorrida pelo múon até parar? (b) Desenhe os gráficos de x em função de t e v em função de t para o múon.

•**27** Um elétron possui uma aceleração constante de $+3{,}2$ m/s². Em um certo instante, a velocidade do elétron é $+9{,}6$ m/s. Qual é a velocidade (a) 2,5 s antes e (b) 2,5 s depois do instante considerado?

•**28** Em uma estrada seca, um carro com pneus novos é capaz de frear com uma desaceleração constante de 4,92 m/s². (a) Quanto tempo esse carro, inicialmente se movendo a 24,6 m/s, leva para parar? (b) Que distância o carro percorre nesse tempo? (c) Desenhe os gráficos de x em função de t e v em função de t durante a desaceleração.

•**29** Um certo elevador percorre uma distância de 190 m e atinge uma velocidade máxima de 305 m/min. O elevador acelera a partir do repouso e desacelera de volta ao repouso a uma taxa de 1,22 m/s². (a) Qual é a distância percorrida pelo elevador enquanto acelera a partir do repouso até a velocidade máxima? (b) Quanto tempo o elevador leva para percorrer a distância de 190 m, sem paradas, partindo do repouso e chegando com velocidade zero?

•**30** Os freios de um carro podem produzir uma desaceleração da ordem de 5,2 m/s². (a) Se o motorista está a 137 km/h e avista um policial rodoviário, qual é o tempo mínimo necessário para que o carro atinja a velocidade máxima permitida de 90 km/h? (A resposta revela a inutilidade de frear para tentar impedir que a alta velocidade seja detectada por um radar ou por uma pistola de laser.) (b) Desenhe os gráficos de x em função de t e v em função de t durante a desaceleração.

•**31** Suponha que uma nave espacial se move com uma aceleração constante de 9,8 m/s², o que dá aos tripulantes a ilusão de uma gravidade normal durante o voo. (a) Se a nave parte do repouso, quanto tempo leva para atingir um décimo da velocidade da luz, que é $3{,}0 \times 10^8$ m/s? (b) Que distância a nave percorre nesse tempo?

•**32** O recorde mundial de velocidade em terra foi estabelecido pelo coronel John P. Stapp em março de 1954, a bordo de um trenó-foguete que se deslocou sobre trilhos a 1020 km/h. Ele e o trenó foram freados até parar em 1,4 s. (Veja a Fig. 2-7.) Qual foi a aceleração experimentada por Stapp durante a frenagem, em unidades de g?

•**33** Um carro que se move a 56,0 km/h está a 24,0 m de distância de um muro quando o motorista aciona os freios. O carro bate no muro 2,00 s depois. (a) Qual era o módulo da aceleração constante do carro antes do choque? (b) Qual era a velocidade do carro no momento do choque?

••**34** Na Fig. 2-24, um carro vermelho e um carro verde, iguais exceto pela cor, movem-se um em direção ao outro em pistas vizinhas e paralelas a um eixo x. No instante $t = 0$, o carro vermelho está em $x_A = 0$ e o carro verde está em $x_B = 220$ m. Se o carro vermelho tem uma velocidade constante de 20 km/h, os carros se cruzam em $x =$

44,5 m; se tem uma velocidade constante de 40 km/h, os carros se cruzam em $x = 76,6$ m. Quais são (a) a velocidade inicial e (b) a aceleração do carro verde?

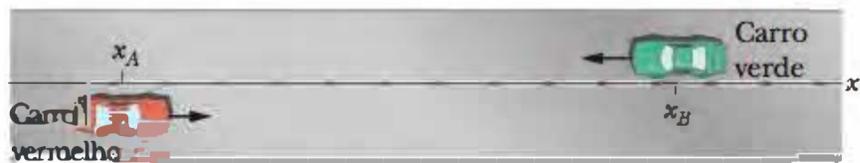



Figura 2-24 Problemas 34 e 35.

••35 A Fig. 2-24 mostra um carro vermelho e um carro verde que se movem um em direção ao outro. A Fig. 2-25 é um gráfico do movimento dos dois carros que mostra suas posições $x_{A0} = 270$ m e $x_{B0} = -35,0$ m no instante $t = 0$. O carro vermelho tem uma velocidade constante de 20,0 m/s e o carro verde parte do repouso. Qual é o módulo da aceleração do carro verde?

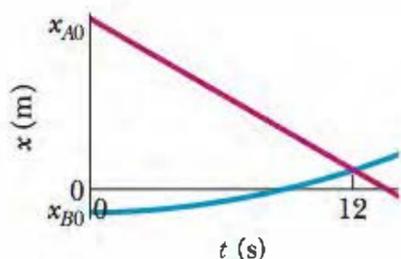



Figura 2-25 Problema 35.

••36 Um carro se move ao longo do eixo x por uma distância de 900 m, partindo do repouso (em $x = 0$) e terminando em repouso (em $x = 900$ m). No primeiro quarto do percurso, a aceleração é $+2,25$ m/s^2. Nos outros três quartos, a aceleração passa a ser $-0,750$ m/s^2. Quais são (a) o tempo necessário para percorrer os 900 m e (b) a velocidade máxima? (c) Desenhe os gráficos da posição x, da velocidade v e da aceleração a em função do tempo t.

••37 A Fig. 2-26 mostra o movimento de uma partícula que se move ao longo do eixo x com aceleração constante. A escala vertical do gráfico é definida por $x_s = 6,0$ m. Quais são (a) o módulo e (b) o sentido da aceleração da partícula?

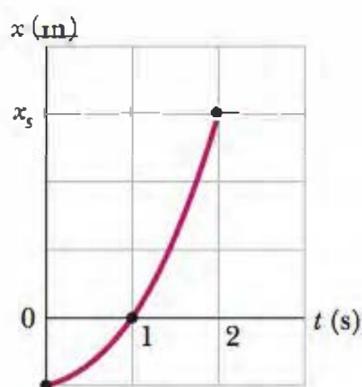



Figura 2-26 Problema 37.

••38 (a) Se a aceleração máxima que pode ser tolerada pelos passageiros de um metrô é 1,34 m/s^2 e duas estações de metrô estão separadas por uma distância de 806 m, qual é a velocidade máxima que o metrô pode alcançar entre as estações? (b) Qual é o tempo de percurso? (c) Se o metrô para durante 20 s em cada estação, qual é a máxima velocidade escalar média do metrô entre o instante em que parte de uma estação e o instante em que parte da estação seguinte? Plote x, v e a em função de t para intervalo de tempo entre o instante em que o trem parte de uma estação e o instante em que parte da estação seguinte.

••39 Os carros A e B se movem no mesmo sentido em pistas vizinhas. A posição x do carro A é dada na Fig. 2-27, do instante $t = 0$ ao instante $t = 7,0$ s. A escala vertical do gráfico é definida por $x_s = 32,0$ m. Em $t = 0$, o carro B está em $x = 0$, com uma velocidade de 12 m/s e uma aceleração negativa a_B. (a) Qual deve ser o valor de a_B para que os carros estejam lado a lado (ou seja, tenham o mesmo valor de x) em $t = 4,0$ s? (b) Para esse valor de a_B, quantas vezes os carros ficam lado a lado? (c) Plote a posição x do carro B em função do tempo t na Fig. 2-27. Quantas vezes os carros ficariam lado a lado se o módulo da aceleração a_B fosse (d) maior do que o da resposta do item (a) e (e) menor do que o da resposta do item (a)?

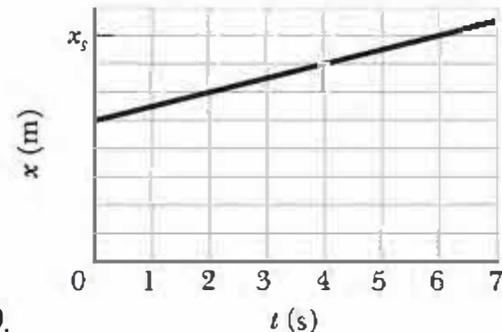



Figura 2-27 Problema 39.

••40 Você está se aproximando de um sinal de trânsito a uma velocidade $v_0 = 55$ km/h quando o sinal fica amarelo. O módulo da maior taxa de desaceleração de que o carro é capaz é $a = 5,18$ m/s^2 e seu tempo de reação para começar a frear é $T = 0,75$ s. Para evitar que a frente do carro invada o cruzamento depois que o sinal mudar para vermelho, sua estratégia deve ser frear até parar ou prosseguir a 55 km/h se a distância até o cruzamento e a duração da luz amarela forem, respectivamente, (a) 40 m e 2,8 s, e (b) 32 m e 1,8 s? As respostas podem ser frear, prosseguir, tanto faz (se as duas estratégias funcionarem) ou não há jeito (se nenhuma das estratégias funcionar).

••41 Os maquinistas de dois trens percebem, de repente, que estão em rota de colisão. A Fig. 2-28 mostra a velocidade v dos trens em função do tempo t enquanto estão sendo freados. A escala vertical do gráfico é definida por $v_s = 40,0$ m/s. O processo de desaceleração começa quando a distância entre os trens é 200 m. Qual é a distância entre os trens quando, finalmente, conseguem parar?

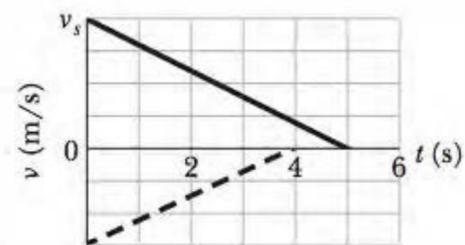



Figura 2-28 Problema 41.

•••42 Você está discutindo no telefone celular enquanto segue um carro de polícia não identificado, a 25 m de distância; os dois veículos estão a 110 km/h. A discussão distrai sua atenção do carro de polícia por 2,0 s (tempo suficiente para você olhar para o telefone e exclamar: "Eu me recuso a fazer isso!"). No início desses 2,0 s, o policial freia bruscamente, com uma desaceleração de 5,0 m/s^2. (a) Qual é a distância entre os dois carros quando você volta a prestar atenção no trânsito? Suponha que você leve outros 0,40 s para perceber o perigo e começar a frear. (b) Se você também freia com uma desaceleração de 5,0 m/s^2, qual é a velocidade do seu carro quando você bate no carro de polícia?

•••43 Quando um trem de passageiros de alta velocidade que se move a 161 km/h faz uma curva, o maquinista leva um susto ao ver que uma locomotiva entrou indevidamente nos trilhos através de um desvio e se encontra a uma distância $D = 676$ m à frente (Fig. 2-29). A locomotiva está se movendo a 29,0 km/h. O maquinista do trem de alta velocidade imediatamente aciona os freios. (a) Qual deve ser o valor mínimo do módulo da desaceleração (suposta constante) para

que a colisão não ocorra? (b) Suponha que o maquinista está em $x = 0$ quando, no instante $t = 0$, avista a locomotiva. Desenhe as curvas de $x(t)$ da locomotiva e do trem de alta velocidade para os casos em que a colisão é evitada por pouco e a colisão ocorre por pouco.

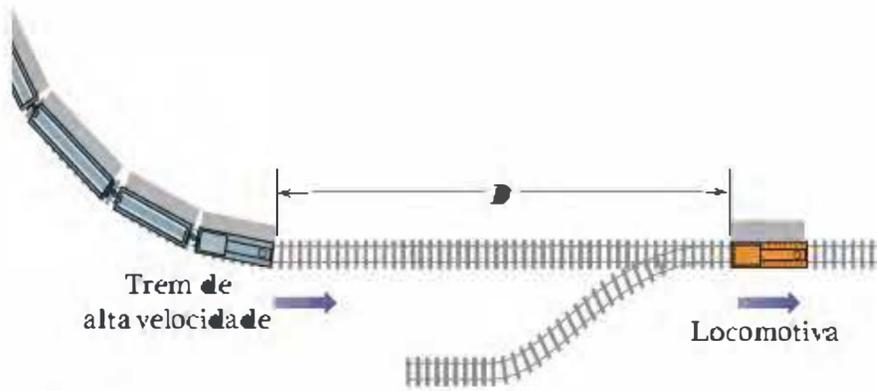



Figura 2-29 Problema 43.

Seção 2-9 Aceleração em Queda Livre

•44 Um tatu assustado pula verticalmente para cima, subindo 0,544 m nos primeiros 0,200 s. (a) Qual é a velocidade do animal ao deixar o solo? (b) Qual é a velocidade na altura de 0,544 m? (c) Qual é a altura do salto?

•45 (a) Com que velocidade deve ser lançada uma bola verticalmente a partir do solo para que atinja uma altura máxima de 50 m? (b) Por quanto tempo permanece no ar? (c) Esboce os gráficos de y, v e a em função de t para a bola. Nos dois primeiros gráficos, indique o instante no qual a bola atinge a altura de 50 m.

•46 Gotas de chuva caem 1700 m de uma nuvem até o chão. (a) Se as gotas não estivessem sujeitas à resistência do ar, qual seria a velocidade ao atingirem o solo? (b) Seria seguro caminhar na chuva?

•47 Em um prédio em construção, uma chave de grifo chega ao solo com uma velocidade de 24 m/s. (a) De que altura um operário a deixou cair? (b) Quanto tempo durou a queda? (c) Esboce os gráficos de y, v e a em função de t para a chave de grifo.

•48 Um desordeiro joga uma pedra verticalmente para baixo com uma velocidade inicial de 12,0 m/s, a partir do telhado de um edifício, 30,0 m acima do solo. (a) Quanto tempo a pedra leva para atingir o solo? (b) Qual é a velocidade da pedra no momento do choque?

•49 Um balão de ar quente está subindo com uma velocidade de 12 m/s e se encontra 80 m acima do solo quando um tripulante deixa cair um pacote. (a) Quanto tempo o pacote leva para atingir o solo? (b) Com que velocidade atinge o solo?

••50 No instante $t = 0$, uma pessoa deixa cair a maçã 1 de uma ponte; pouco depois, a pessoa joga a maçã 2 verticalmente para baixo do mesmo local. A Fig. 2-30 mostra a posição vertical y das duas maçãs em função do tempo durante a queda até a estrada que passa por baixo da ponte. A escala horizontal do gráfico é definida por $t_s = 2{,}0$ s. Aproximadamente com que velocidade a maçã 2 foi jogada para baixo?

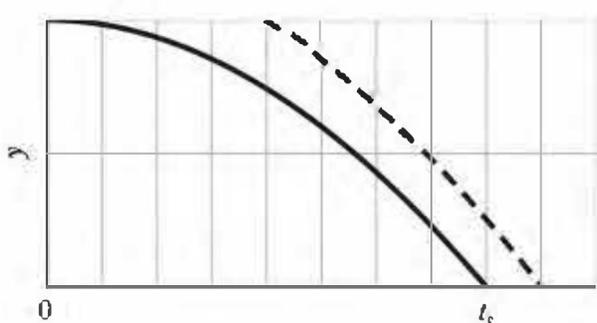



Figura 2-30 Problema 50.

••51 Quando um balão científico desgarrado está subindo com uma velocidade de 19,6 m/s, um dos instrumentos se desprende e cai em queda livre. A Fig. 2-31 mostra a velocidade vertical do instrumento em função do tempo, desde alguns instantes antes de se desprender até o momento em que atinge o solo. (a) Qual é a altura máxima que o instrumento atinge em relação ao ponto em que se desprendeu? (b) A que altura acima do solo o instrumento se desprendeu?

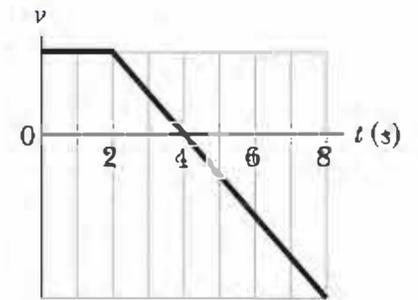



Figura 2-31 Problema 51.

••52 Um parafuso se desprende de uma ponte em construção e cai 90 m até chegar o solo. (a) Em quanto tempo o parafuso percorre os últimos 20% da queda? Qual é a velocidade (b) quando começam os últimos 20% da queda e (c) quando atinge o solo?

••53 Uma chave cai verticalmente de uma ponte que está 45 m acima da água. A chave atinge um barco de brinquedo que está se movendo com velocidade constante e se encontrava a 12 m do ponto de impacto quando a chave foi solta. Qual é a velocidade do barco?

••54 Uma pedra é deixada cair em um rio a partir de uma ponte situada 43,9 m acima da água. Outra pedra é atirada verticalmente para baixo 1,0 s após a primeira ter sido deixada cair. As pedras atingem a água ao mesmo tempo. (a) Qual era a velocidade inicial da segunda pedra? (b) Plote a velocidade em função do tempo para as duas pedras, supondo que $t = 0$ é o instante em que a primeira pedra foi deixada cair.

••55 Uma bola de argila úmida cai 15,0 m até o chão e permanece em contato com o solo por 20,0 ms antes de parar completamente. (a) Qual é o módulo de aceleração média da bola durante o tempo de contato com o solo? (Trate a bola como uma partícula.) (b) A aceleração média é para cima ou para baixo?

••56 A Fig. 2-32 mostra a velocidade v em função da altura y para uma bola lançada verticalmente para cima ao longo de um eixo y. A distância d é 0,40 m. A velocidade na altura y_A é v_A. A velocidade na altura y_B é $v_A/3$. Determine a velocidade v_A.

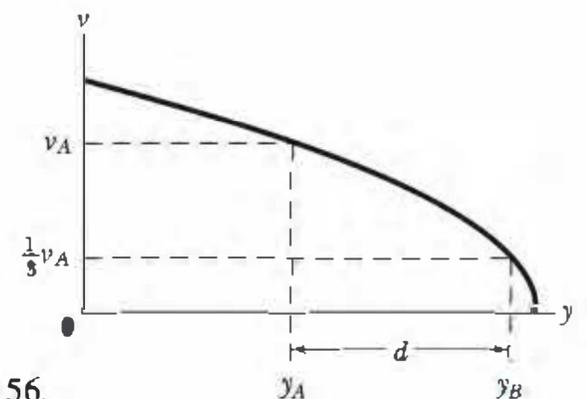



Figura 2-32 Problema 56.

••57 Para testar a qualidade de uma bola de tênis, você a deixa cair no chão de uma altura de 4,00 m. Depois de quicar, a bola atinge uma altura de 2,00 m. Se a bola permanece em contato com o piso por 12,0 ms, (a) qual é o módulo de aceleração média durante esse contato e (b) a aceleração média é para cima ou para baixo?

••58 Um objeto cai de uma altura h a partir do repouso. Se o objeto percorre uma distância de $0{,}50h$ no último 1,00 s, determine (a)

o tempo e (b) a altura da queda. (c) Explique a solução fisicamente inaceitável da equação do segundo grau em t usada para resolver o problema.

••59 A água pinga de um chuveiro em um piso situado 200 cm abaixo. As gotas caem a intervalos de tempo regulares (iguais), com a primeira gota atingindo o piso quando a quarta gota começa a cair. Quando a primeira gota atinge o piso, a que distância do chuveiro se encontra (a) a segunda e (b) a terceira gota?

••60 Uma pedra é lançada verticalmente para cima a partir do solo no instante $t = 0$. Em $t = 1,5$ s, a pedra ultrapassa o alto de uma torre; 1,0 s depois, atinge a altura máxima. Qual é a altura da torre?

•••61 Uma bola de aço é deixada cair do telhado de um edifício e leva 0,125 s para passar por uma janela, uma distância correspondente a 1,20 m. A bola quica em uma calçada e torna a passar pela janela, de baixo para cima, em 0,125 s. Suponha que o movimento para cima corresponde exatamente ao inverso da queda. O tempo que a bola passa abaixo do peitoril da janela é 2,00 s. Qual é a altura do edifício?

•••62 Ao pegar um rebote, um jogador de basquete pula 76,0 cm verticalmente. Qual é o tempo total (de subida e descida) que o jogador passa (a) nos 15 cm mais altos e (b) nos 15 cm mais baixos do salto? Esses resultados explicam por que os jogadores de basquete parecem flutuar quando estão no ponto mais alto de um salto?

•••63 Um gato sonolento observa um vaso de flores que passa por uma janela aberta, primeiro subindo e depois descendo. O vaso permanece à vista por um tempo total de 0,50 s e a altura da janela é 2,00 m. Que distância acima do alto da janela o vaso atinge?

•••64 Uma bola é lançada verticalmente para cima a partir da superfície de outro planeta. O gráfico de y em função de t para a bola é mostrado na Fig. 2-33, onde y é a altura da bola acima do ponto de lançamento e $t = 0$ no instante em que a bola é lançada. A escala vertical do gráfico é definida por $y_s = 30,0$ m. Quais são os módulos (a) de aceleração em queda livre no planeta e (b) da velocidade inicial da bola?

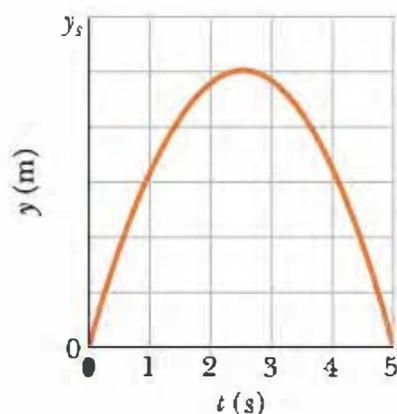



Figura 2-33 Problema 64.

Seção 2-10 Integração de Gráficos em Análise de Movimento

•65 A Figura 2-13 mostra a aceleração da cabeça e do tronco de um voluntário durante uma colisão frontal. Qual é a velocidade (a) da cabeça e (b) do tronco quando a aceleração da cabeça é máxima?

••66 Em um soco direto de caratê, o punho começa em repouso na cintura e é movido rapidamente para a frente até o braço ficar completamente estendido. A velocidade $v(t)$ do punho está representada na Fig. 2-34 para o caso de um lutador experiente. A escala vertical é definida por $v_s = 8,0$ m/s. Qual é a distância percorrida pelo punho desde o início do golpe até (a) o instante $t = 50$ ms e (b) o instante em que a velocidade do punho é máxima?

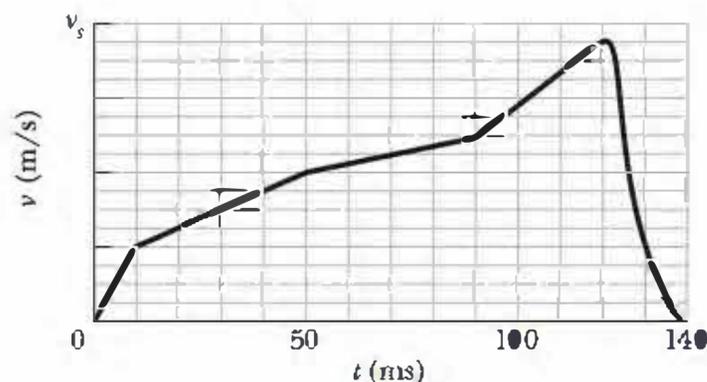



Figura 2-34 Problema 66.

••67 Quando uma bola de futebol é chutada na direção de um jogador e o jogador a desvia de cabeça, a aceleração da cabeça durante a colisão pode ser relativamente grande. A Fig. 2-35 mostra a aceleração $a(t)$ da cabeça de um jogador de futebol sem e com capacete, a partir do repouso. A escala vertical é definida por $a_s = 200$ m/s^2. Qual é a diferença entre a velocidade da cabeça sem e com o capacete no instante $t = 7,0$ ms?

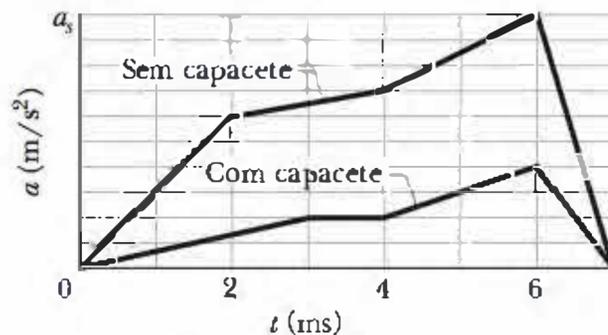



Figura 2-35 Problema 67.

••68 Uma salamandra do gênero *Hydromantes* captura a presa lançando a língua como um projétil: a parte traseira da língua se projeta bruscamente para a frente, desenrolando o resto da língua até que a parte dianteira atinja a presa, capturando-a. A Fig. 2-36 mostra o módulo a de aceleração em função do tempo t durante a fase de aceleração em uma situação típica. As acelerações indicadas são $a_1 = 100$ m/s^2 e $a_2 = 400$ m/s^2. Qual é a velocidade da língua no final da fase de aceleração?

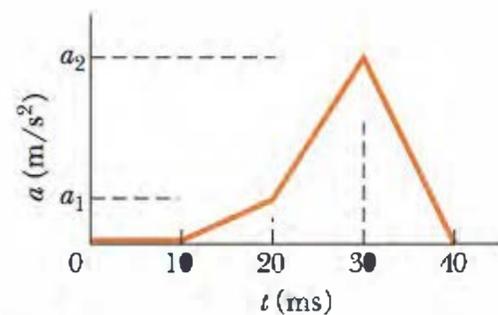



Figura 2-36 Problema 68.

••69 Que distância percorre em 16 s um corredor cujo gráfico velocidade–tempo é mostrado na Fig. 2-30? A escala vertical do gráfico é definida por $v_s = 8,0$ m.

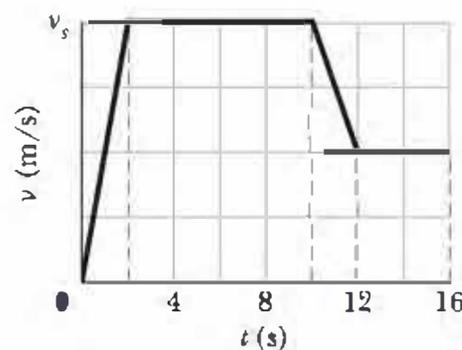



Figura 2-37 Problema 69.

•••70 Duas partículas se movem ao longo do eixo x. A posição da partícula 1 é dada por $x = 6{,}00t^2 + 3{,}00t + 2{,}00$, onde x está em metros e t em segundos; a aceleração da partícula 2 é dada por $a = -8{,}00t$, onde a está em metros por segundo ao quadrado e t em segundos. No instante $t = 0$, a velocidade da partícula 2 é 20 m/s. Qual é a velocidade das partículas no instante em que têm a mesma velocidade?

Problemas Adicionais

71 Em um videogame, um ponto é programado para se deslocar na tela de acordo com a função $x = 9{,}00t - 0{,}750t^3$, onde x é a distância em centímetros em relação à extremidade esquerda da tela e t é o tempo em segundos. Quando o ponto chega a uma das bordas da tela, $x = 0$ ou $x = 15{,}0$ cm, o valor de t é zerado e o ponto começa novamente a se mover de acordo com a função $x(t)$. (a) Em que instante após ser iniciado o movimento o ponto se encontra momentaneamente em repouso? (b) Para que valor de x isso acontece? (c) Qual é a aceleração do ponto (incluindo o sinal) no instante em que isso acontece? (d) O ponto está se movendo para a direita ou para a esquerda pouco antes de atingir o repouso? (e) O ponto está se movendo para a direita ou para a esquerda pouco depois de atingir o repouso? (f) Em que instante $t > 0$ o ponto atinge a borda da tela pela primeira vez?

72 Uma pedra é lançada verticalmente para cima a partir da borda do terraço de um edifício. A pedra atinge a altura máxima 1,60 s após ter sido lançada e, em seguida, caindo paralelamente ao edifício, chega ao solo 6,00 s após ter sido lançada. Em unidades do SI: (a) com que velocidade a pedra foi lançada? (b) Qual foi a altura máxima atingida pela pedra em relação ao terraço? (c) Qual é a altura do edifício?

73 No instante em que um sinal de trânsito fica verde, um automóvel começa a se mover com uma aceleração constante a de 2,2 m/s^2. No mesmo instante, um caminhão, que se move com uma velocidade constante de 9,5 m/s, ultrapassa o automóvel. (a) A que distância do sinal o automóvel alcança o caminhão? (b) Qual é a velocidade do automóvel nesse instante?

74 Um piloto voa horizontalmente a 1300 km/h a uma altura h = 35 m acima do solo inicialmente plano. No instante $t = 0$, o piloto começa a sobrevoar um terreno inclinado para cima de um ângulo $\theta = 4{,}3°$ (Figura 2-38). Se o piloto não mudar a trajetória do avião, em que instante t o avião se chocará com o solo?

Figura 2-38 Problema 74.

75 O tempo necessário para frear um carro pode ser dividido em duas partes: o tempo de reação para o motorista começar a frear e o tempo necessário para que a velocidade chegue a zero depois que o freio é acionado. A distância total percorrida por um carro é 56,7 m quando a velocidade inicial é 80,5 km/h e 24,4 m quando a velocidade inicial é 48,3 km/m. Supondo que a aceleração permanece constante depois que o freio é acionado, determine (a) o tempo de reação do motorista e (b) o módulo da aceleração.

76 A Fig. 2-39 mostra parte de uma rua na qual se pretende controlar o tráfego para permitir que um *pelotão* de veículos atravesse vários cruzamentos sem parar. Suponha que os primeiros carros do pelotão tenham acabado de chegar ao cruzamento 2, onde o sinal abriu quando os carros estavam a uma distância d do cruzamento. Os carros continuam a se mover a uma certa velocidade v_p (a velocidade máxima permitida) até chegarem ao cruzamento 3. As distâncias entre os cruzamentos são D_{23} e D_{12}. (a) Quanto tempo depois que o sinal do cruzamento 2 abriu o sinal do cruzamento 3 deve abrir para que o sinal do cruzamento 3 abra quando os primeiros carros do pelotão estão a uma distância d do cruzamento 3?

Suponha que o pelotão tenha encontrado o sinal fechado no cruzamento 1. Quando o sinal do cruzamento 1 abre, os carros da frente precisam de um certo tempo t para arrancar e de um tempo adicional para atingir a velocidade de cruzeiro v_p com uma certa aceleração a. (b) Quanto tempo depois que o sinal do cruzamento 1 abriu o sinal do cruzamento 2 deve abrir para que o sinal do cruzamento 2 abra quando os primeiros carros do pelotão estão a uma distância d do cruzamento 2?

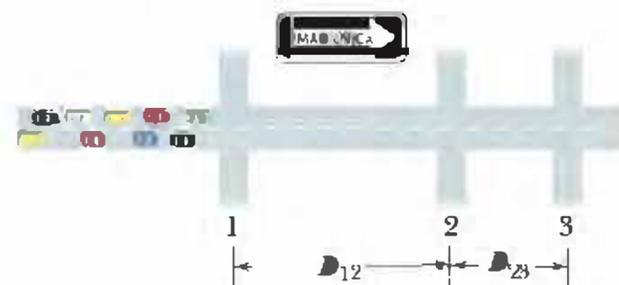



Figura 2-39 Problema 76.

77 Um carro de corrida é capaz de acelerar de 0 a 60 km/h em 5,4 s. (a) Qual é a aceleração média, em m/s^2, durante este intervalo? (b) Qual é a distância percorrida pelo carro em 5,4 s, supondo que a aceleração seja constante? (c) Quanto tempo o carro leva para percorrer uma distância de 0,25 km, a partir de repouso, mantendo uma aceleração constante igual ao valor do item (a)?

78 Um trem vermelho a 72 km/h e um trem verde a 144 km/h estão na mesma linha, retilínea e plana, movendo-se um em direção ao outro. Quando a distância entre os trens é 950 m, os dois maquinistas percebem o perigo e acionam os freios, fazendo com que os dois trens sofram uma desaceleração de 1,0 m/s^2. Os trens conseguem frear a tempo de evitar uma colisão? Caso a resposta seja negativa, determine as velocidades dos trens no momento da colisão; caso seja positiva, determine a distância final entre os trens.

79 No instante $t = 0$, um alpinista deixa cair um grampo, sem velocidade inicial, do alto de um paredão. Após um curto intervalo de tempo, o companheiro de escalada, que está 10 m acima, lança outro grampo para baixo. A Fig. 2-40 mostra as posições y dos grampos durante a queda em função do tempo t. Com que velocidade o segundo grampo foi lançado?

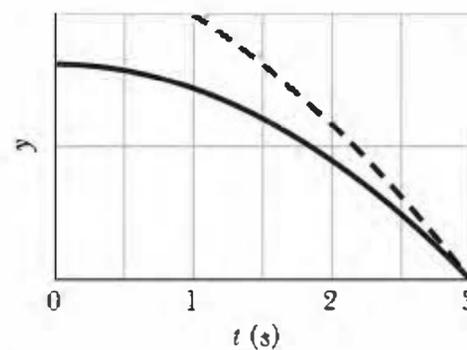



Figura 2-40 Problema 79.

80 Um trem partiu do repouso com aceleração constante. Em um certo instante, estava se movendo a 30 m/s; 160 m adiante, estava se movendo a 50 m/s. Calcule (a) a aceleração, (b) o tempo necessário

para percorrer os 160 m mencionados, (c) o tempo necessário para atingir a velocidade de 30 m/s e (d) a distância percorrida desde o repouso até o instante que o trem atingiu a velocidade de 30 m/s. (e) Desenhe os gráficos de x em função de t e de v em função de t, de $t = 0$ até o instante em que o trem atingiu a velocidade de 50 m/s.

81 A aceleração de uma partícula ao longo do eixo x é $a = 5{,}0t$, com t em segundos e a em metros por segundo ao quadrado. Em $t = 2{,}0$ s, a velocidade da partícula é +17 m/s. Qual é a velocidade da partícula em $t = 4{,}0$ s?

82 A Fig. 2-41 mostra a aceleração a em função do tempo t para uma partícula que se move ao longo do eixo x. A escala vertical do gráfico é definida por $a_s = 12{,}0$ m/s². No instante $t = -2{,}0$ s, a velocidade da partícula é 7,0 m/s. Qual é a velocidade da partícula no instante $t = 6{,}0$ s?

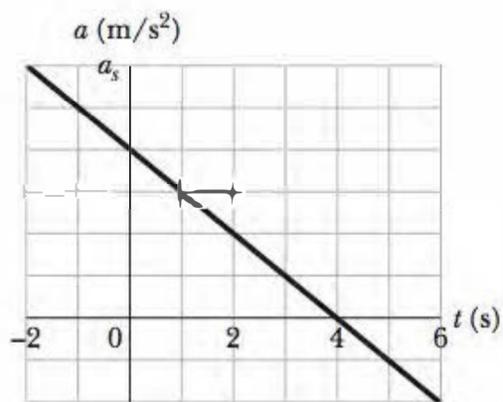



Figura 2-41 Problema 82.

83 A Fig. 2-42 mostra um dispositivo simples que pode ser usado para medir o seu tempo de reação: uma tira de papelão marcada com uma escala e dois pontos. Um amigo segura a tira na *vertical*, com o polegar e o indicador no ponto da direita da Fig. 2-42. Você posiciona o polegar e o indicador no outro ponto (o ponto da esquerda da Fig. 2-42), sem tocar a tira. Seu amigo solta a tira e você tenta segurá-la assim que percebe que começou a cair. A marca na posição em que você segura a tira corresponde ao seu tempo de reação. (a) A que distância do ponto inferior você deve colocar a marca de 50,0 ms? Por que valor você deve multiplicar essa distância para determinar a marca de (b) 100 ms, (c) 150 ms, (d) 200 ms, e (e) 250 ms? (Por exemplo: a marca de 100 ms deve estar no dobro da distância correspondente à marca de 50 ms? Nesse caso, a resposta seria 2. Você é capaz de identificar algum padrão nas respostas?)

Figura 2-42 Problema 83.

84 Trenós a jato, montados em trilhos retilíneos e planos, são usados para investigar os efeitos de grandes acelerações sobre seres humanos. Um desses trenós pode atingir uma velocidade de 1600 km/h em 1,8 s a partir do repouso. Determine (a) a aceleração (suposta constante) em unidades de g e (b) a distância percorrida.

85 Um vagonete de minério é puxado para o alto de uma encosta a 20 km/h e puxado ladeira abaixo a 35 km/h até a altura inicial. (O tempo gasto para inverter o movimento no alto da encosta é tão pequeno que pode ser desprezado.) Qual é a velocidade média do carrinho no percurso de ida e volta, ou seja, desde a altura inicial até voltar à mesma altura?

86 Um motociclista que está se movendo ao longo do eixo x na direção leste tem uma aceleração dada por $a = (6{,}1 - 1{,}2t)$ m/s² para $0 \leq t \leq 6{,}0$ s. Em $t = 0$, a velocidade e a posição do ciclista são 2,7 m/s e 7,3 m. (a) Qual é a velocidade máxima atingida pelo ciclista? (b) Qual é a distância percorrida pelo ciclista entre $t = 0$ e $t = 6{,}0$ s?

87 Quando a velocidade máxima permitida na New York Thruway foi aumentada de 55 milhas por hora para 65 milhas por hora, quanto tempo foi economizado por um motorista que dirigiu 700 km entre a entrada de Buffalo e a saída da cidade de Nova York na velocidade máxima permitida?

88 Um carro que se move com aceleração constante percorreu em 6,00 s a distância de 60,0 m que separa dois pontos. A velocidade do carro ao passar pelo segundo ponto era 15,0 m/s. (a) Qual era a velocidade no primeiro ponto? (b) Qual era o módulo de aceleração? (c) A que distância do primeiro ponto o carro se encontrava em repouso? (d) Desenhe os gráficos de x em função de t e v em função de t para o carro, desde o repouso ($t = 0$) até o segundo ponto.

89 Um certo malabarista normalmente arremessa bolas verticalmente até uma altura H. A que altura as bolas devem ser arremessadas para passarem o dobro do tempo no ar?

90 Uma partícula parte da origem em $t = 0$ e se move no sentido positivo do eixo x. O gráfico da velocidade da partícula em função do tempo é mostrado na Fig. 2-43; a escala vertical é definida por $v_s = 4{,}0$ m/s. (a) Qual é a coordenada da partícula em $t = 5{,}0$ s? (b) Qual é a velocidade da partícula em $t = 5{,}0$ s? (c) Qual é a aceleração da partícula em $t = 5{,}0$ s? (d) Qual é a velocidade média da partícula entre $t = 1{,}0$ s e $t = 5{,}0$ s? (e) Qual é a aceleração média da partícula entre $t = 1{,}0$ s e $t = 5{,}0$ s?

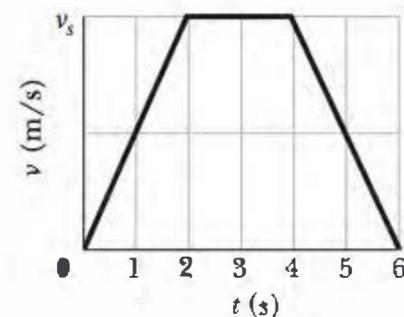



Figura 2-43 Problema 90.

91 Deixa-se cair uma pedra de um penhasco com 100 m de altura. Quanto tempo a pedra leva para cair (a) os primeiros 50 m e (b) os 50 m seguintes?

92 A distância entre duas estações de metrô é 1100 m. Se um trem acelera a +1,2 m/s² a partir do repouso na primeira metade da distância e desacelera a −1,2 m/s² na segunda metade, quais são (a) o tempo de percurso entre as estações e (b) a velocidade máxima do trem? (c) Desenhe os gráficos de x, v, e a em função de t para o percurso entre as duas estações.

93 Uma pedra é lançada verticalmente para cima. Durante a subida, passa por um ponto A com velocidade v e por um ponto B, 3,00 m acima de A, com velocidade $v/2$. Calcule (a) a velocidade v e (b) a altura máxima alcançada pela pedra acima do ponto B.

94 Deixa-se cair uma pedra, sem velocidade inicial, do alto de um edifício de 60 m. A que distância do solo está a pedra 1,2 s antes de chegar ao solo?

95 Um trenó a vela está se movendo para leste com velocidade constante quando uma rajada de vento produz uma aceleração constante para leste durante 3,0 s. O gráfico de x em função de t aparece na Fig. 2-44, onde $t = 0$ é tomado como o instante em que o

vento começou a soprar e o sentido positivo do eixo x é para leste. (a) Qual é a aceleração do trenó durante o intervalo de 3,0 s? (b) Qual é a velocidade do trenó no final do intervalo de 3,0 s? (c) Se a aceleração permanece constante por mais 3,0 s, qual é a distância percorrida pelo trenó no segundo intervalo de 3,0 s?

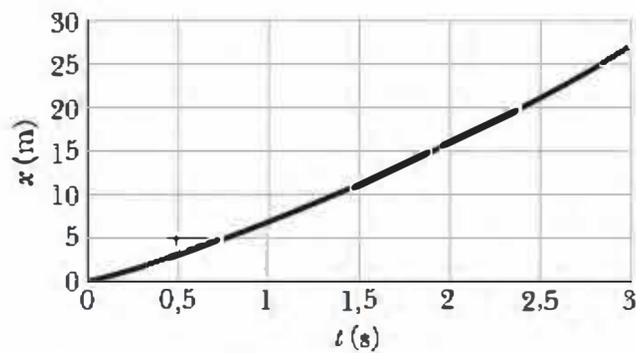



Figura 2-44 Problema 95.

96 Deixa-se cair uma bola de chumbo de um trampolim situado 5,20 m acima da superfície da água de um lago. A bola atinge a água com uma certa velocidade e conserva a mesma velocidade até chegar ao fundo do lago, 4,80 s após começar a cair. (a) Qual é a profundidade do lago? Quais são o (b) módulo e (c) o sentido (para cima ou para baixo) da velocidade média da bola durante a queda? Suponha que toda a água do lago seja drenada. A bola é agora lançada verticalmente do trampolim com uma certa velocidade inicial e novamente chega ao fundo em 4,80 s. Quais são (d) o módulo e (e) o sentido da velocidade inicial da bola?

97 O cabo que sustenta um elevador de obra vazio arrebenta quando o elevador está em repouso no alto de um edifício de 120 m de altura. (a) Com que velocidade o elevador chega ao solo? (b) Qual é o tempo de queda? (c) Qual é a velocidade do elevador ao passar pelo ponto médio da queda? (d) Por quanto tempo o elevador estava caindo ao passar pelo ponto médio?

98 Deixa-se cair dois diamantes da mesma altura, com 1,0 s de intervalo. Quanto tempo após o primeiro diamante começar a cair a distância entre os diamantes é 10 m?

99 Uma bola é lançada verticalmente para baixo do alto de um edifício com 36,6 m de altura. A bola passa pela extremidade superior de uma janela que está 12,2 m acima do solo 2,00 s após o lançamento. Qual é a velocidade da bola ao passar pela extremidade superior da janela?

100 Um paraquedista salta de um avião e percorre 50 m em queda livre. Em seguida, abre o paraquedas e sofre uma desaceleração constante de 2,0 m/s^2, chegando ao solo com uma velocidade de 3,0 m/s. (a) Quanto tempo o paraquedista passa no ar? (b) Qual era a altitude do avião no momento do salto?

101 Uma bola é lançada verticalmente *para baixo* de uma altura h com uma velocidade inicial v_0. (a) Qual é a velocidade da bola pouco antes de atingir o solo? (b) Quanto tempo a bola leva para chegar ao solo? Quais seriam as respostas (c) do item a e (d) do item b se a bola fosse lançada *para cima* da mesma altura e com a mesma velocidade inicial? Antes de calcular a resposta, verifique se as respostas dos itens (c) e (d) devem ser maiores, menores ou iguais às dos itens (a) e (b).

102 O esporte em que uma bola se move mais depressa é o jai alai, no qual as velocidades medidas chegam a 303 km/h. Se um jogador profissional de jai alai se defronta com uma bola a essa velocidade e pisca involuntariamente, deixa de ver a cena por cerca de 100 ms. Que distância a bola percorre durante esse piscar de olhos?

CAPÍTULO

3 VETORES

3-1 O QUE É FÍSICA?

A física lida com um grande número de grandezas que possuem uma amplitude e uma orientação e precisa de uma linguagem matemática especial, a linguagem dos vetores, para descrever essas grandezas. Essa linguagem também é usada na engenharia, em outras ciências e até mesmo nas conversas do dia a dia. Se você já explicou a alguém como chegar a um endereço usando expressões como "Siga por esta rua por cinco quarteirões e depois dobre à esquerda", usou a linguagem dos vetores. Na verdade, qualquer tipo de navegação se baseia em vetores, mas a física e a engenharia também usam vetores para descrever fenômenos que envolvem rotações e forças magnéticas, como veremos em capítulos posteriores. Neste capítulo, vamos discutir a linguagem básica dos vetores.

3-2 Vetores e Escalares

Uma partícula que se move em linha reta pode se deslocar em apenas dois sentidos, já que a direção é conhecida. Podemos considerar o deslocamento como positivo em um desses sentidos e negativo no outro. No caso de uma partícula que se move em qualquer outra trajetória, porém, um número positivo ou negativo não é suficiente para indicar a orientação; precisamos usar um *vetor*.

Um **vetor** possui um módulo e uma orientação; os vetores seguem certas regras de combinação, que serão discutidas neste capítulo. Uma **grandeza vetorial** é uma grandeza que possui um módulo e uma orientação e pode, portanto, ser representada por um vetor. O deslocamento, a velocidade e a aceleração são exemplos de grandezas físicas vetoriais. Como neste livro serão apresentadas muitas outras grandezas vetoriais, o conhecimento das regras de combinação de vetores será de grande utilidade para o leitor.

Nem toda grandeza física envolve uma orientação. A temperatura, a pressão, a energia, a massa e o tempo, por exemplo, não "apontam" em nenhuma direção. Chamamos essas grandezas de **escalares** e lidamos com elas pelas regras da álgebra comum. Um único valor, às vezes com um sinal (como no caso de uma temperatura de $-2°C$), é suficiente para especificar um escalar.

A grandeza vetorial mais simples é o deslocamento ou mudança de posição. Um vetor que representa um deslocamento é chamado, como seria de se esperar, de **vetor deslocamento**. (Outros exemplos de vetor são os vetores velocidade e o vetor aceleração.) Se uma partícula muda de posição movendo-se de A para B na Fig. 3-1*a*, dizemos que sofre um deslocamento de A para B, que representamos por uma seta apontando de A para B. A seta especifica o vetor graficamente. Para distinguir símbolos vetoriais de outros tipos de setas neste livro, usamos um triângulo vazado na ponta das setas que representam vetores.

Na Fig. 3-1*a*, as setas de A para B, de A' para B' e de A'' para B'' têm o mesmo módulo e a mesma orientação; assim, especificam vetores deslocamento iguais e representam a mesma *variação de posição* da partícula. Um vetor pode ser deslocado sem que o seu valor mude *se* comprimento, direção e sentido permanecerem os mesmos.

O vetor deslocamento nada nos diz sobre a trajetória percorrida por uma partícula. Na Fig. 3-1*b*, por exemplo, as três trajetórias que unem os pontos A e B correspondem ao mesmo vetor deslocamento, o da Fig. 3-1*a*. O vetor deslocamento não representa todo o movimento, mas apenas seu resultado final.

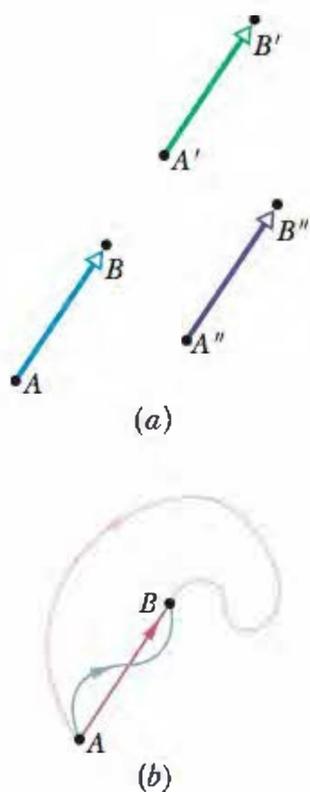



Figura 3-1 (*a*) As três setas têm o mesmo módulo e a mesma orientação e, portanto, representam o mesmo deslocamento. (*b*) As três trajetórias que ligam os dois pontos correspondem ao mesmo vetor deslocamento.

3-3 Soma Geométrica de Vetores

Suponha que, como no diagrama vetorial da Fig. 3-2*a*, uma partícula se desloque de *A* a *B* e, depois, de *B* a *C*. Podemos representar o deslocamento total (independentemente da trajetória seguida) através de dois vetores deslocamento sucessivos, *AB* e *BC*. O *deslocamento total* é um único deslocamento de *A* para *C*. Chamamos *AC* de **vetor soma** (ou **vetor resultante**) dos vetores *AB* e *BC*. Este tipo de soma não é uma soma algébrica comum.

Na Fig. 3-2*b*, desenhamos os vetores da Fig. 3-2*a* e os rotulamos da forma que será usada daqui em diante, com uma seta sobre um símbolo em itálico, como $\vec{a}$. Para indicar apenas o módulo do vetor (uma grandeza positiva e sem direção), usamos o símbolo do vetor em itálico sem a seta, como *a*, *b* e *s*. (Você pode usar simplesmente um símbolo manuscrito.) Uma seta sobre um símbolo indica que a grandeza representada pelo símbolo possui as propriedades de um vetor: módulo e orientação.

Podemos representar a relação entre os três vetores da Fig. 3-2*b* através da *equação vetorial*

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}, \tag{3-1}$$

segundo a qual o vetor $\vec{s}$ é o vetor soma dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. O símbolo + na Eq. 3-1 e a palavra "soma" têm um significado diferente no caso dos vetores porque, ao contrário do que acontece na álgebra comum, envolvem tanto o módulo como a orientação da grandeza.

A Fig. 3-2 sugere um método para somar geometricamente dois vetores bidimensionais $\vec{a}$ e $\vec{b}$. (1) Desenhe o vetor $\vec{a}$ em uma escala conveniente e com o ângulo apropriado. (2) Desenhe o vetor $\vec{b}$ na mesma escala, com a origem na extremidade do vetor $\vec{a}$, também com o ângulo apropriado. (3) O vetor soma $\vec{s}$ é o vetor que vai da origem de $\vec{a}$ à extremidade de $\vec{b}$.

A soma vetorial, definida desta forma, tem duas propriedades importantes. Em primeiro lugar, a ordem em que os vetores são somados é irrelevante. Somar $\vec{a}$ a $\vec{b}$ é o mesmo que somar $\vec{b}$ a $\vec{a}$ (Fig. 3-3), ou seja,

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \text{(lei comutativa).} \tag{3-2}$$

Em segundo lugar, quando existem mais de dois vetores, podemos agrupá-los em qualquer ordem para somá-los. Assim, se queremos somar os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, podemos somar $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e somar o resultado a $\vec{c}$. Podemos também somar $\vec{b}$ e $\vec{c}$ e depois somar o resultado a $\vec{a}$; o resultado é o mesmo, como mostra a Fig. 3-4. Assim,

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad \text{(lei associativa).} \tag{3-3}$$

O vetor $-\vec{b}$ é um vetor com o mesmo módulo e direção de $\vec{b}$ e o sentido oposto (veja a Fig. 3-5). A soma dos dois vetores da Fig. 3-5 é

$$\vec{b} + (-\vec{b}) = 0.$$

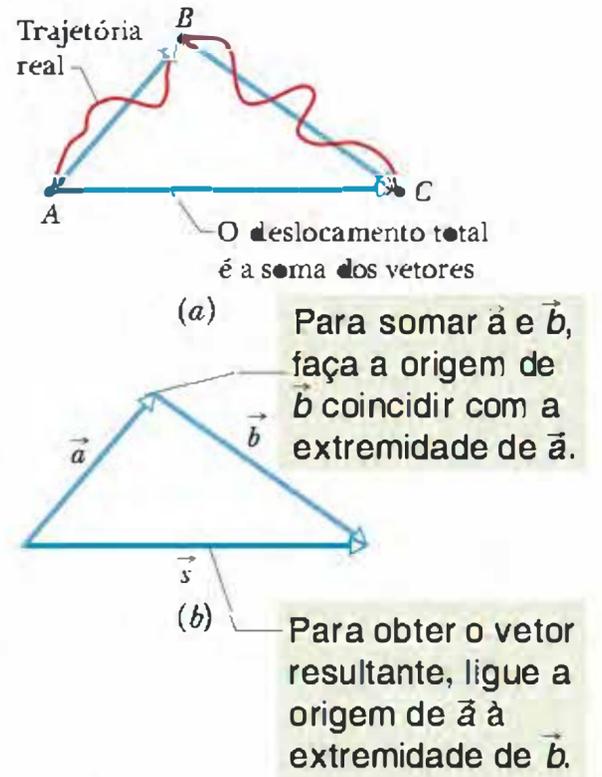



Figura 3-2 (*a*) *AC* é a soma vetorial dos vetores *AB* e *BC*. (*b*) Outra forma de rotular os mesmos vetores.

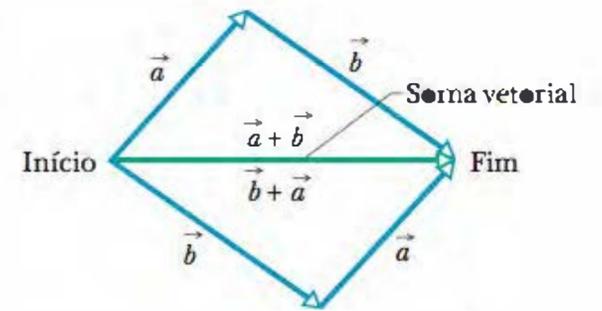



Figura 3-3 A ordem em que os vetores são somados não afeta o resultado; veja a Eq. 3-2.

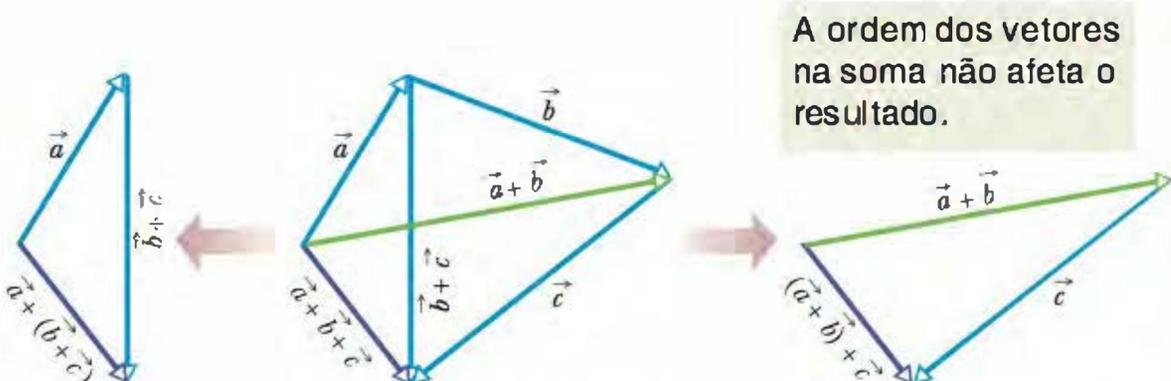



Figura 3-4 Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ podem ser agrupados em qualquer ordem para serem somados; veja a Eq. 3-3.

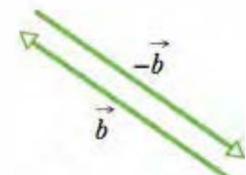



Figura 3-5 Os vetores $\vec{b}$ e $-\vec{b}$ têm o mesmo módulo e sentidos opostos.

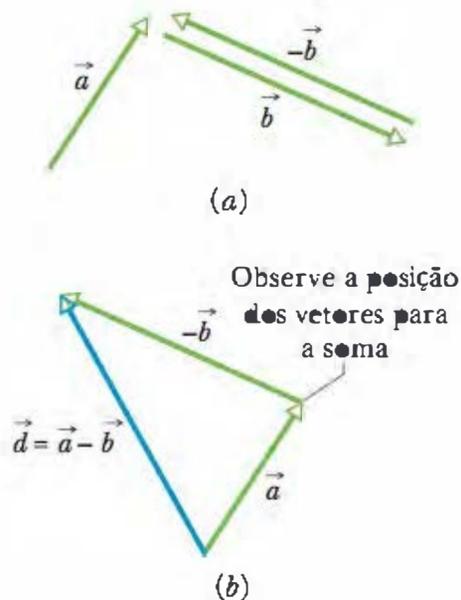



Figura 3-6 (a) Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $-\vec{b}$. (b) Para subtrair o vetor $\vec{b}$ do vetor $\vec{a}$, basta somar o vetor $-\vec{b}$ ao vetor $\vec{a}$.

Assim, somar $-\vec{b}$ é o mesmo que subtrair $\vec{b}$. Usamos esta propriedade para definir a diferença entre dois vetores. Se $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, temos:

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad \text{(subtração de vetores);} \qquad (3\text{-}4)$$

ou seja, calculamos o vetor diferença $\vec{d}$ somando o vetor $-\vec{b}$ ao vetor $\vec{a}$. A Fig. 3-6 mostra como isso é feito geometricamente.

Como na álgebra comum, podemos passar um termo que inclui um símbolo de vetor de um lado de uma equação vetorial para o outro, mas devemos mudar o sinal. Assim, por exemplo, para explicitar $\vec{a}$ na Eq. 3-4, escrevemos a equação na forma

$$\vec{d} + \vec{b} = \vec{a} \quad \text{ou} \quad \vec{a} = \vec{d} + \vec{b}.$$

Embora tenhamos usado nestes exemplos vetores deslocamento, as regras para somar e subtrair vetores se aplicam a vetores de qualquer tipo, sejam eles usados para representar velocidade, aceleração ou qualquer outra grandeza vetorial. Entretanto, apenas vetores do mesmo tipo podem ser somados. Assim, por exemplo, podemos somar dois deslocamentos ou duas velocidades, mas não faz sentido somar um deslocamento e uma velocidade. Na aritmética dos escalares, isso seria como tentar somar 21 s e 12 m.

TESTE 1

Os módulos dos deslocamentos $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são 3 m e 4 m, respectivamente, e $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Considerando as várias orientações possíveis de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, qual é (a) o maior e (b) o menor valor possível do módulo de $\vec{c}$?

Exemplo

Soma gráfica de vetores em um teste de campo

Em um teste de campo, você recebe a tarefa de se afastar o máximo possível de um acampamento através de três deslocamentos retilíneos. Você pode usar os seguintes deslocamentos, em qualquer ordem: (a) $\vec{a}$, 2,0 km para leste; (b) $\vec{b}$, 2,0 km 30° ao norte do leste; (c) $\vec{c}$, 1,0 km para oeste. Você pode também substituir $\vec{b}$ por $-\vec{b}$ e $\vec{c}$ por $-\vec{c}$. Qual é a maior distância que você pode atingir após o terceiro deslocamento?

Figura 3-7 (a) Vetores deslocamento; três devem ser usados. (b) A distância do acampamento será a maior possível se os deslocamentos escolhidos forem $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $-\vec{c}$, em qualquer ordem.

Raciocínio Usando uma escala conveniente, desenhamos os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $-\vec{b}$ e $-\vec{c}$, como na Fig. 3-7*a*. Em seguida, deslocamos mentalmente os vetores sobre a página, sem mudar a orientação, ligando três vetores de cada vez, em um arranjo no qual a origem do segundo vetor está ligada à extremidade do primeiro e a origem do terceiro está ligada à extremidade do segundo, para encontrar o vetor soma, $\vec{d}$. A origem do primeiro vetor representa o acampamento. A extremidade do terceiro vetor representa o ponto de destino. O vetor soma $\vec{d}$ vai da origem do primeiro vetor à extremidade do terceiro. O módulo d do vetor soma é a distância entre o ponto de destino e o acampamento.

Examinando todos os casos possíveis, descobrimos que a distância é máxima para o arranjo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $-\vec{c}$. A ordem em que os vetores são somados não importa, já que a soma vetorial é a mesma para qualquer ordem. A ordem mostrada na Fig. 3-7*b* é para a soma vetorial

$$\vec{d} = \vec{b} + \vec{a} + (-\vec{c}).$$

Usando a escala da Fig. 3-7*a*, medimos o comprimento d do vetor resultante, encontrando

$$d = 4{,}8 \text{ m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

3-4 Componentes de Vetores

Somar vetores geometricamente pode ser uma tarefa tediosa. Uma técnica mais elegante e mais simples envolve o uso da álgebra, mas requer que os vetores sejam representados em um sistema de coordenadas retangulares. Os eixos x e y são normalmente desenhados no plano do papel, como na Fig. 3-8*a*. O eixo z é perpendicular ao papel; vamos ignorá-lo por enquanto e tratar apenas de vetores bidimensionais.

Uma **componente** de um vetor é a projeção do vetor em um eixo. Na Fig. 3-8*a*, por exemplo, a_x é a componente do vetor $\vec{a}$ em relação ao eixo x e a_y é a componente em relação ao eixo y. Para encontrar a projeção de um vetor em um eixo, traçamos retas perpendiculares ao eixo a partir da origem e da extremidade do vetor, como mostra a figura. A projeção de um vetor no eixo x é chamada de *componente x* do vetor; a projeção no eixo y recebe o nome de *componente y*. O processo de obter as componentes de um vetor é chamado de **decomposição do vetor**.

Uma componente de um vetor tem o mesmo sentido (em relação a um eixo) que o vetor. Na Fig. 3-8, a_x e a_y são positivas porque $\vec{a}$ aponta no sentido positivo dos dois eixos. (Observe as setas que mostram o sentido das componentes.) Se invertêssemos o sentido do vetor $\vec{a}$, as componentes seriam negativas e as setas apontariam no sentido negativo dos eixos x e y. A decomposição do vetor $\vec{b}$ da Fig. 3-9 leva a uma componente b_x positiva e a uma componente b_y negativa.

Um vetor pode ter até três componentes, mas, no caso do vetor da Fig. 3-8*a*, a componente z é nula. Como mostram as Figs. 3-8*a* e *b*, quando deslocamos um vetor sem mudar a orientação, as componentes não mudam.

Podemos determinar geometricamente as componentes de $\vec{a}$ na Fig. 3-8*a* a partir do triângulo retângulo mostrado na figura:

$$a_x = a\cos\theta \quad \text{e} \quad a_y = a\,\text{sen}\,\theta, \tag{3-5}$$

onde θ é o ângulo que o vetor $\vec{a}$ faz com o semieixo x positivo e a é o módulo de $\vec{a}$. A Fig. 3-8*c* mostra que $\vec{a}$ e as componentes x e y do vetor formam um triângulo retângulo. A figura mostra também que é possível reconstruir um vetor a partir das componentes: basta posicionar a origem de uma das componentes na extremidade da outra e completar o triângulo retângulo ligando a origem livre à extremidade livre.

Uma vez que um vetor tenha sido decomposto em relação a um conjunto de eixos, as componentes podem ser usadas no lugar do vetor. Assim, por exemplo, o vetor $\vec{a}$ da Fig. 3-8*a* é dado (completamente determinado) por a e θ, mas também

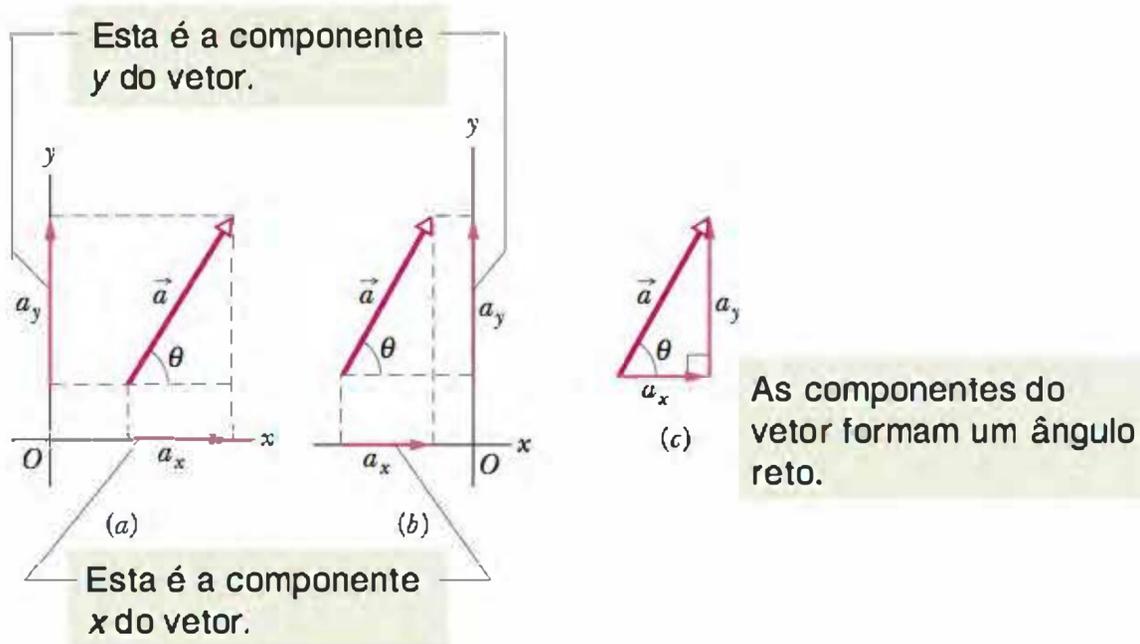



Figura 3-8 (*a*) As componentes a_x e a_y do vetor $\vec{a}$. (*b*) As componentes não mudam quando o vetor é deslocado, desde que o módulo e a orientação sejam mantidos. (c) As componentes correspondem aos catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é o módulo do vetor.

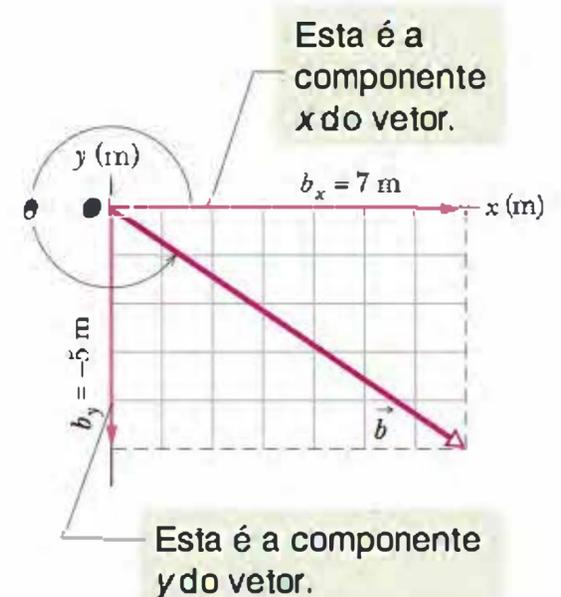



Figura 3-9 A componente x de $\vec{b}$ é positiva e a componente y é negativa.

pode ser dado pelas componentes a_x e a_y. Os dois pares de valores contêm a mesma informação. Se conhecemos um vetor na *notação de componentes* (a_x e a_y) e queremos especificá-lo na notação *módulo-ângulo* (a e θ), basta usar as equações

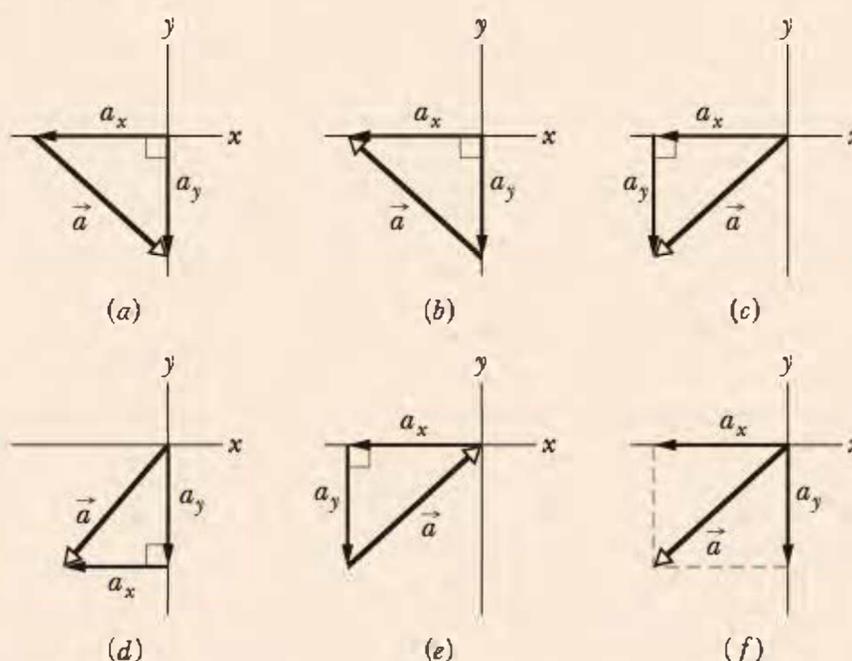
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{e} \quad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x} \qquad (3\text{-}6)$$

para efetuar a transformação.

No caso mais geral de três dimensões, precisamos do módulo e de dois ângulos (a, θ e ϕ, digamos) ou de três componentes (a_x, a_y e a_z) para especificar um vetor.

TESTE 2

Quais dos métodos indicados na figura são corretos para determinar o vetor $\vec{a}$ a partir das componentes x e y?

(a) (b) (c) (d) (e) (f)

Exemplo

Determinação dos componentes de um vetor: rota de um avião

Um pequeno avião decola de um aeroporto em um dia nublado e é avistado mais tarde a 215 km de distância, em um curso que faz um ângulo de 22° a leste do norte. A que distância a leste e ao norte do aeroporto está o avião no momento em que é avistado?

IDEIA-CHAVE

Conhecemos o módulo (215 km) e o ângulo (22° a leste do norte) de um vetor e precisamos determinar as componentes do vetor.

Cálculos Desenhamos um sistema de coordenadas xy com o sentido positivo de x para leste e o de y para o norte (Fig. 3-10). Por conveniência, a origem é colocada no aeroporto. O deslocamento $\vec{d}$ do avião aponta da origem para o ponto onde o avião foi avistado.

Para determinar as componentes de $\vec{d}$, usamos a Eq. 3-5 com $\theta = 68°$ ($= 90° - 22°$):

$$d_x = d\cos\theta = (215 \text{ km})(\cos 68°) = 81 \text{ km} \qquad \text{(Resposta)}$$

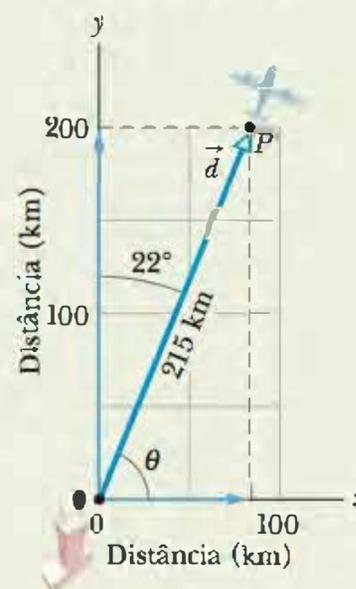



Figura 3-10 Um avião decola de um aeroporto na origem e é avistado mais tarde no ponto P.

$$d_y = d\,\text{sen}\,\theta = (215 \text{ km})(\text{sen } 68°) = 199 \text{ km} \approx 2{,}0 \times 10^2 \text{ km}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, o avião foi avistado 81 km a leste e $2{,}0 \times 10^2$ km ao norte do aeroporto.

Táticas para a Solução de Problemas

Ângulos, funções trigonométricas e funções trigonométricas inversas

Tática 1: Ângulos–Graus e Radianos Ângulos medidos em relação ao semieixo x positivo são positivos se são medidos no sentido anti-horário e negativos se medidos no sentido horário. Assim, por exemplo, 210° e −150° representam o mesmo ângulo.

Os ângulos podem ser medidos em graus ou em radianos (rad). Para relacionar as duas unidades, lembre-se de que uma circunferência é descrita por um ângulo de 360° ou 2π rad. Para converter, digamos, 40° para radianos, escrevemos

$$40° \frac{2\pi \text{ rad}}{360°} = 0{,}70 \text{ rad}.$$

Tática 2: Funções Trigonométricas A Fig. 3-11 mostra as definições das funções trigonométricas básicas (seno, cosseno e tangente), muito usadas na ciência e na engenharia, em uma forma que não depende do modo como o triângulo é rotulado.

O leitor deve saber como essas funções trigonométricas variam com o ângulo (Fig. 3-12), para poder julgar se o resultado mostrado por uma calculadora é razoável. Em algumas circunstâncias, o simples conhecimento do sinal das funções nos vários quadrantes pode ser útil.

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{cateto adjacente a } \theta}$$

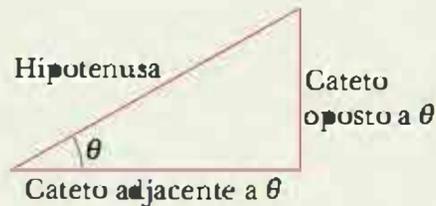



Figura 3-11 Triângulo usado para definir as funções trigonométricas. Veja também o Apêndice E.

Tática 3: Funções Trigonométricas Inversas Quando se usa uma calculadora para obter o valor de uma função trigonométrica inversa como sen^{-1}, $\cos^{-1}$ e $\tan^{-1}$, é preciso verificar se o resultado faz sentido, pois, em geral, existe outra solução possível que a calculadora não fornece. Os intervalos em que as calculadoras operam ao fornecer os valores das funções trigonométricas inversas estão indicados na Fig. 3-12. Assim, por exemplo, $\text{sen}^{-1}(0{,}5)$ pode ser igual a 30° (que é o valor mostrado pela calculadora, já que 30° está no intervalo de operação) ou a 150°. Para verificar que isso é verdade, trace uma reta horizontal passando pelo valor 0,5 na escala vertical da Fig. 3-12a e observe os pontos em que a reta intercepta a curva da função seno. Como é possível saber qual é a resposta correta? É a que parece mais razoável para uma dada situação.

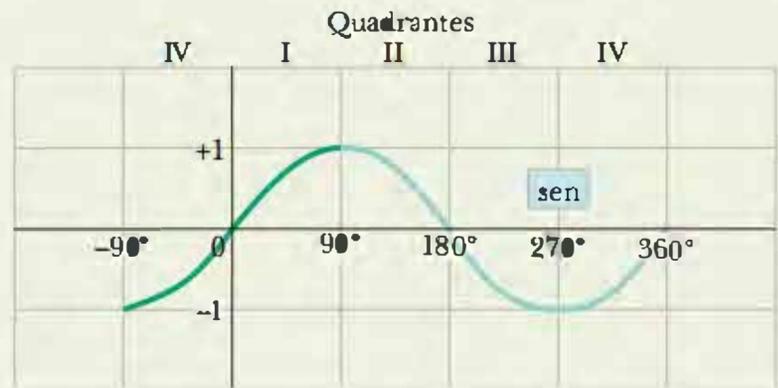
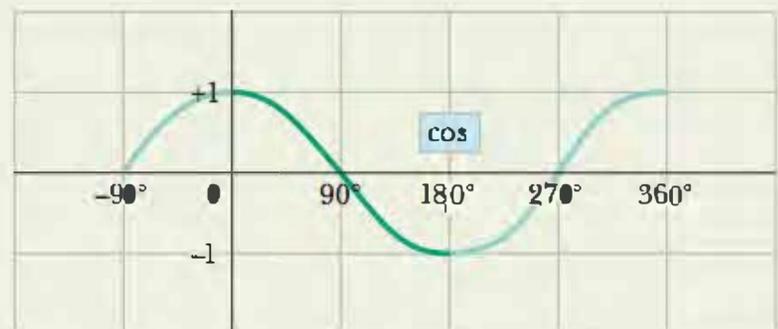
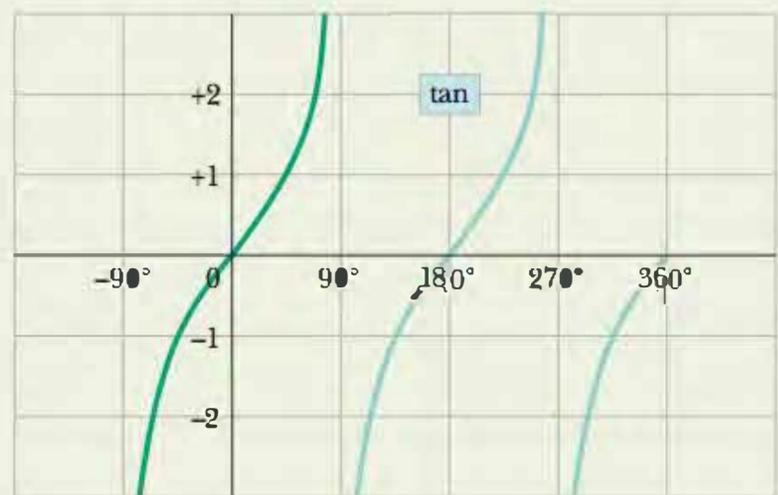
Tática 4: Medida dos Ângulos de um Vetor As expressões de $\cos\theta$ e $\text{sen}\,\theta$ na Eq. 3-5 e de $\tan\theta$ na Eq. 3-6 são válidas apenas se o ângulo for medido em relação ao semieixo x positivo. Se o ângulo for medido em relação a outro eixo, talvez seja preciso trocar as funções trigonométricas da Eq. 3-5 ou inverter a razão da Eq. 3-6. Um método mais seguro é converter o ângulo dado em um ângulo medido em relação ao semieixo x positivo.

(a)

(b)

(c)

Figura 3-12 Gráficos das três funções trigonométricas. As partes mais escuras das curvas correspondem aos valores fornecidos pelas calculadoras para as funções trigonométricas *inversas*.

3-5 Vetores Unitários

Vetor unitário é um vetor cujo módulo é 1 e que aponta em uma certa direção. Um vetor unitário não possui dimensão nem unidade; sua única função é especificar uma orientação. Neste livro, os vetores unitários que indicam os sentidos positivos dos eixos x, y e z, são representados como $\hat{\mathrm{i}}$, $\hat{\mathrm{j}}$ e $\hat{\mathrm{k}}$, respectivamente, onde o símbolo ^

Os vetores unitários coincidem com os eixos.

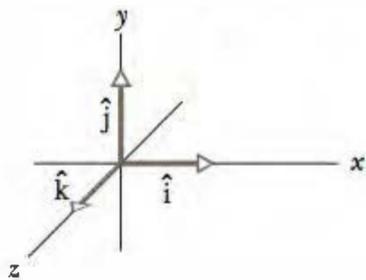
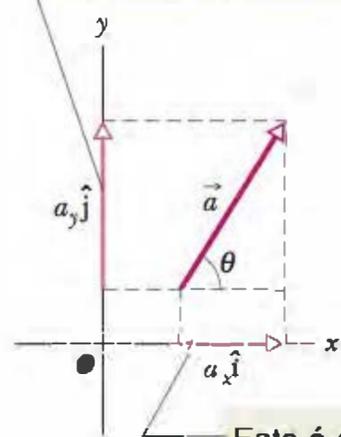



Figura 3-13 Os vetores unitários $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ definem os sentidos positivos de um sistema de coordenadas dextrogiro.

Esta é a componente y do vetor.

Esta é a componente x do vetor.

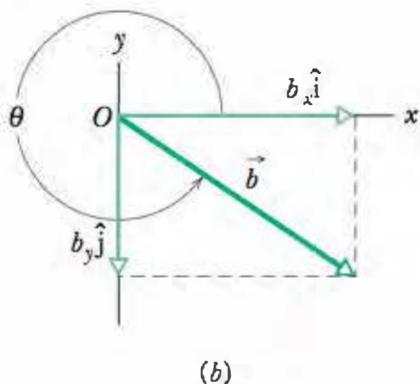



Figura 3-14 (*a*) Componentes vetoriais do vetor $\vec{a}$. (*b*) Componentes vetoriais do vetor $\vec{b}$.

é usado, em lugar de uma seta, para mostrar que se trata de vetores unitários (Fig. 3-13). Um sistema de eixos como o da Fig. 3-13 é chamado de **sistema de coordenadas dextrogiro**. O sistema permanece dextrogiro quando os três eixos sofrem a mesma rotação, qualquer que seja. Os sistemas de coordenadas usados neste livro são todos dextrogiros.

Os vetores unitários são muito úteis para especificar outros vetores; assim, por exemplo, podemos expressar os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ das Figs. 3-8 e 3-9 como

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \tag{3-7}$$

e

$$\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j}. \tag{3-8}$$

Essas duas equações estão ilustradas na Fig. 3-14. As grandezas $a_x\hat{i}$ e $a_y\hat{j}$ são vetores, conhecidos como **componentes vetoriais** de $\vec{a}$. As grandezas a_x e a_y são escalares, conhecidos como **componentes escalares** (ou, simplesmente, **componentes**) de $\vec{a}$.

3-6 Soma de Vetores a partir das Componentes

Podemos somar vetores geometricamente, usando um desenho. Também podemos somar vetores diretamente na tela de uma calculadora gráfica. Uma terceira forma de somar vetores, que é a forma que discutiremos em seguida, consiste em combinar as componentes eixo por eixo.

Para começar, considere a equação

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}, \tag{3-9}$$

segundo a qual o vetor $\vec{r}$ é igual ao vetor $(\vec{a} + \vec{b})$. Nesse caso, cada componente de $\vec{r}$ é igual à componente correspondente de $(\vec{a} + \vec{b})$:

$$r_x = a_x + b_x \tag{3-10}$$

$$r_y = a_y + b_y \tag{3-11}$$

$$r_z = a_z + b_z. \tag{3-12}$$

Em outras palavras, dois vetores são iguais se as componentes correspondentes forem iguais. De acordo com as Eqs. 3-9 a 3-12, para somar dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, podemos (1) obter as componentes escalares dos vetores; (2) combinar as componentes escalares, eixo por eixo, para obter as componentes do vetor soma, $\vec{r}$; (3) combinar as componentes de $\vec{r}$ para obter o vetor $\vec{r}$. Isso pode ser feito de duas maneiras: podemos expressar $\vec{r}$ em termos dos vetores unitários ou através da notação módulo-ângulo.

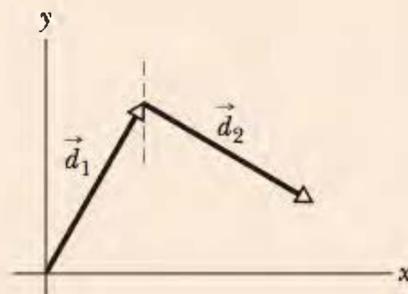
Esse método de somar vetores usando componentes também se aplica à subtração. Lembre-se de que uma subtração como $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ pode ser escrita como uma adição da forma $\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Para subtrair, somamos as componentes de $\vec{a}$ e $-\vec{b}$ para obter

$$d_x = a_x - b_x, \quad d_y = a_y - b_y, \quad \text{e} \quad d_z = a_z - b_z,$$

onde

$$\vec{d} = d_x\hat{i} + d_y\hat{j} + d_z\hat{k}. \tag{3-13}$$

TESTE 3

(a) Quais são os sinais das componentes x de $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$ na figura? (b) Quais são os sinais das componentes y de $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$? Quais são os sinais das componentes x e y de $\vec{d}_1 + \vec{d}_2$?

Exemplo

Soma de vetores usando vetores unitários

A Figura 3-15a mostra os seguintes vetores:

$$\vec{a} = (4{,}2\text{ m})\hat{\imath} - (1{,}5\text{ m})\hat{\jmath},$$
$$\vec{b} = (-1{,}6\text{ m})\hat{\imath} + (2{,}9\text{ m})\hat{\jmath},$$
e
$$\vec{c} = (-3{,}7\text{ m})\hat{\jmath}.$$

Qual é o vetor soma $\vec{r}$ que também aparece na Fig. 3-15a?

Para somar os vetores, calcule a componente total x e a componente total y.

Em seguida, determine a resultante das componentes totais.

Este é o resultado da soma.

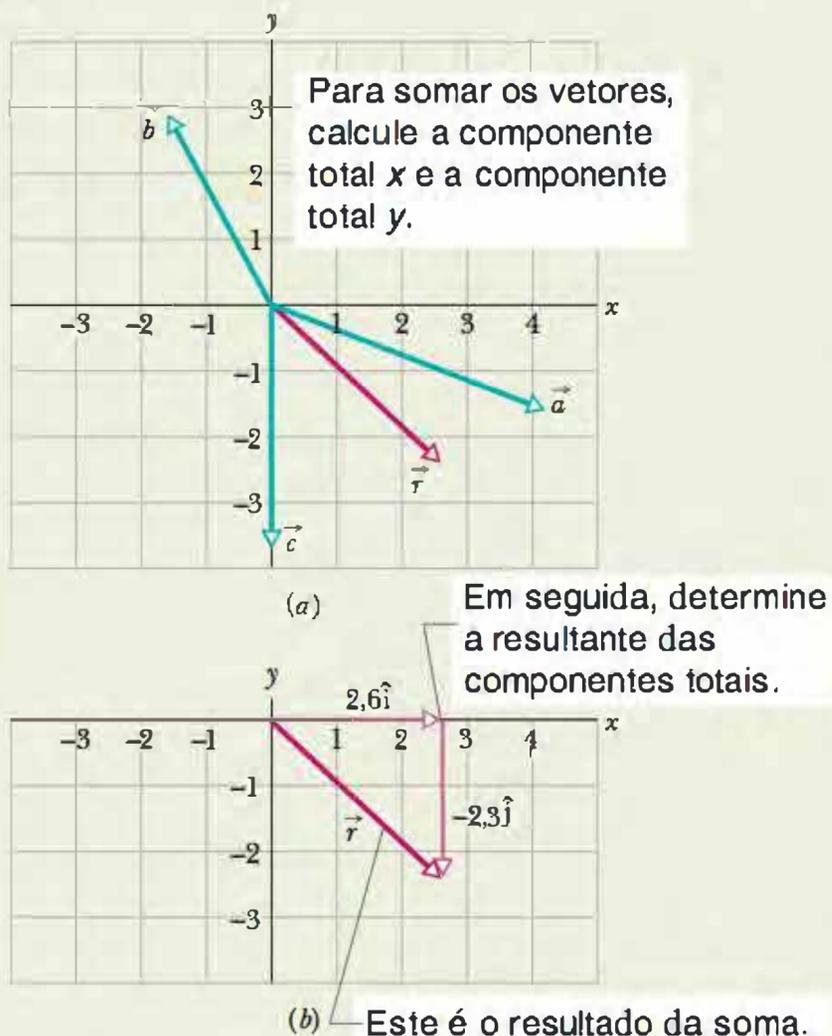



Figura 3-15 O vetor $\vec{r}$ é a soma vetorial dos outros três vetores.

IDEIA-CHAVE

Podemos somar os três vetores somando as componentes, eixo por eixo, e usando as componentes resultantes para obter o vetor soma $\vec{r}$.

Cálculos No caso do eixo x, somamos as componentes x de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ para obter a componente x do vetor soma $\vec{r}$:

$$r_x = a_x + b_x + c_x$$
$$= 4{,}2\text{ m} - 1{,}6\text{ m} + 0 = 2{,}6\text{ m}.$$

Analogamente, no caso do eixo y,

$$r_y = a_y + b_y + c_y$$
$$= -1{,}5\text{ m} + 2{,}9\text{ m} - 3{,}7\text{ m} = -2{,}3\text{ m}.$$

Podemos combinar essas componentes de $\vec{r}$ para escrever o vetor em termos dos vetores unitários:

$$\vec{r} = (2{,}6\text{ m})\hat{\imath} - (2{,}3\text{ m})\hat{\jmath}, \quad \text{(Resposta)}$$

onde $(2{,}6\text{ m})\hat{\imath}$ é a componente vetorial de $\vec{r}$ em relação ao eixo x e $-(2{,}3\text{ m})\hat{\jmath}$ é a componente vetorial de $\vec{r}$ em relação ao eixo y. A Fig. 3-15b mostra uma das formas de obter o vetor $\vec{r}$ a partir dessas componentes. (Qual é a outra forma?)

Também podemos resolver o problema determinando o módulo e o ângulo de $\vec{r}$. De acordo com a Eq. 3-6, o módulo é dado por

$$r = \sqrt{(2{,}6\text{ m})^2 + (-2{,}3\text{ m})^2} \approx 3{,}5\text{ m} \quad \text{(Resposta)}$$

e o ângulo (medido em relação ao semieixo x positivo) é dado por

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-2{,}3\text{ m}}{2{,}6\text{ m}}\right) = -41°, \quad \text{(Resposta)}$$

onde o sinal negativo significa que o ângulo deve ser medido no sentido horário.

Exemplo

Soma de vetores usando componentes: formiga do deserto

A formiga do deserto *Cataglyphis fortis* vive nas planícies do deserto do Saara. Quando uma dessas formigas sai à procura de alimento, percorre um caminho aleatório em um terreno plano, arenoso, desprovido de acidentes geográficos que possam ser usados como referência. Mesmo assim, quando a formiga decide voltar ao formigueiro, ruma diretamente para casa. De acordo com as pesquisas, a formiga do deserto mantém um registro dos seus movimentos em um sistema de coordenadas mental. Quando decide voltar ao formigueiro, soma os deslocamentos em relação aos eixos do sistema para calcular um vetor que aponta diretamente para o ponto de partida. Como exemplo desse cálculo, considere uma formiga que executa cinco movimentos de 6,0 cm em um sistema de coordenadas xy, nas orientações mostradas na Fig. 3-16a, partindo do formigueiro. No final do quinto movimento, quais são o módulo e o ângulo do vetor deslocamento total $\vec{d}_{tot}$ e quais são os valores correspondentes do vetor de retorno $\vec{d}_{volta}$ que liga a posição final da formiga à posição do formigueiro? Em uma situação real, esse cálculo vetorial pode envolver milhares desses movimentos.

IDEIAS-CHAVE

(1) Para encontrar o deslocamento resultante $\vec{d}_{tot}$, precisamos somar os cinco vetores deslocamento:

$$\vec{d}_{tot} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3 + \vec{d}_4 + \vec{d}_5.$$

(2) Calculamos esta soma apenas para a componente x,

$$d_{tot,x} = d_{1x} + d_{2x} + d_{3x} + d_{4x} + d_{5x}, \quad (3\text{-}14)$$

e apenas para a componente y,

$$d_{tot,y} = d_{1y} + d_{2y} + d_{3y} + d_{4y} + d_{5y}. \quad (3\text{-}15)$$

(3) Obtemos o vetor $\vec{d}_{tot}$ a partir das componentes x e y.

Cálculos Para resolver a Eq. 3-14, aplicamos a parte correspondente a x da Eq. 3-5 a cada movimento:

$$d_{1x} = (6{,}0 \text{ cm}) \cos 0° = +6{,}0 \text{ cm}$$
$$d_{2x} = (6{,}0 \text{ cm}) \cos 150° = -5{,}2 \text{ cm}$$
$$d_{3x} = (6{,}0 \text{ cm}) \cos 180° = -6{,}0 \text{ cm}$$
$$d_{4x} = (6{,}0 \text{ cm}) \cos(-120°) = -3{,}0 \text{ cm}$$
$$d_{5x} = (6{,}0 \text{ cm}) \cos 90° = 0.$$

A Eq. 3-14 nos dá

$$\begin{aligned} d_{tot,x} &= +6{,}0 \text{ cm} + (-5{,}2 \text{ cm}) + (-6{,}0 \text{ cm}) \\ &\quad + (-3{,}0 \text{ cm}) + 0 \\ &= -8{,}2 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Analogamente, calculamos as componentes y dos cinco movimentos usando a parte correspondente a y da Eq. 3-5. Os resultados aparecem na Tabela 3-1. Substituindo esses resultados na Eq. 3-15, obtemos:

$$d_{tot,y} = +3{,}8 \text{ cm}.$$

Tabela 3-1

Mov.	d_x (cm)	d_y (cm)
1	+6,0	0
2	−5,2	+3,0
3	−6,0	0
4	−3,0	−5,2
5	0	+6,0
total	−8,2	+3,8

O vetor $\vec{d}_{tot}$ e suas componentes x e y aparecem na Fig. 3-16b. Para encontrar o módulo e o ângulo de $\vec{d}_{tot}$ a partir das componentes, usamos a Eq. 3-6. O módulo é dado por

$$\begin{aligned} d_{tot} &= \sqrt{d_{tot,x}^2 + d_{tot,y}^2} \\ &= \sqrt{(-8{,}2 \text{ cm})^2 + (3{,}8 \text{ cm})^2} = 9{,}0 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Para encontrar o ângulo (medido a partir do semieixo x positivo), calculamos o arco tangente:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{d_{tot,y}}{d_{tot,x}}\right) \quad (3\text{-}16)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{3{,}8 \text{ cm}}{-8{,}2 \text{ cm}}\right) = -24{,}86°.$$

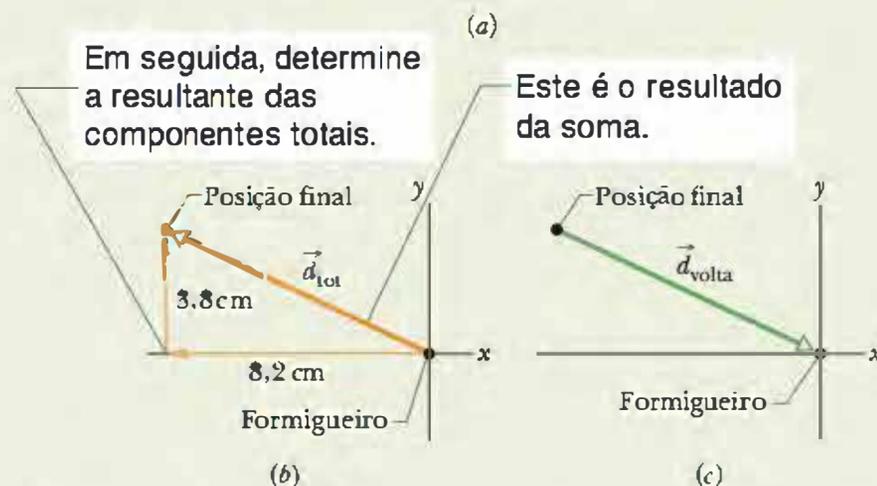
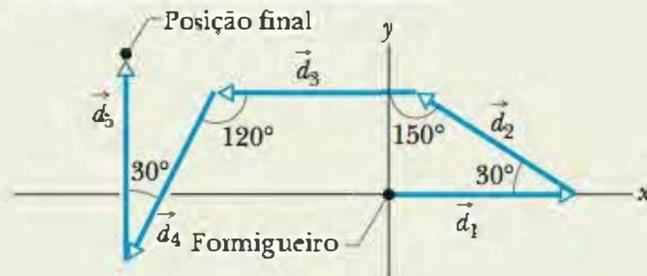



Figura 3-16 (a) Movimentos de uma formiga do deserto. (b) Componentes x e y de $\vec{d}_{tot}$. (c) O vetor $\vec{d}_{volta}$ indica o caminho de volta para o formigueiro.

Atenção: Como foi dito na Tática para a Solução de Problemas 3, uma calculadora nem sempre fornece o resultado correto para o arco tangente. A resposta −24,86° parece indicar que vetor $\vec{d}_{tot}$ está no quarto quadrante do nosso sistema de coordenadas xy. Entretanto, quando desenhamos o vetor a partir das componentes (Fig. 3-16b), vemos que $\vec{d}_{tot}$ está no segundo quadrante. Assim, precisamos "corrigir" a resposta da calculadora somando 180°:

$$\theta = -24{,}86° + 180° = 155{,}14° \approx 155°. \quad (3\text{-}17)$$

Assim, o deslocamento $\vec{d}_{tot}$ da formiga, na notação módulo-ângulo, é dado por

$$d_{tot} = 9{,}0 \text{ cm e } 155°. \quad \text{(Resposta)}$$

O vetor $\vec{d}_{volta}$, que aponta da formiga para o formigueiro, tem o mesmo módulo que $\vec{d}_{tot}$ e o sentido oposto (Fig. 3-16c). Já temos o ângulo (−24,86° ≈ −25°) para o sentido oposto a $\vec{d}_{tot}$. Assim, $\vec{d}_{volta}$ é dado por

$$d_{volta} = 9{,}0 \text{ cm e } -25°. \quad \text{(Resposta)}$$

Uma formiga do deserto que se afasta mais de 500 m do formigueiro realiza, na verdade, milhares de movimentos. Ainda assim, de alguma forma é capaz de calcular $\vec{d}_{volta}$ (sem estudar este capítulo).

3-7 Vetores e as Leis da Física

Até agora, em toda a figura em que aparece um sistema de coordenadas, os eixos x e y são paralelos às bordas do papel. Assim, quando um vetor $\vec{a}$ é desenhado, as componentes a_x e a_y também são paralelas às bordas do papel (como na Fig. 3-17*a*). A única razão para usar esta orientação dos eixos é que parece "apropriada"; não existe uma razão mais profunda. Podemos, perfeitamente, girar os eixos (mas não o vetor $\vec{a}$) de um ângulo ϕ, como na Fig. 3-17*b*, caso em que as componentes terão novos valores, a'_x e a'_y. Como existe uma infinidade de valores possíveis de ϕ, existe um número infinito de pares possíveis de componentes de $\vec{a}$.

Qual é, então, o par de componentes "correto"? A resposta é que são todos igualmente válidos, já que cada par (com o sistema de eixos correspondente) constitui uma forma diferente de descrever o mesmo vetor $\vec{a}$; todos produzem o mesmo módulo e a mesma orientação para o vetor. Na Fig. 3-17, temos:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2} \tag{3-18}$$

e

$$\theta = \theta' + \phi. \tag{3-19}$$

A verdade é que temos uma grande liberdade para escolher o sistema de coordenadas, já que as relações entre vetores não dependem da localização da origem nem da orientação dos eixos. Isso também se aplica às leis da física; são todas independentes da escolha do sistema de coordenadas. Acrescente a isso a simplicidade e riqueza da linguagem dos vetores e é fácil compreender por que as leis da física são quase sempre apresentadas nessa linguagem: uma equação, como a Eq. 3-9, pode representar três (ou até mais) relações, como as Eqs. 3-10, 3-11 e 3-12.

3-8 Multiplicação de Vetores*

Existem três formas de multiplicar vetores, mas nenhuma é exatamente igual à multiplicação algébrica. Ao ler esta seção, tenha em mente que uma calculadora o ajudará a multiplicar vetores apenas se você compreender as regras básicas deste tipo de multiplicação.

Multiplicação de um Vetor por um Escalar

Quando multiplicamos um vetor $\vec{a}$ por um escalar s, obtemos outro vetor cujo módulo é o produto do módulo de $\vec{a}$ pelo valor absoluto de s, cuja direção é a mesma de $\vec{a}$ e cujo sentido é o mesmo de $\vec{a}$ se s for positivo e o sentido oposto se s for negativo. Para dividir $\vec{a}$ por s, multiplicamos $\vec{a}$ por $1/s$.

Se os eixos giram, as componentes mudam, mas o vetor permanece o mesmo.

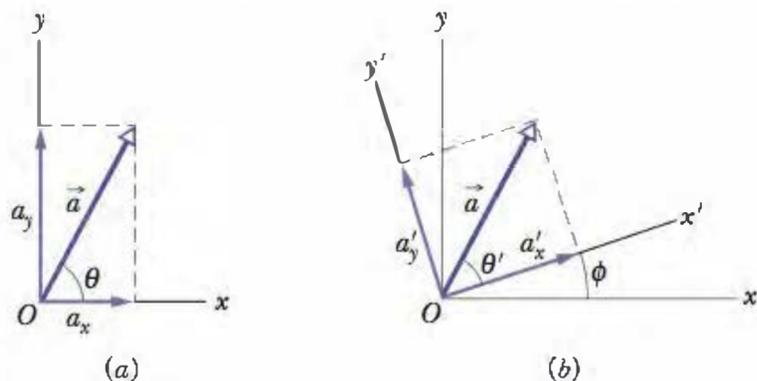



Figura 3-17 (*a*) O vetor $\vec{a}$ e suas componentes. (*b*) O mesmo vetor, com os eixos do sistema de coordenadas girados de um ângulo ϕ.

* Como os assuntos discutidos nesta seção serão aplicados apenas em capítulos posteriores (Capítulo 7, no caso do produto escalar, e Capítulo 11, no caso do produto vetorial), talvez o professor prefira deixar o estudo desta seção para mais tarde.

Multiplicação de um Vetor por um Vetor

Existem duas formas de multiplicar um vetor por um vetor: uma forma (conhecida como *produto escalar*) resulta em um escalar; a outra (conhecida como *produto vetorial*) resulta em um vetor. (Os estudantes costumam confundir as duas formas.)

O Produto Escalar

O **produto escalar** dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ da Fig. 3-18*a* é escrito como $\vec{a} \cdot \vec{b}$ e definido pela equação

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi, \tag{3-20}$$

onde a é o módulo de $\vec{a}$, b é o módulo de $\vec{b}$ e ϕ é o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ (ou, mais apropriadamente, entre as orientações de $\vec{a}$ e $\vec{b}$). Na realidade, existem dois ângulos possíveis: ϕ e $360° - \phi$. Qualquer dos dois pode ser usado na Eq. 3-20, já que os cossenos dos dois ângulos são iguais.

Note que o lado direito da Eq. 3-20 contém apenas escalares (incluindo o valor de $\cos \phi$). Assim, o produto $\vec{a} \cdot \vec{b}$ no lado esquerdo representa uma **grandeza escalar** e é lido como "a escalar b".

O produto escalar pode ser considerado como o produto de duas grandezas: (1) o módulo de um dos vetores e (2) a componente escalar do outro vetor em relação ao primeiro. Assim, por exemplo, na Fig. 3-18*b*, $\vec{a}$ tem uma componente escalar $a \cos \phi$ em relação a $\vec{b}$; note que essa componente pode ser determinada traçando uma perpendicular a $\vec{b}$ que passe pela extremidade de $\vec{a}$. Analogamente, $\vec{b}$ possui uma componente escalar $b \cos \phi$ em relação a $\vec{a}$.

> Se o ângulo ϕ entre dois vetores é 0°, a componente de um vetor em relação ao outro é máxima, o que também acontece com o produto escalar dos vetores. Se o ângulo é 90°, a componente de um vetor em relação ao outro é nula, o que também acontece com o produto escalar.

Para chamar atenção para as componentes, a Eq. 3-20 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a \cos \phi)(b) = (a)(b \cos \phi). \tag{3-21}$$

Como a propriedade comutativa se aplica ao produto escalar, podemos escrever

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

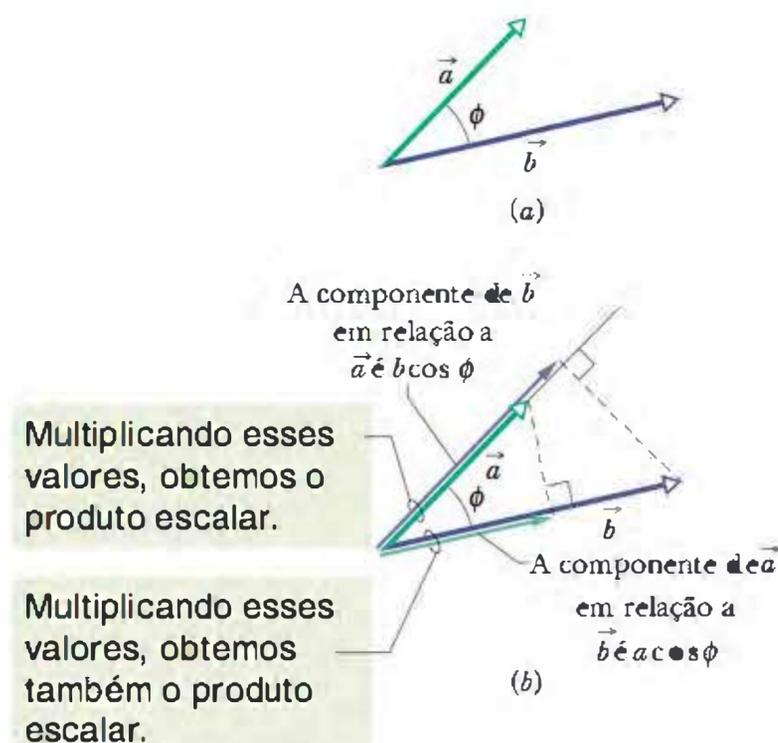



Figura 3-18 (*a*) Dois vetores, $\vec{a}$ e $\vec{b}$, formando um ângulo ϕ. (*b*) Cada vetor tem uma componente na direção do outro vetor.

Quando os dois vetores são escritos em termos dos vetores unitários, o produto escalar assume a forma

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}})\cdot(b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}}), \tag{3-22}$$

que pode ser expandida de acordo com a propriedade distributiva. Calculando os produtos escalares das componentes vetoriais do primeiro vetor pelas componentes vetoriais do segundo vetor, obtemos:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \tag{3-23}$$

TESTE 4

Os vetores $\vec{C}$ e $\vec{D}$ têm módulos de 3 unidades e 4 unidades, respectivamente. Qual é o ângulo entre esses vetores se $\vec{C}\cdot\vec{D}$ é igual a (a) zero, (b) 12 unidades e (c) -12 unidades?

Exemplo

Ângulo entre dois vetores usando o produto escalar

Qual é o ângulo ϕ entre $\vec{a} = 3{,}0\hat{\mathrm{i}} - 4{,}0\hat{\mathrm{j}}$ e $\vec{b} = -2{,}0\hat{\mathrm{i}} + 3{,}0\hat{\mathrm{k}}$? (*Atenção:* muitos dos cálculos a seguir não são necessários quando se usa uma calculadora, mas o leitor aprenderá mais sobre produtos escalares se, pelo menos no início, executar esses cálculos.)

IDEIA-CHAVE

O ângulo entre as orientações dos dois vetores aparece na definição do produto escalar (Eq. 3-20):

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi. \tag{3-24}$$

Cálculos Na Eq. 3-24, a é o módulo de $\vec{a}$, ou seja,

$$a = \sqrt{3{,}0^2 + (-4{,}0)^2} = 5{,}00, \tag{3-25}$$

e b é o módulo de $\vec{b}$, ou seja,

$$b = \sqrt{(-2{,}0)^2 + 3{,}0^2} = 3{,}61. \tag{3-26}$$

Podemos calcular o lado esquerdo da Eq. 3-24 escrevendo os vetores em termos dos vetores unitários e usando a propriedade distributiva:

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (3{,}0\hat{\mathrm{i}} - 4{,}0\hat{\mathrm{j}})\cdot(-2{,}0\hat{\mathrm{i}} + 3{,}0\hat{\mathrm{k}})\\ &= (3{,}0\hat{\mathrm{i}})\cdot(-2{,}0\hat{\mathrm{i}}) + (3{,}0\hat{\mathrm{i}})\cdot(3{,}0\hat{\mathrm{k}})\\ &\quad + (-4{,}0\hat{\mathrm{j}})\cdot(-2{,}0\hat{\mathrm{i}}) + (-4{,}0\hat{\mathrm{j}})\cdot(3{,}0\hat{\mathrm{k}}).\end{aligned}$$

Em seguida, aplicamos a Eq. 3-20 a cada termo desta última expressão. O ângulo entre os vetores unitários do primeiro termo ($\hat{\mathrm{i}}$ e $\hat{\mathrm{i}}$) é 0° e os outros ângulos são 90°. Assim, temos:

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= -(6{,}0)(1) + (9{,}0)(0) + (8{,}0)(0) - (12)(0)\\ &= -6{,}0.\end{aligned}$$

Substituindo este resultado e os resultados das Eqs. 3-25 e 3-26 na Eq. 3-24, obtemos:

$$-6{,}0 = (5{,}00)(3{,}61)\cos\phi,$$

$$\text{e}\quad \phi = \cos^{-1}\frac{-6{,}0}{(5{,}00)(3{,}61)} = 109^\circ \approx 110^\circ. \quad \text{(Resposta)}$$

O Produto Vetorial

O **produto vetorial** de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é escrito como $\vec{a}\times\vec{b}$ e resulta em um terceiro vetor, $\vec{c}$, cujo módulo é

$$c = ab\,\mathrm{sen}\,\phi, \tag{3-27}$$

onde ϕ é o *menor* dos dois ângulos entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. (É preciso usar o menor dos ângulos entre os vetores porque sen ϕ e sen(360° − ϕ) têm sinais opostos.) O produto $\vec{a}\times\vec{b}$ é lido como "*a* vetor *b*".

Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são paralelos ou antiparalelos, $\vec{a}\times\vec{b} = 0$. O módulo de $\vec{a}\times\vec{b}$, que pode ser escrito como $|\vec{a}\times\vec{b}|$, é máximo quando $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são mutuamente perpendiculares.

A direção de $\vec{c}$ é perpendicular ao plano definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$. A Fig. 3-19*a* mostra como determinar o sentido de $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ usando a chamada **regra da mão direita.** Superponha as origens de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sem mudar a orientação dos vetores e imagine uma reta perpendicular ao plano definido pelos dois vetores, passando pela origem comum. Envolva essa reta com a mão *direita* de modo que os dedos empurrem $\vec{a}$ em direção a $\vec{b}$ ao longo do menor ângulo entre os vetores. O polegar estendido apontará no sentido de $\vec{c}$.

No caso do produto vetorial, a ordem dos vetores é importante. Na Fig. 3-19*b*, estamos determinando o sentido de $\vec{c}' = \vec{b} \times \vec{a}$, de modo que os dedos da mão direita empurram $\vec{b}$ na direção de $\vec{a}$ ao longo do menor ângulo. Neste caso, o polegar no sentido oposto ao da Fig. 3-19*a*, de modo que $\vec{c}' = -\vec{c}$, ou seja,

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}). \tag{3-28}$$

Em outras palavras, a propriedade comutativa não se aplica ao produto vetorial.

Em termos dos vetores unitários, podemos escrever

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \times (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}), \tag{3-29}$$

que pode ser expandido de acordo com a propriedade distributiva, ou seja, calculando o produto vetorial de cada componente do primeiro vetor pelas componentes do segundo vetor. Os produtos vetoriais dos vetores unitários aparecem no Apêndi-

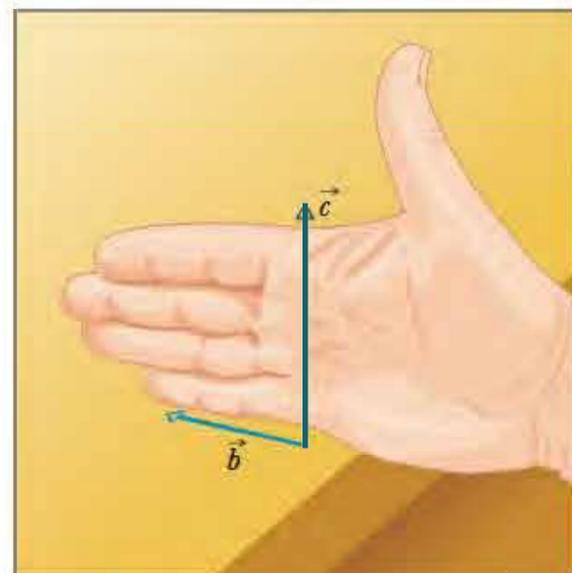
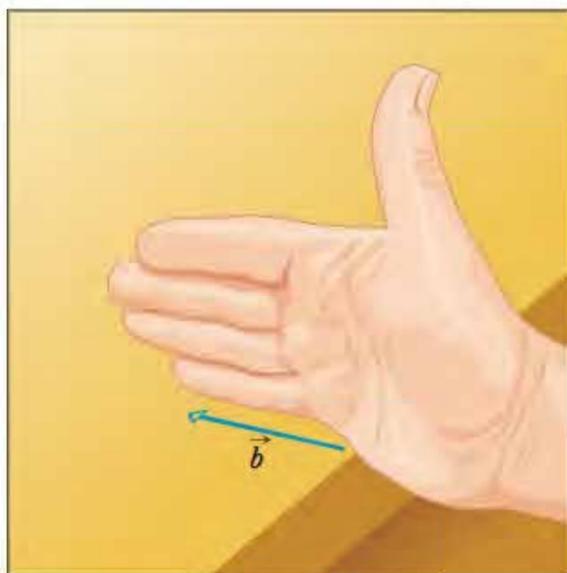
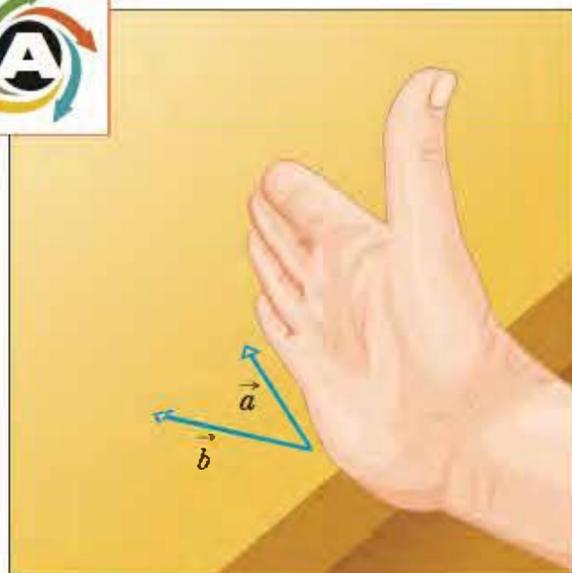
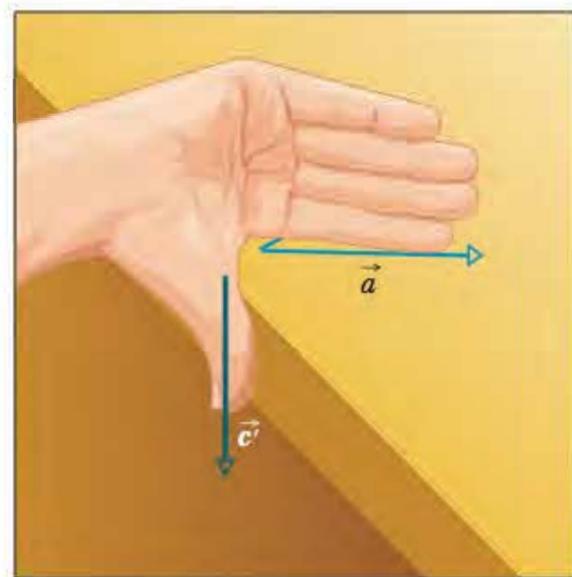
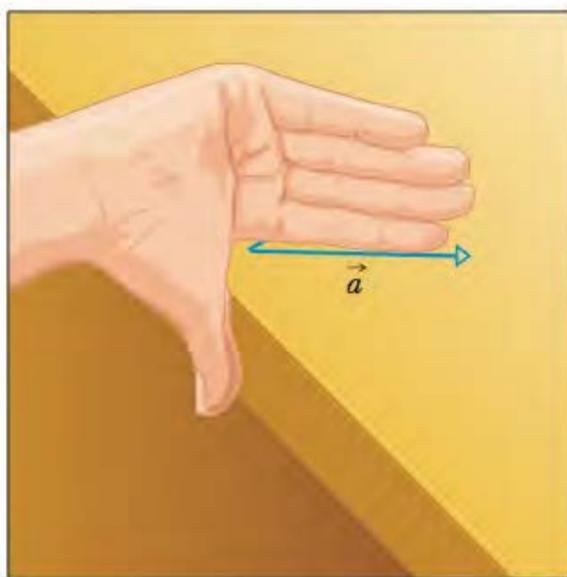
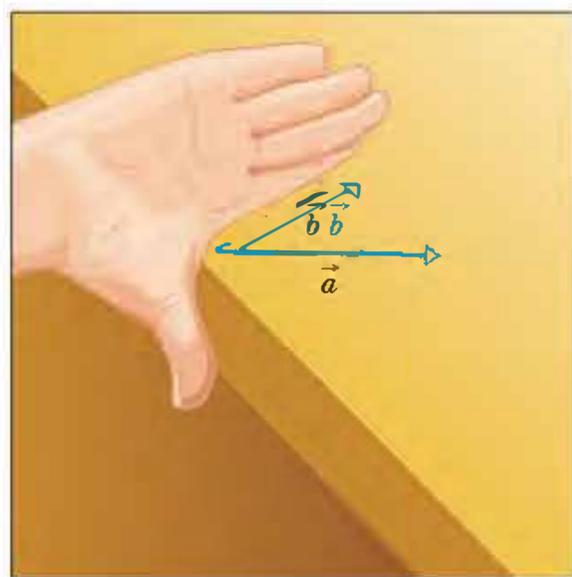



Figura 3-19 Ilustração da regra da mão direita para produtos vetoriais. (a) Empurre o vetor $\vec{a}$ na direção do vetor $\vec{b}$ com os dedos da mão direita. O polegar estendido mostra a orientação do vetor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. (b) O vetor $\vec{b} \times \vec{a}$ tem o sentido oposto ao de $\vec{a} \times \vec{b}$.

ce E (veja "Produtos de Vetores"). Assim, por exemplo, na expansão da Eq. 3-29, temos:

$$a_x\hat{i} \times b_x\hat{i} = a_x b_x(\hat{i} \times \hat{i}) = 0,$$

porque os vetores unitários $\hat{i}$ e $\hat{i}$ são paralelos e, portanto, o produto vetorial é zero. Analogamente, temos:

$$a_x\hat{i} \times b_y\hat{j} = a_x b_y(\hat{i} \times \hat{j}) = a_x b_y \hat{k}.$$

No último passo, usamos a Eq. 3-27 para descobrir que o módulo de $\hat{i} \times \hat{j}$ é 1. (O módulo dos vetores $\hat{i}$ e $\hat{j}$ é 1 e o ângulo entre $\hat{i}$ e $\hat{j}$ é 90°.) Usando a regra da mão direita, descobrimos que o sentido de $\hat{i} \times \hat{j}$ é o sentido do semieixo z positivo, ou seja, o sentido de $\hat{k}$.

Continuando a expandir a Eq. 3-29, é possível mostrar que

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\hat{i} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{k}. \quad (3\text{-}30)$$

Também é possível calcular o resultado de um produto vetorial usando um determinante (veja o Apêndice E) ou uma calculadora.

Para verificar se um sistema de coordenadas xyz é um sistema dextrogiro, basta aplicar a regra da mão direita ao produto vetorial $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$ no sistema dado. Se os dedos empurrarem $\hat{i}$ (semieixo x positivo) na direção de $\hat{j}$ (semieixo y positivo) e o polegar estendido apontar no sentido do semieixo z positivo, o sistema é dextrogiro.

TESTE 5

Os vetores $\vec{C}$ e $\vec{D}$ têm módulos de 3 unidades e 4 unidades, respectivamente. Qual é o ângulo entre esses vetores se o módulo do produto vetorial $\vec{C} \times \vec{D}$ é igual a (a) zero e (b) 12 unidades?

Exemplo

Produto vetorial: regra da mão direita

Na Fig. 3-20, o vetor $\vec{a}$ está no plano xy, tem um módulo de 18 unidades e uma orientação que faz um ângulo de 250° com o semieixo x positivo. O vetor $\vec{b}$ tem um módulo de 12 unidades e está orientado ao longo do semieixo z positivo. Qual é o produto vetorial $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$?

IDEIA-CHAVE

Quando conhecemos dois vetores na notação módulo-ângulo, podemos calcular o módulo do produto vetorial usando a Eq. 3-27 e determinar a orientação do produto vetorial usando a regra da mão direita da Fig. 3-19.

Cálculos O módulo do produto vetorial é dado por

$$c = ab\,\text{sen}\,\phi = (18)(12)(\text{sen}\,90°) = 216. \quad \text{(Resposta)}$$

Para determinar a orientação do produto vetorial na Fig. 3-20, coloque os dedos da mão direita em torno de uma reta perpendicular ao plano de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ (a reta na qual se encontra o vetor $\vec{c}$) de modo que os dedos empurrem o vetor $\vec{a}$ na direção de $\vec{b}$; o polegar estendido fornece a orientação de $\vec{c}$. Assim, como mostra a figura, $\vec{c}$ está no plano xy. Como a direção de $\vec{c}$ é perpendicular à direção de $\vec{a}$ (o produto vetorial sempre resulta em um vetor perpendicular aos dois vetores originais), o vetor faz um ângulo de

$$250° - 90° = 160° \quad \text{(Resposta)}$$

com o semieixo x positivo.

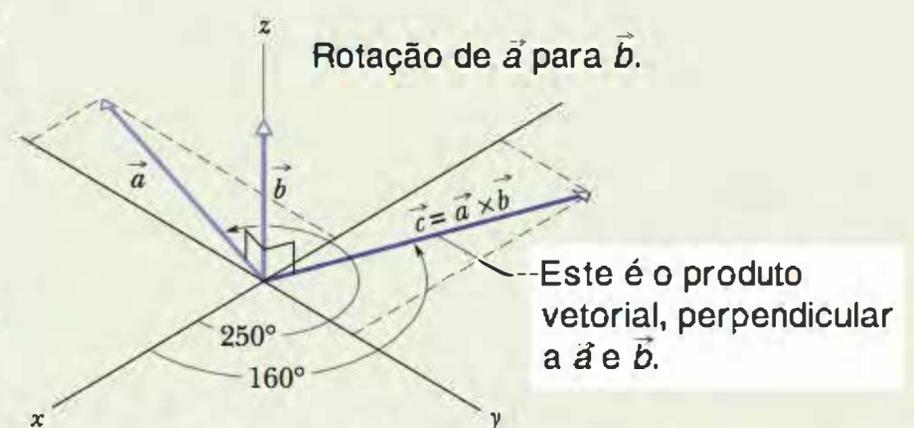



Figura 3-20 O vetor $\vec{c}$ (no plano xy) é o produto vetorial dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Exemplo

Produto vetorial usando vetores unitários

Se $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ e $\vec{b} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$, determine $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

IDEIA-CHAVE

Quando dois vetores estão expressos em termos dos vetores unitários, podemos determinar o produto vetorial usando a lei distributiva.

Cálculos Temos:

$$\vec{c} = (3\hat{i} - 4\hat{j}) \times (-2\hat{i} + 3\hat{k})$$
$$= 3\hat{i} \times (-2\hat{i}) + 3\hat{i} \times 3\hat{k} + (-4\hat{j}) \times (-2\hat{i}) + (-4\hat{j}) \times 3\hat{k}.$$

Podemos calcular os valores dos diferentes termos usando a Eq. 3-27 e determinando a orientação dos vetores com o auxílio da regra da mão direita. No primeiro termo, o ângulo ϕ entre os dois vetores envolvidos no produto vetorial é 0; nos outros três termos, $\phi = 90°$. O resultado é o seguinte:

$$\vec{c} = -6(0) + 9(-\hat{j}) + 8(-\hat{k}) - 12\hat{i}$$
$$= -12\hat{i} - 9\hat{j} - 8\hat{k}. \quad \text{(Resposta)}$$

O vetor $\vec{c}$ é perpendicular a $\vec{a}$ e $\vec{b}$, o que pode ser demonstrado observando que $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ e $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$, ou seja, que não existem componentes de $\vec{c}$ em relação a $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

REVISÃO E RESUMO

Escalares e Vetores *Grandezas escalares*, como temperatura, possuem apenas um valor numérico. São especificadas por um número com uma unidade (10°C, por exemplo) e obedecem às regras da aritmética e da álgebra comum. As *grandezas vetoriais*, como o deslocamento, possuem um valor numérico (módulo) e uma orientação (5 m para cima, por exemplo) e obedecem às regras da álgebra vetorial.

Soma Geométrica de Vetores Dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ podem ser somados geometricamente desenhando-os na mesma escala e posicionando-os com a origem de um na extremidade do outro. O vetor que liga a as extremidades livres dos dois vetores é o vetor soma, $\vec{s}$. Para subtrair $\vec{b}$ de $\vec{a}$, invertemos o sentido de $\vec{b}$ para obter $-\vec{b}$ e somamos $-\vec{b}$ a $\vec{a}$. A soma vetorial é comutativa e associativa.

Componentes de um Vetor As *componentes* (escalares) a_x e a_y de um vetor bidimensional $\vec{a}$ em relação ao eixos de um sistema de coordenadas xy são obtidas traçando retas perpendiculares aos eixos a partir da origem e da extremidade de $\vec{a}$. As componentes são dadas por

$$a_x = a\cos\theta \quad \text{e} \quad a_y = a\,\text{sen}\,\theta, \qquad (3\text{-}5)$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{a}$ e o semieixo x positivo. O sinal algébrico de uma componente indica o sentido da componente em relação ao eixo correspondente. Dadas as componentes, podemos determinar o módulo e a orientação de um vetor $\vec{a}$ através das equações

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{e} \quad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x}. \qquad (3\text{-}6)$$

Notação com Vetores Unitários Os *vetores unitários* $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ têm módulo unitário e sentido igual ao sentido positivo dos eixos x, y e z, respectivamente, em um sistema de coordenadas dextrogiro. Podemos expressar um vetor $\vec{a}$ em termos de vetores unitários como

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}, \qquad (3\text{-}7)$$

onde $a_x\hat{i}$, $a_y\hat{j}$ e $a_z\hat{k}$ são as **componentes vetoriais** de $\vec{a}$ e a_x, a_y e a_z são as **componentes escalares**.

Soma de Vetores na Forma de Componentes Para somar vetores na forma de componentes, usamos as regras

$$r_x = a_x + b_x \quad r_y = a_y + b_y \quad r_z = a_z + b_z. \qquad (3\text{-}10 \text{ a } 3\text{-}12)$$

onde $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são os vetores a serem somados e $\vec{r}$ é o vetor soma. Note que adicionamos as componentes do eixo por eixo.

Produto de um Escalar por um Vetor O produto de um escalar s por um vetor $\vec{v}$ é um vetor de módulo sv com a mesma orientação de $\vec{v}$ se s for positivo e com a orientação oposta se s for negativo. Para dividir $\vec{v}$ por s, multiplicamos $\vec{v}$ por $1/s$.

O Produto Escalar O **produto escalar** de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é representado por $\vec{a} \cdot \vec{b}$ e é igual à grandeza *escalar* dada por

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\phi, \qquad (3\text{-}20)$$

onde ϕ é o menor dos ângulos entre as direções de $\vec{a}$ e $\vec{b}$. O produto escalar é o produto do módulo de um dos vetores pela componente escalar do outro em relação ao primeiro. Em termos dos vetores unitários,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \cdot (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}), \qquad (3\text{-}22)$$

que pode ser expandida de acordo com a lei distributiva. Note que $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

O Produto Vetorial O **produto vetorial** de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, representado por $\vec{a} \times \vec{b}$, é um *vetor* $\vec{c}$ cujo módulo c é dado por

$$c = ab\,\text{sen}\,\phi, \qquad (3\text{-}27)$$

onde ϕ é o menor dos ângulos entre as direções de $\vec{a}$ e $\vec{b}$. A orientação de $\vec{c}$ é perpendicular ao plano definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e é dada pela regra da mão direita, como mostra a Fig. 3-19. Note que $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$. Em termos dos vetores unitários,

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \times (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}), \qquad (3\text{-}29)$$

que pode ser expandida de acordo com a lei distributiva.

PERGUNTAS

1 A soma dos módulos de dois vetores pode ser igual ao módulo da soma dos mesmos vetores? Justifique sua resposta.

2 Os dois vetores da Fig. 3-21 estão em um plano xy. Determine os sinais das componentes x e y, respectivamente, de (a) $\vec{d}_1 + \vec{d}_2$; (b) $\vec{d}_1 - \vec{d}_2$; (c) $\vec{d}_2 - \vec{d}_1$.

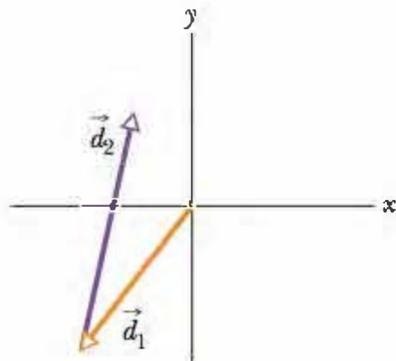



Figura 3-21 Pergunta 2.

3 Como a mascote da Universidade da Flórida é um jacaré, a equipe de golfe da universidade joga em um campo onde existe um lago com jacarés. A Fig. 3-22 mostra uma vista aérea da região em torno de um dos buracos do campo com um sistema de coordenadas xy superposto. As tacadas da equipe devem levar a bola da origem até o buraco, que está nas coordenadas (8 m, 12 m), mas a bola pode sofrer apenas os seguintes deslocamentos, que podem ser usados mais de uma vez:

$$\vec{d}_1 = (8\text{ m})\hat{i} + (6\text{ m})\hat{j}, \qquad \vec{d}_2 = (6\text{ m})\hat{j}, \qquad \vec{d}_3 = (8\text{ m})\hat{i}.$$

O lago está nas coordenadas (8 m, 6 m). Se um membro da equipe lança a bola no lago, é imediatamente transferido para a Universidade Estadual da Flórida, a eterna rival. Que sequência de deslocamentos deve ser usada por um membro da equipe para evitar o lago?

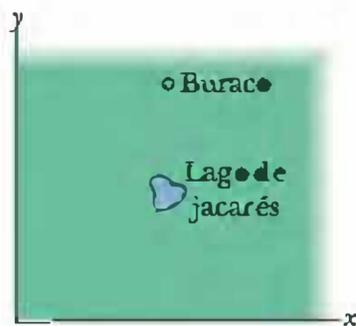



Figura 3-22 Pergunta 3.

4 A Eq. 3-2 mostra que a soma de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é comutativa. Isso significa que a subtração é comutativa, ou seja, que $\vec{a} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$?

5 Quais dos sistemas de eixos da Fig. 3-23 são sistemas de coordenadas dextrogiros? Como de costume, a letra que identifica o eixo está no semieixo positivo.

6 Descreva dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tais que

(a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ e $a + b = c$;

(b) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$;

(c) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ e $a^2 + b^2 = c^2$.

7 Se $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c})$, é verdade que (a) $\vec{a} + (-\vec{d}) = \vec{c} + (-\vec{b})$, (b) $\vec{a} = (-\vec{b}) + \vec{d} + \vec{c}$ e (c) $\vec{c} + (-\vec{d}) = \vec{a} + \vec{b}$?

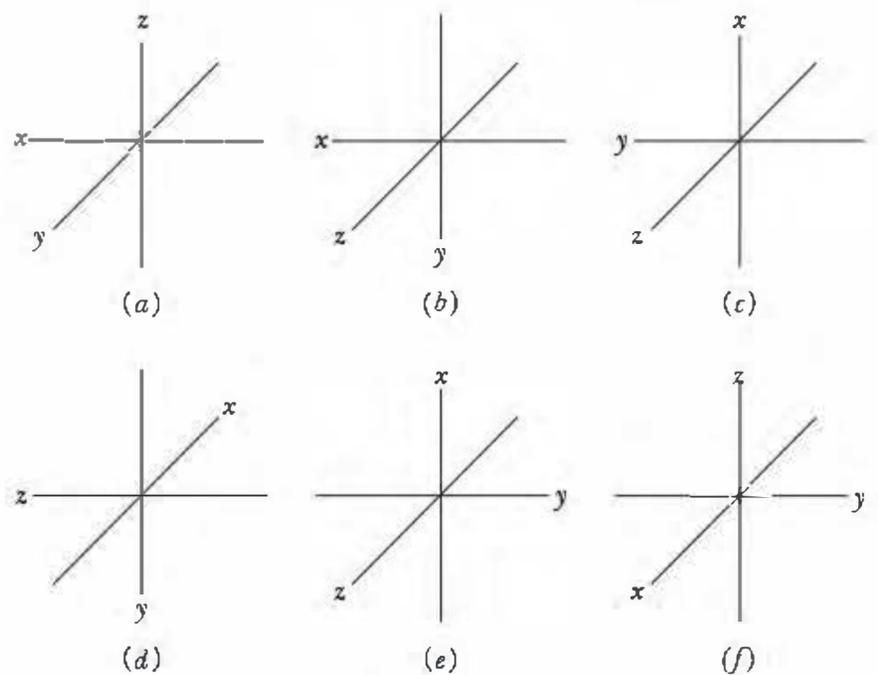



Figura 3-23 Pergunta 5.

8 Se $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{b}$ é necessariamente igual a $\vec{c}$?

9 Se $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ e $\vec{v}$ é perpendicular a $\vec{B}$, qual é a orientação de $\vec{B}$ nas três situações mostradas na Fig. 3-24 se a constante q for (a) positiva e (b) negativa?

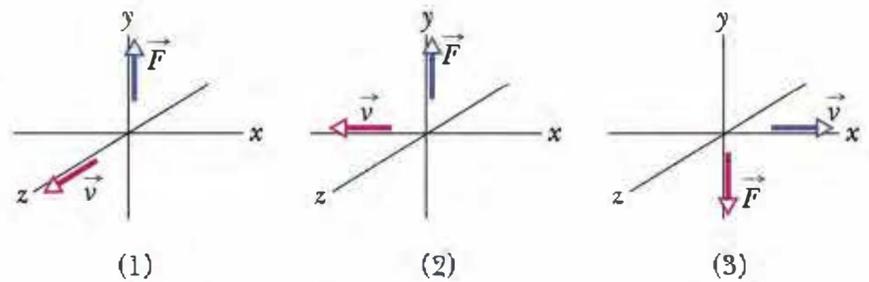



Figura 3-24 Pergunta 9.

10 A Fig. 3-25 mostra um vetor $\vec{A}$ e outros quatro vetores de mesmo módulo e orientações diferentes. (a) Quais dos outros quatro vetores têm o mesmo produto escalar com $\vec{A}$? (b) Quais têm um produto escalar com $\vec{A}$ negativo?

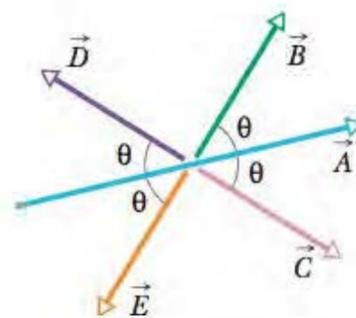



Figura 3-25 Pergunta 10.

PROBLEMAS

• - ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física* de Jearl Walker, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

Seção 3-4 Componentes de Vetores

•1 Quais são (a) a componente x e (b) a componente y de um vetor $\vec{a}$ do plano xy que faz um ângulo de 250° no sentido anti-horário com o semieixo x positivo e tem um módulo de 7,3 m?

•2 Um vetor deslocamento $\vec{r}$ no plano xy tem 15 m de comprimento e faz um ângulo $\theta = 30°$ com o semieixo x positivo, como mostra a Fig. 3-26. Determine (a) a componente x e (b) a componente y do vetor.

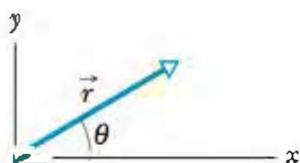



Figura 3-26 Problema 2.

•3 A componente x do vetor $\vec{A}$ é −25,0 m e a componente y é +40,0 m. (a) Qual é o módulo de $\vec{A}$? (b) Qual é o ângulo entre a orientação de $\vec{A}$ e o semieixo x positivo?

•4 Expresse os seguintes ângulos em radianos: (a) 20,0°; (b) 50,0°; (c) 100°. Converta os seguintes ângulos para graus: (d) 0,330 rad; (e) 2,10 rad; (f) 7,70 rad.

•5 O objetivo de um navio é chegar a um porto situado 120 km ao norte do ponto de partida, mas uma tempestade inesperada o leva para um local situado 100 km a leste do ponto de partida. (a) Que distância o navio deve percorrer e (b) qual o rumo deve tomar para chegar ao destino?

•6 Na Fig. 3-27, uma máquina pesada é erguida com o auxílio de uma rampa que faz um ângulo $\theta = 20,0°$ com a horizontal, na qual a máquina percorre uma distância $d = 12,5$ m. (a) Qual é a distância vertical percorrida pela máquina? (b) Qual é a distância horizontal percorrida pela máquina?

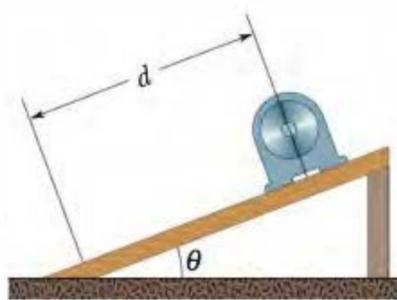



Figura 3-27 Problema 6.

••7 As dimensões de uma sala são 3,00 m (altura) × 3,70 m × 4,30 m. Uma mosca parte de um canto da sala e pousa em um canto diagonalmente oposto. (a) Qual é o módulo do deslocamento da mosca? (b) A distância percorrida pode ser menor que este valor? (c) Pode ser maior? (d) Pode ser igual? (e) Escolha um sistema de coordenadas apropriado e expresse as componentes do vetor deslocamento em termos de vetores unitários. (f) Se a mosca caminhar, em vez de voar, qual é o comprimento do caminho mais curto para o outro canto? (*Sugestão*: o problema pode ser resolvido sem fazer cálculos complicados. A sala é como uma caixa; desdobre as paredes para representá-las em um mesmo plano antes de procurar uma solução.)

Seção 3-6 Soma de Vetores a partir das Componentes

•8 Uma pessoa caminha da seguinte forma: 3,1 km para o norte, 2,4 km para oeste e 5,2 km para o sul. (a) Desenhe o diagrama vetorial que representa este movimento. (b) Que distância e (c) em que direção voaria um pássaro em linha reta do mesmo ponto de partida ao mesmo ponto de chegada?

•9 Dois vetores são dados por

$$\vec{a} = (4,0\ \text{m})\hat{i} - (3,0\ \text{m})\hat{j} + (1,0\ \text{m})\hat{k}$$

e

$$\vec{b} = (-1,0\ \text{m})\hat{i} + (1,0\ \text{m})\hat{j} + (4,0\ \text{m})\hat{k}.$$

Determine, em termos de vetores unitários, (a) $\vec{a}+\vec{b}$; (b) $\vec{a}-\vec{b}$; (c) um terceiro vetor, $\vec{c}$, tal que $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=0$.

•10 Determine as componentes (a) x, (b) y e (c) z da soma $\vec{r}$ dos deslocamentos $\vec{c}$ e $\vec{d}$ cujas componentes em metros ao longo dos três eixos são $c_x = 7,4$, $c_y = -3,8$, $c_z = -6,1$, $d_x = 4,4$, $d_y = -2,0$, $d_z = 3,3$.

•11 (a) Determine a soma $\vec{a}+\vec{b}$, em termos de vetores unitários, para $\vec{a} = (4,0\ \text{m})\hat{i} + (3,0\ \text{m})\hat{j}$ e $\vec{b} = (-13,0\ \text{m})\hat{i} + (7,0\ \text{m})\hat{j}$. Determine (b) o módulo e (c) a orientação de $\vec{a}+\vec{b}$.

•12 Um carro viaja 50 km para leste, 30 km para o norte e 25 km em uma direção 30° a leste do norte. Desenhe o diagrama vetorial e determine (a) o módulo e (b) o ângulo do deslocamento do carro em relação ao ponto de partida.

•13 Uma pessoa deseja chegar a um ponto que está a 3,40 km de sua localização atual, em uma direção 35,0° ao norte do leste. As ruas por onde pode passar são todas na direção norte-sul ou na direção leste-oeste. Qual é a menor distância que a pessoa precisa percorrer para chegar ao destino?

•14 Você deve executar quatro deslocamentos sucessivos na superfície plana num deserto, começando na origem de um sistema de coordenadas xy e terminando nas coordenadas (−140 m, 30 m). As componentes dos seus deslocamentos são, respectivamente, as seguintes, em metros: (20, 60), (b_x, −70), (−20, c_y) e (−60, −70). Determine (a) b_x e (b) c_y. Determine (c) o módulo e (d) o ângulo (em relação ao semieixo x positivo) do deslocamento total.

•15 Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ da Fig. 3-28 têm o mesmo módulo, 10,0 m, e os ângulos mostrados na figura são $\theta_1 = 30°$ e $\theta_2 = 105°$. Determine as componentes (a) x e (b) y da soma vetorial $\vec{r}$ dos dois vetores, (c) o módulo de $\vec{r}$ e (d) o ângulo que $\vec{r}$ faz com o semieixo x positivo.

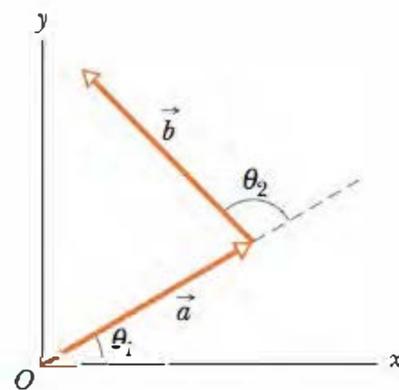



Figura 3-28 Problema 15.

•16 Para os vetores $\vec{a} = (3,0\ \text{m})\hat{i} + (4,0\ \text{m})\hat{j}$ e $\vec{b} = (5,0\ \text{m})\hat{i} + (-2,0\ \text{m})\hat{j}$, determine $\vec{a}+\vec{b}$ (a) em termos de vetores unitários e em termos (b) do módulo e (c) do ângulo (em relação a $\hat{i}$). Determine

$\vec{b} - \vec{a}$ (d) em termos de vetores unitários e em termos (e) do módulo e (f) do ângulo.

•17 Três vetores, $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, têm o mesmo módulo, 50 m, e estão em um plano xy. Os ângulos dos vetores em relação ao semieixo x positivo são 30°, 195°, e 315°, respectivamente. Determine (a) o módulo e (b) o ângulo do vetor $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ e (c) o módulo e (d) o ângulo de $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$. Determine (e) o módulo e (f) o ângulo de um quarto vetor, $\vec{d}$, tal que $(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{c} + \vec{d}) = 0$.

•18 Na soma $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$, o vetor $\vec{A}$ tem um módulo de 12,0 m e faz um ângulo de 40,0° no sentido anti-horário com o semieixo x positivo; o vetor $\vec{C}$ tem um módulo de 15,0 m e faz um ângulo de 20,0° no sentido anti-horário com o semieixo x negativo. Determine (a) o módulo de $\vec{B}$ e (b) o ângulo de $\vec{B}$ com o semieixo x positivo.

•19 Em um jogo de xadrez ao ar livre, no qual as peças ocupam o centro de quadrados com 1,00 m de lado, um cavalo é movido da seguinte forma: (1) dois quadrados para a frente e um quadrado para a direita; (2) dois quadrados para a esquerda e um quadrado para a frente; (3) dois quadrados para a frente e um quadrado para a esquerda. Determine (a) o módulo e (b) o ângulo (em relação ao sentido "para a frente") do deslocamento total do cavalo após a série de três movimentos.

••20 Um explorador polar foi surpreendido por uma nevasca, que reduziu a visibilidade a praticamente zero, quando retornava ao acampamento. Para chegar ao acampamento, deveria ter caminhado 5,6 km para o norte, mas, quando o tempo melhorou, percebeu que na realidade havia caminhado 7,8 km em uma direção 50° ao norte do leste. (a) Que distância e (b) em que sentido deve caminhar para voltar à base?

••21 Uma formiga, enlouquecida pelo Sol em um dia quente, sai correndo em um plano xy. As componentes (x e y) de quatro corridas consecutivas em linha reta são as seguintes, todas em centímetros: (30,0; 40,0), (b_x; −70,0), (−20,0; c_y);(−80,0; −70,0). O deslocamento resultante das quatro corridas tem componentes (−140; −20,0). Determine (a) b_x e (b) c_y. Determine (c) o módulo e (d) o ângulo (em relação ao semieixo x positivo) do deslocamento total.

••22 (a) Qual é a soma dos quatro vetores a seguir em termos de vetores unitários? (b) Para essa soma, quais são (b) o módulo, (c) o ângulo em graus, e (d) o ângulo em radianos?

$\vec{E}$: 6,00 m e +0,900 rad $\vec{F}$: 5,00 m e −75,0°

$\vec{G}$: 4,00 m e +1,20 rad $\vec{H}$: 6,00 m e −210°

••23 Se $\vec{B}$ é somado a $\vec{C} = 3{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{j}$, o resultado é um vetor com a orientação do semieixo y positivo e um módulo igual ao de $\vec{C}$. Qual é o módulo de $\vec{B}$?

••24 O vetor $\vec{A}$, paralelo ao eixo x, deve ser somado ao vetor $\vec{B}$, que tem um módulo de 7,0 m. A soma é um vetor paralelo ao eixo y, com um módulo 3 vezes maior que o de $\vec{A}$. Qual é o módulo de $\vec{A}$?

••25 O oásis B está 25 km a leste do oásis A. Partindo do oásis A, um camelo percorre 24 km em uma direção 15° ao sul do leste e 8,0 km para o norte. A que distância o camelo está do oásis B?

••26 Determine a soma dos quatro vetores a seguir (a) em termos dos vetores unitários e em termos (b) do módulo e (c) do ângulo.

$\vec{A} = (2{,}00\text{ m})\hat{i} + (3{,}00\text{ m})\hat{j}$ $\vec{B}$: 4,00 m e +65,0°

$\vec{C} = (-4{,}00\text{ m})\hat{i} + (-6{,}00\text{ m})\hat{j}$ $\vec{D}$: 5,00 m e −23,5°

••27 Se $\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = 5\vec{d}_3$, $\vec{d}_1 - \vec{d}_2 = 3\vec{d}_3$ e $\vec{d}_3 = 2\hat{i} + 4\hat{j}$, determine, em termos dos vetores unitários, (a) $\vec{d}_1$ e (b) $\vec{d}_2$.

••28 Dois besouros correm em um deserto plano, partindo do mesmo ponto. O besouro 1 corre 0,50 m para leste e 0,80 m em uma direção 30° ao norte do leste. O besouro 2 corre 1,6 m em uma direção 40° ao leste do norte e depois corre em outra direção. Quais devem ser (a) o módulo e (b) o sentido da segunda corrida do segundo besouro para que termine na mesma posição final que o primeiro besouro?

••29 Para se orientarem, as formigas de jardim costumam criar uma rede de trilhas marcadas por feromônios. Partindo do formigueiro, cada uma dessas trilhas se *bifurca* repetidamente em duas trilhas que formam um ângulo de 60°. Quando uma formiga perdida encontra uma trilha, pode saber em que direção fica o formigueiro ao chegar ao primeiro ponto de bifurcação. Se estiver se afastando do formigueiro, encontrará duas trilhas que formam ângulos pequenos com a direção em que estava se movendo, 30° para a esquerda e 30° para a direita. Se estiver se aproximando do formigueiro, encontrará apenas uma trilha com essa característica, 30° para a esquerda ou 30° para a direita. A Fig. 3-29 mostra uma rede de trilhas típica, com segmentos de reta de 2,0 cm de comprimento e bifurcações simétricas de 60°. Trajetória v é paralela ao eixo y. Determine (a) o módulo e (b) o ângulo (em relação ao semieixo x positivo) do deslocamento até o formigueiro (encontre-o na figura) de uma formiga que entra na rede de trilhas no ponto A. Determine (c) o módulo e (d) o ângulo de uma formiga que entra na rede de trilhas no ponto B.

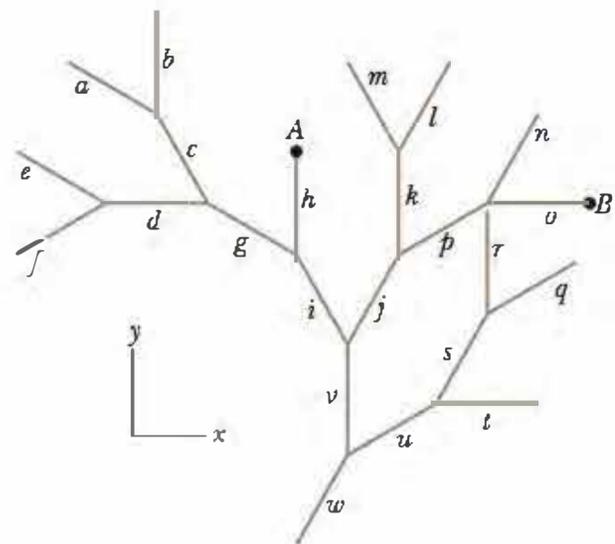



Figura 3-29 Problema 29.

••30 São dados dois vetores:

$$\vec{a} = (4{,}0\text{ m})\hat{i} - (3{,}0\text{ m})\hat{j} \quad \text{e} \quad \vec{b} = (6{,}0\text{ m})\hat{i} + (8{,}0\text{ m})\hat{j}.$$

Determine (a) o módulo e (b) o ângulo (em relação a $\hat{i}$) de $\vec{a}$. Determine (c) o módulo e (d) o ângulo de $\vec{b}$. Determine (e) o módulo e (f) o ângulo de $\vec{a} + \vec{b}$; (g) o módulo e (h) o ângulo de $\vec{b} - \vec{a}$; (i) o módulo e (j) o ângulo de $\vec{a} - \vec{b}$. (k) Determine o ângulo entre as direções de $\vec{b} - \vec{a}$ e $\vec{a} - \vec{b}$.

•••31 Na Fig. 3.30, um cubo de aresta a tem um dos vértices posicionado na origem de um sistema de coordenadas xyz. A *diagonal do cubo* é uma reta que vai de um vértice a outro do cubo, passando pelo centro. Em termos dos vetores unitários, qual é a diagonal do cubo que passa pelo vértice cujas coordenadas são (a) (0, 0, 0), (b) (a, 0, 0) (c) (0, a, 0) e (d) (a, a, 0)? (e) Determine os ângulos que as diagonais do cubo fazem com as arestas vizinhas. (f) Determine o comprimento das diagonais de cubo em termos de a.

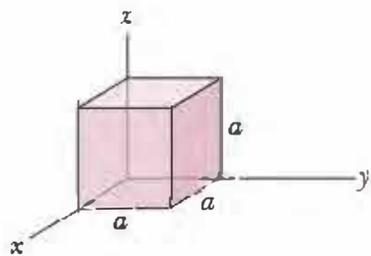



Figura 3-30 Problema 31.

Seção 3-7 Vetores e as Leis da Física

•32 Na Fig. 3-31, um vetor $\vec{d}$ com um módulo de 17,0 m faz um ângulo $\theta = 56{,}0°$ no sentido anti-horário como o semieixo x positivo. Quais são as componentes (a) a_x e (b) a_y do vetor? Um segundo sistema de coordenadas está inclinado de um ângulo $\theta' = 18°$ em relação ao primeiro. Quais são as componentes (c) a'_x e (d) a'_y neste novo sistema de coordenadas?

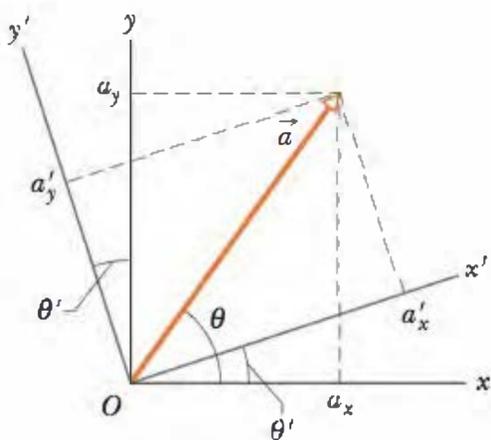



Figura 3-31 Problema 32.

Seção 3-8 Multiplicação de Vetores

•33 Para os vetores da Fig. 3-32, com $a = 4$, $b = 3$ e $c = 5$, determine (a) o módulo e (b) a orientação de $\vec{a}\times\vec{b}$, (c) o módulo e (d) a orientação de $\vec{a}\times\vec{c}$ e (e) o módulo e (f) orientação de $\vec{b}\times\vec{c}$. (Embora exista, o eixo z não é mostrado na figura.)

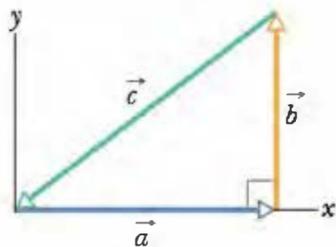



Figura 3-32 Problemas 33 e 54.

•34 Dois vetores são dados por $\vec{a} = 3{,}0\hat{\mathrm{i}} + 5{,}0\hat{\mathrm{j}}$ e $\vec{b} = 2{,}0\hat{\mathrm{i}} + 4{,}0\hat{\mathrm{j}}$. Determine (a) $\vec{a}\times\vec{b}$, (b) $\vec{a}\cdot\vec{b}$, (c) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}$ e (d) a componente de $\vec{a}$ em relação a $\vec{b}$. [*Sugestão:* para resolver o item (d), considere a Eq. 3-20 e a Fig. 3-18.]

•35 Dois vetores, $\vec{r}$ e $\vec{s}$, estão no plano xy. Os módulos dos vetores são 4,50 unidades e 7,30 unidades, respectivamente, e eles estão orientados a 320° e 85,0°, respectivamente, no sentido anti-horário em relação ao semieixo x positivo. Quais são os valores de (a) $\vec{r}\cdot\vec{s}$ e (b) $\vec{r}\times\vec{s}$?

•36 Se $\vec{d}_1 = 3\hat{\mathrm{i}} - 2\hat{\mathrm{j}} + 4\hat{\mathrm{k}}$ e $\vec{d}_2 = -5\hat{\mathrm{i}} + 2\hat{\mathrm{j}} - \hat{\mathrm{k}}$, determine $(\vec{d}_1 + \vec{d}_2)\cdot(\vec{d}_1 \times 4\vec{d}_2)$.

•37 Três vetores são dados por $\vec{a} = 3{,}0\hat{\mathrm{i}} + 3{,}0\hat{\mathrm{j}} - 2{,}0\hat{\mathrm{k}}$, $\vec{b} = -1{,}0\hat{\mathrm{i}} - 4{,}0\hat{\mathrm{j}} + 2{,}0\hat{\mathrm{k}}$ e $\vec{c} = 2{,}0\hat{\mathrm{i}} + 2{,}0\hat{\mathrm{j}} + 1{,}0\hat{\mathrm{k}}$. Determine (a) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$, (b) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$ e (c) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$.

••38 Determine $3\vec{C}\cdot(2\vec{A}\times\vec{B})$ para os três vetores a seguir.

$$\vec{A} = 2{,}00\hat{\mathrm{i}} + 3{,}00\hat{\mathrm{j}} - 4{,}00\hat{\mathrm{k}}$$

$$\vec{B} = -3{,}00\hat{\mathrm{i}} + 4{,}00\hat{\mathrm{j}} + 2{,}00\hat{\mathrm{k}} \qquad \vec{C} = 7{,}00\hat{\mathrm{i}} - 8{,}00\hat{\mathrm{j}}$$

••39 O módulo do vetor $\vec{A}$ é 6,00 unidades, o módulo do vetor $\vec{B}$ é 7,00 unidades e $\vec{A}\cdot\vec{B} = 14{,}0$. Qual é o ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$?

••40 O deslocamento $\vec{d}_1$ está no plano yz, faz um ângulo de 63,0° com o semieixo y positivo, tem uma componente z positiva e tem um módulo de 4,50 m. O deslocamento $\vec{d}_2$ está no plano xz, faz um ângulo de 30,0° com o semieixo x positivo, tem uma componente z positiva e tem um módulo de 1,40 m. Determine (a) $\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2$; (b) $\vec{d}_1\times\vec{d}_2$ e (c) o ângulo entre $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$.

••41 Use a definição de produto escalar, $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$ e o fato de que $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$ para calcular o ângulo entre os vetores $\vec{a} = 3{,}0\hat{\mathrm{i}} + 3{,}0\hat{\mathrm{j}} + 3{,}0\hat{\mathrm{k}}$ e $\vec{b} = 2{,}0\hat{\mathrm{i}} + 1{,}0\hat{\mathrm{j}} + 3{,}0\hat{\mathrm{k}}$.

••42 Em um encontro de mímicos, o mímico 1 se desloca de $\vec{d}_1 = (4{,}0\text{ m})\hat{\mathrm{i}} + (5{,}0\text{ m})\hat{\mathrm{j}}$ e o mímico 2 se desloca de $\vec{d}_2 = (-3{,}0\text{ m})\hat{\mathrm{i}} + (4{,}0\text{ m})\hat{\mathrm{j}}$. Determine (a) $\vec{d}_1\times\vec{d}_2$, (b) $\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2$, (c) $(\vec{d}_1+\vec{d}_2)\cdot\vec{d}_2$ e (d) a componente de $\vec{d}_1$ em relação a $\vec{d}_1$. [*Sugestão:* para resolver o item (d), veja a Eq. 3-20 e a Fig. 3-18.]

••43 Os três vetores na Fig. 3-33 têm módulos $a = 3{,}00$ m, $b = 4{,}00$ m e $c = 10{,}0$ m; $\theta = 30{,}0°$. Determine (a) a componente x e (b) a componente y de $\vec{a}$; (c) a componente x e (d) a componente y de $\vec{b}$; (e) a componente x e (f) a componente y de $\vec{c}$. Se $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$, quais são os valores de (g) p e (h) q?

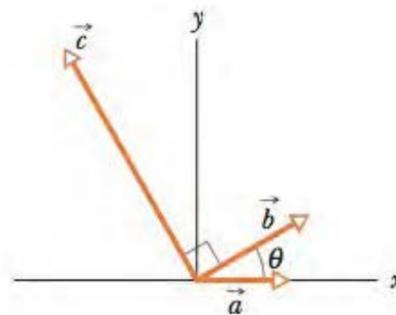



Figura 3-33 Problema 43.

••44 No produto $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$, faça $q = 2$,

$$\vec{v} = 2{,}0\hat{\mathrm{i}} + 4{,}0\hat{\mathrm{j}} + 6{,}0\hat{\mathrm{k}} \quad \text{e} \quad \vec{F} = 4{,}0\hat{\mathrm{i}} - 20\hat{\mathrm{j}} + 12\hat{\mathrm{k}}.$$

Determine $\vec{B}$, em termos dos vetores unitários, para $B_x = B_y$.

Problemas Adicionais

45 Os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ estão no plano xy. $\vec{A}$ tem módulo 8,00 e ângulo 130°; $\vec{B}$ tem componentes $B_x = -7{,}72$ e $B_y = -9{,}20$. (a) Determine $5\vec{A}\cdot\vec{B}$. Determine $4\vec{A}\times 3\vec{B}$ (b) em termos dos vetores unitários e (c) através do módulo e do ângulo em coordenadas esféricas (veja a Fig. 3-34). (d) Determine o ângulo entre os vetores $\vec{A}$ e $4\vec{A}\times 3\vec{B}$. (*Sugestão:* pense um pouco antes de iniciar os cálculos). Determine $\vec{A} + 3{,}00\hat{\mathrm{k}}$ (e) em termos dos vetores unitários e (f) através do módulo e do ângulo em coordenadas esféricas.

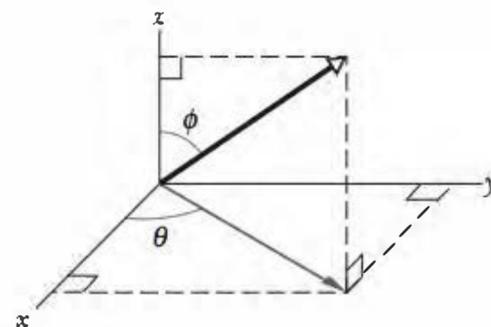



Figura 3-34 Problema 45.

46 O vetor $\vec{a}$ tem módulo 5,0 m e aponta para leste. O vetor $\vec{b}$ tem módulo 4,0 m e aponta na direção 35° a oeste do norte. Determine (a) o módulo e (b) a orientação do vetor $\vec{a}+\vec{b}$. Determine (c) o módulo e (d) a orientação do vetor $\vec{b}-\vec{a}$. (e) Desenhe os diagramas vetoriais correspondentes às duas combinações de vetores.

47 Os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ estão no plano xy. $\vec{A}$ tem módulo 8,00 e ângulo 130°; $\vec{B}$ tem componentes $B_x = -7{,}72$ e $B_y = -9{,}20$. Determine o ângulo entre o semieixo y negativo e (a) o vetor $\vec{A}$, (b) o vetor $\vec{A}\times\vec{B}$ e (c) o vetor $\vec{A}\times(\vec{B}+3{,}00\hat{k})$.

48 Dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm componentes, em metros, $a_x = 3{,}2$, $a_y = 1{,}6$, $b_x = 0{,}50$ e $b_y = 4{,}5$. (a) Determine o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Existem dois vetores no plano xy que são perpendiculares a $\vec{a}$ e têm um módulo de 5,0 m. Um, o vetor $\vec{c}$, tem uma componente x positiva; o outro, o vetor $\vec{d}$, tem uma componente x negativa. Determine (b) a componente x e (c) a componente y de $\vec{c}$; (d) a componente x e (e) a componente y de $\vec{d}$.

49 Um barco a vela parte do lado norte-americano do lago Erie para um ponto no lado canadense, 90,0 km ao norte. O navegante, contudo, termina 50,0 km a leste do ponto de partida. (a) Que distância e (b) em que direção deve navegar para chegar ao ponto desejado?

50 O vetor $\vec{d}_1$ é paralelo ao semieixo y negativo e o vetor $\vec{d}_2$ é paralelo ao semieixo x positivo. Determine a orientação (a) de $\vec{d}_2/4$ e (b) de $-\vec{d}_1/4$. Determine o módulo (c) de $\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2$ e (d) de $\vec{d}_1\cdot(\vec{d}_2/4)$. Determine a orientação (e) do vetor $\vec{d}_1\times\vec{d}_2$ e (f) do vetor $\vec{d}_2\times\vec{d}_1$. Determine o módulo (g) de $\vec{d}_1\times\vec{d}_2$ e (h) de $\vec{d}_2\times\vec{d}_1$. Determine (i) o módulo e (j) a orientação de $\vec{d}_1\times(\vec{d}_2/4)$.

51 Uma *falha geológica* é uma ruptura ao longo da qual faces opostas de uma rocha deslizaram uma em relação à outra. Na Fig. 3-35, os pontos A e B coincidiam antes de a rocha em primeiro plano deslizar para a direita. O deslocamento total $\overrightarrow{AB}$ está no plano da falha. A componente horizontal de $\overrightarrow{AB}$ é o *rejeito horizontal AC*. A componente de $\overrightarrow{AB}$ dirigida para baixo no plano da falha é o *rejeito de mergulho AD*. (a) Qual é o módulo do deslocamento total $\overrightarrow{AB}$ se o rejeito horizontal é 22,0 m e o rejeito de mergulho é 17,0 m? (b) Se o plano da falha faz um ângulo $\phi = 52{,}0°$ com a horizontal, qual é a componente vertical de $\overrightarrow{AB}$?

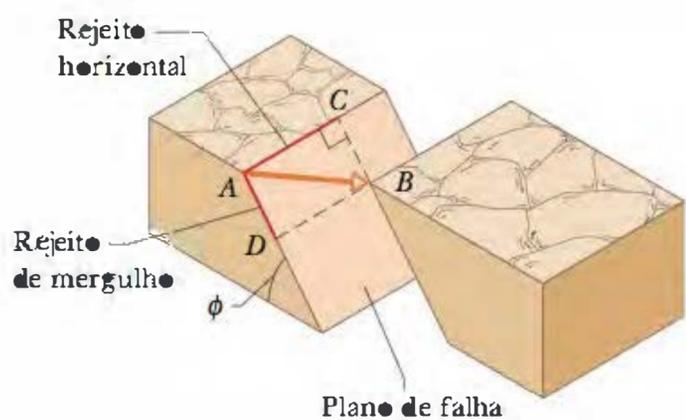



Figura 3-35 Problema 51.

52 São dados três deslocamentos em metros: $\vec{d}_1 = 4{,}0\hat{i}+5{,}0\hat{j}-6{,}0\hat{k}$, $\vec{d}_2 = -1{,}0\hat{i}+2{,}0\hat{j}+3{,}0\hat{k}$ e $\vec{d}_3 = 4{,}0\hat{i}+3{,}0\hat{j}+2{,}0\hat{k}$ (a) Determine $\vec{r} = \vec{d}_1-\vec{d}_2+\vec{d}_3$. (b) Determine o ângulo entre $\vec{r}$ e o semieixo z positivo. (c) Determine a componente de $\vec{d}_1$ em relação a $\vec{d}_2$. (d) Qual é a componente de $\vec{d}_1$ que é perpendicular a $\vec{d}_2$ e está no plano de $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$? [*Sugestão:* para resolver o item (c), considere a Eq. 3-20 e a Fig. 3-18; para resolver o item (d), considere a Eq. 3-27.]

53 Um vetor $\vec{a}$ de módulo 10 unidades e outro vetor $\vec{b}$ de módulo 6,0 unidades fazem um ângulo de 60°. Determine (a) o produto escalar dos dois vetores e (b) o módulo do produto vetorial $\vec{a}\times\vec{b}$.

54 Para os vetores da Fig. 3.32, com $a = 4$, $b = 3$ e $c = 5$, calcule (a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$, (b) $\vec{a}\cdot\vec{c}$ e (c) $\vec{b}\cdot\vec{c}$.

55 Uma partícula sofre três deslocamentos sucessivos em um plano: $\vec{d}_1$, 4,00 m para sudoeste, $\vec{d}_2$, 5,00 para leste, e $\vec{d}_3$, 6,00 em uma direção 60,0° ao norte do leste. Use um sistema de coordenadas com o eixo y apontando para o norte e o eixo x apontando para leste. Determine (a) a componente x e (b) a componente y de $\vec{d}_1$. Determine (c) a componente x e (d) a componente y de $\vec{d}_2$. Determine (e) a componente x e (f) a componente y de $\vec{d}_3$. Considere o deslocamento *total* da partícula após os três deslocamentos. Determine (g) a componente x, (h) a componente y, (i) o módulo e (j) a orientação do deslocamento total. Para que a partícula volte ao ponto de partida (k) que distância deve percorrer e (l) em que direção deve se deslocar?

56 Determine a soma dos quatro vetores a seguir (a) em termos dos vetores unitários e em termos (b) do módulo e (c) do ângulo em relação ao semieixo x positivo.

$\vec{P}$: 10,0 m, 25,0°, sentido anti-horário em relação a $+x$

$\vec{Q}$: 12,0 m, 10,0°, sentido anti-horário em relação a $+y$

$\vec{R}$: 8,00 m, 20,0°, sentido horário em relação a $-y$

$\vec{S}$: 9,00 m, 40,0°, sentido anti-horário em relação a $-y$

57 Se $\vec{B}$ é somado a $\vec{A}$, o resultado é $6{,}0\hat{i}+1{,}0\hat{j}$. Se $\vec{B}$ é subtraído de $\vec{A}$, o resultado é $-4{,}0\hat{i}+7{,}0\hat{j}$. Qual é o módulo de $\vec{A}$?

58 Um vetor $\vec{d}$ tem módulo 2,5 m e aponta para o norte. Determine (a) o módulo e (b) a orientação de $4{,}0\vec{d}$. Determine (c) o módulo e (d) a orientação de $-3{,}0\vec{d}$.

59 O vetor $\vec{A}$ tem um módulo de 12,0 m e faz um ângulo de 60,0° no sentido anti-horário com o semieixo x positivo de um sistema de coordenadas xy. O vetor $\vec{B}$ é dado por $(12{,}0\text{ m})\hat{i} + (8{,}00\text{ m})\hat{j}$ no mesmo sistema de coordenadas. O sistema de coordenadas sofre uma rotação de 20,0° no sentido anti-horário em torno da origem para formar um sistema $x'y'$. Determine os vetores (a) $\vec{A}$ e (b) $\vec{B}$ em termos dos vetores unitários do novo sistema.

60 Se $\vec{a}-\vec{b}=2\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{b}=4\vec{c}$ e $\vec{c}=3\hat{i}+4\hat{j}$, determine (a) $\vec{a}$ e (b) $\vec{b}$.

61 (a) Determine, em termos dos vetores unitários, $\vec{r}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ para $\vec{a}=5{,}0\hat{i}+4{,}0\hat{j}-6{,}0\hat{k}$, $\vec{b}=-2{,}0\hat{i}+2{,}0\hat{j}+3{,}0\hat{k}$ e $\vec{c}=4{,}0\hat{i}+3{,}0\hat{j}+2{,}0\hat{k}$. (b) Calcule o ângulo entre $\vec{r}$ e o semieixo z positivo. (c) Determine a componente de $\vec{a}$ em relação a $\vec{b}$. (d) Determine a componente de $\vec{a}$ em uma direção perpendicular a $\vec{b}$, no plano definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$. [*Sugestão:* para resolver o item (c), veja a Eq. 3-20 e a Fig. 3-18; para resolver o item (d), veja a Eq. 3-27.]

62 Um jogador de golfe precisa de três tacadas para colocar a bola no buraco. A primeira tacada lança a bola 3,66 m para o norte, a segunda 1,83 m para sudeste e a terceira 0,91 m para sudoeste. Determine (a) o módulo e (b) a direção do deslocamento necessário para colocar a bola no buraco na primeira tacada.

63 São dados três vetores em metros:

$$\vec{d}_1 = -3{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 2{,}0\hat{k}$$
$$\vec{d}_2 = -2{,}0\hat{i} - 4{,}0\hat{j} + 2{,}0\hat{k}$$
$$\vec{d}_3 = 2{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 1{,}0\hat{k}.$$

Determine (a) $\vec{d}_1\cdot(\vec{d}_2+\vec{d}_3)$, (b) $\vec{d}_1\cdot(\vec{d}_2\times\vec{d}_3)$ e (c) $\vec{d}_1\times(\vec{d}_2+\vec{d}_3)$.

64 Considere dois deslocamentos, um de módulo 3 m e outro de módulo 4 m. Mostre que os vetores deslocamento podem ser combinados para produzir um deslocamento de módulo (a) 7 m, (b) 1 m e (c) 5 m.

65 Um manifestante com placa de protesto parte da origem de um sistema de coordenadas xyz, com o plano xy na horizontal. Ele se desloca 40 m no sentido negativo do eixo x, faz uma curva de noventa graus à esquerda, caminha mais 20 m e sobe até o alto de uma torre com 25 m de altura. (a) Em termos de vetores unitários, qual é o deslocamento da placa do início ao fim? (b) O manifestante deixa cair a placa, que vai parar na base da torre. Qual é o módulo do deslocamento total, do início até este novo fim?

CAPÍTULO 4

MOVIMENTO EM DUAS E TRÊS DIMENSÕES

4-1 O QUE É FÍSICA?

Neste capítulo, continuamos a estudar a parte da física que analisa o movimento, mas agora os movimentos podem ser em duas ou três dimensões. Médicos e engenheiros aeronáuticos, por exemplo, precisam conhecer a física das curvas realizadas por pilotos de caça durante os combates aéreos, já que os jatos modernos fazem curvas tão rápidas que o piloto pode perder momentaneamente a consciência. Um engenheiro esportivo talvez esteja interessado na física do basquetebol. Quando um jogador vai cobrar um *lance livre* (em que o jogador lança a bola em direção à cesta, sem marcação, de uma distância de 4,3 m), pode arremessar a bola da altura dos ombros ou da altura da cintura. A primeira técnica é usada pela maioria esmagadora dos jogadores profissionais, mas o legendário Rick Barry estabeleceu o recorde de aproveitamento de lances livres usando a segunda.

Não é fácil compreender os movimentos em três dimensões. Por exemplo, o leitor provavelmente é capaz de dirigir um carro em uma rodovia (movimento em uma dimensão), mas teria muita dificuldade para pousar um avião (movimento em três dimensões) sem um treinamento adequado.

Iniciaremos nosso estudo do movimento em duas e três dimensões com as definições de posição e deslocamento.

4-2 Posição e Deslocamento

A localização de uma partícula (ou de um objeto que se comporte como uma partícula) pode ser especificada, de forma geral, através do **vetor posição** $\vec{r}$, um vetor que liga um ponto de referência (a origem de um sistema de coordenadas, na maioria dos casos) à partícula. Na notação de vetores unitários da Seção 3-5, $\vec{r}$ pode ser escrito na forma

$$\vec{r} = x\hat{\text{i}} + y\hat{\text{j}} + z\hat{\text{k}}, \tag{4-1}$$

onde $x\hat{\text{i}}$, $y\hat{\text{j}}$ e $z\hat{\text{k}}$ são as componentes vetoriais de $\vec{r}$ e x, y e z são as componentes escalares.

Os coeficientes x, y e z fornecem a localização da partícula em relação à origem ao longo dos eixos de coordenadas; em outras palavras, (x, y, z) são as coordenadas retangulares da partícula. A Fig. 4-1, por exemplo, mostra uma partícula cujo vetor posição é

$$\vec{r} = (-3\text{ m})\hat{\text{i}} + (2\text{ m})\hat{\text{j}} + (5\text{ m})\hat{\text{k}}$$

e cujas coordenadas retangulares são $(-3\text{ m}, 2\text{ m}, 5\text{ m})$. Ao longo do eixo x, a partícula está a 3 m da origem, no sentido oposto ao do vetor unitário $\hat{\text{i}}$. Ao longo do eixo y, está a 2 m da origem, no sentido do vetor unitário $\hat{\text{j}}$. Ao longo do eixo z, está a 5 m da origem, no sentido do vetor unitário $\hat{\text{k}}$.

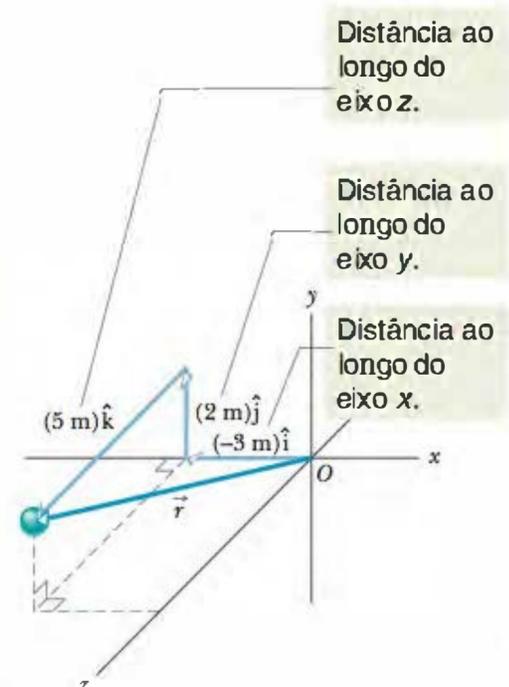



Figura 4-1 O vetor posição $\vec{r}$ de uma partícula é a soma vetorial das componentes vetoriais.

Quando uma partícula se move, o vetor posição varia de tal forma que sempre liga o ponto de referência (origem) à partícula. Se o vetor posição varia de $\vec{r}_1$ para $\vec{r}_2$, digamos, durante um certo intervalo de tempo, o **deslocamento** da partícula, $\Delta\vec{r}$, durante esse intervalo de tempo é dado por

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \qquad (4\text{-}2)$$

Usando a notação de vetores unitários da Eq. 4-1, podemos escrever este deslocamento como

$$\Delta\vec{r} = (x_2\hat{\imath} + y_2\hat{\jmath} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{\imath} + y_1\hat{\jmath} + z_1\hat{k})$$

ou como

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k}, \qquad (4\text{-}3)$$

onde as coordenadas (x_1, y_1, z_1) correspondem ao vetor posição $\vec{r}_1$ e as coordenadas (x_2, y_2, z_2) correspondem ao vetor posição $\vec{r}_2$. Podemos também escrever o vetor deslocamento substituindo $(x_2 - x_1)$ por Δx, $(y_2 - y_1)$ por Δy e $(z_2 - z_1)$ por Δz:

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{\imath} + \Delta y\hat{\jmath} + \Delta z\hat{k}. \qquad (4\text{-}4)$$

Exemplo

Vetor posição bidimensional: movimento de um coelho

Um coelho atravessa um estacionamento, no qual, por alguma razão, um conjunto de eixos coordenados foi desenhado. As coordenadas da posição do coelho, em metros, em função do tempo t, em segundos, são dadas por

$$x = -0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28 \qquad (4\text{-}5)$$

e

$$y = 0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30. \qquad (4\text{-}6)$$

(a) No instante $t = 15$ s, qual é o vetor posição $\vec{r}$ do coelho na notação de vetores unitários e na notação módulo-ângulo?

IDEIA-CHAVE

As coordenadas x e y da posição do coelho, dadas pelas Eqs. 4-5 e 4-6, são as componentes escalares do vetor posição $\vec{r}$ do coelho.

Cálculos Podemos escrever

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}. \qquad (4\text{-}7)$$

[Escrevemos $\vec{r}(t)$ em vez de $\vec{r}$ porque as componentes são funções de t e, portanto, $\vec{r}$ também é função de t.]

Em $t = 15$ s, as componentes escalares são

$$x = (-0{,}31)(15)^2 + (7{,}2)(15) + 28 = 66 \text{ m}$$

e

$$y = (0{,}22)(15)^2 - (9{,}1)(15) + 30 = -57 \text{ m},$$

donde

$$\vec{r} = (66 \text{ m})\hat{\imath} - (57 \text{ m})\hat{\jmath}, \qquad \text{(Resposta)}$$

que está desenhado na Fig. 4-2*a*. Para obter o módulo e o ângulo de $\vec{r}$, usamos a Eq. 3-6:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(66 \text{ m})^2 + (-57 \text{ m})^2}$$
$$= 87 \text{ m}, \qquad \text{(Resposta)}$$

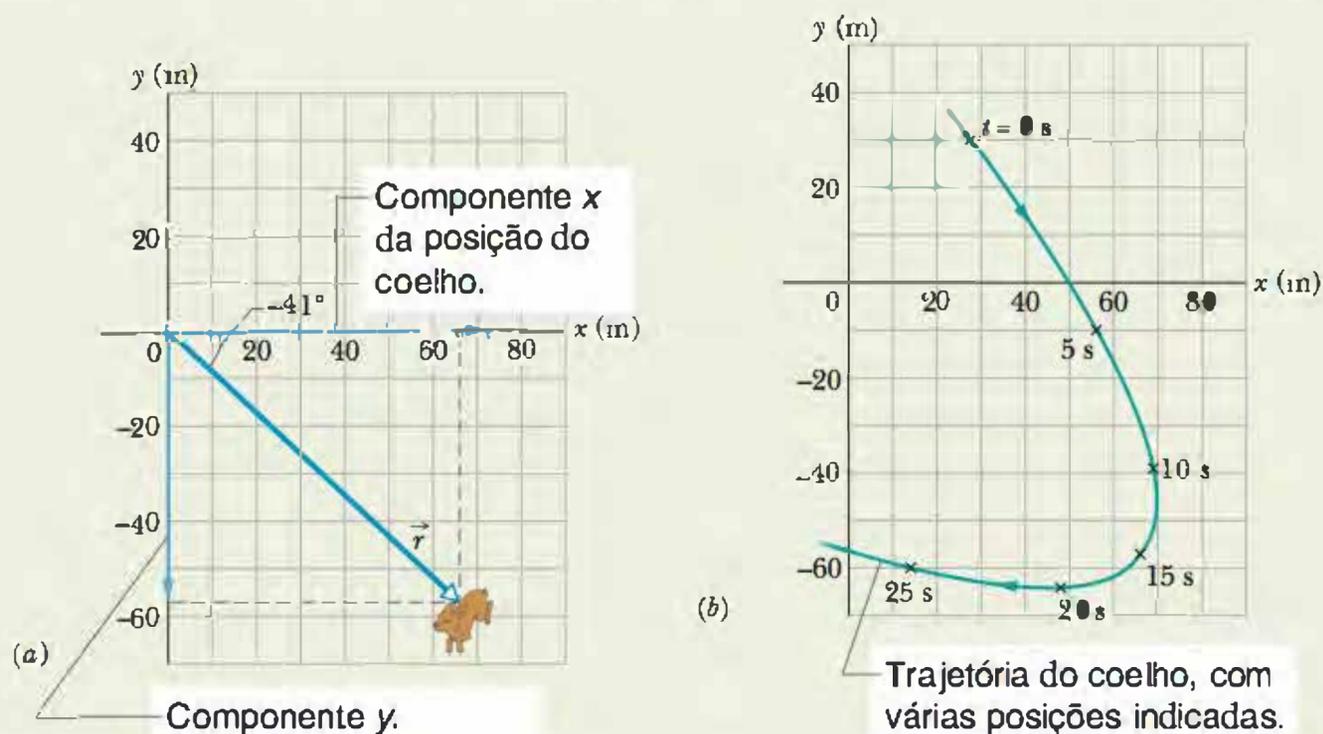



Figura 4-2 (*a*) O vetor posição de um coelho, $\vec{r}$, no instante $t = 15$ s. As componentes escalares de $\vec{r}$ são mostradas ao longo dos eixos. (*b*) A trajetória do coelho e a posição do animal para seis valores de t.

e $$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\left(\frac{-57\text{ m}}{66\text{ m}}\right) = -41°.$$ (Resposta)

Verificação Embora $\theta = 139°$ possua a mesma tangente que $-41°$, os sinais das componentes de $\vec{r}$ indicam que o ângulo desejado é $139° - 180° = -41°$.

(b) Desenhe o gráfico da trajetória do coelho de $t = 0$ a $t = 25$ s.

Plotagem Podemos repetir a parte (a) para vários valores de t e plotar os resultados. A Fig. 4-2b mostra os pontos do gráfico para seis valores de t e a curva que liga esses pontos. Podemos também plotar a curva em uma calculadora gráfica a partir das Eqs. 4-5 e 4-6.

4-3 Velocidade Média e Velocidade Instantânea

Se uma partícula se move de um ponto para outro, podemos estar interessados em saber com que rapidez a partícula está se movendo. Como no Capítulo 2, podemos definir duas grandezas que expressam a "rapidez" de um movimento: *velocidade média* e *velocidade instantânea*. No caso de um movimento bidimensional ou tridimensional, porém, devemos considerar essas grandezas como vetores e usar a notação vetorial.

Se uma partícula sofre um deslocamento $\Delta\vec{r}$ em um intervalo de tempo Δt, a **velocidade média** $\vec{v}_{\text{méd}}$ é dada por

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{intervalo de tempo}},$$

ou $$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{4-8}$$

Esta equação nos diz que a orientação de $\vec{v}_{\text{méd}}$ (o vetor do lado esquerdo da Eq. 4-8) deve ser igual à do deslocamento $\Delta\vec{r}$ (o vetor do lado direito). Usando a Eq. 4-4, podemos escrever a Eq. 4-8 em termos das componentes vetoriais:

$$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta x\hat{\text{i}} + \Delta y\hat{\text{j}} + \Delta z\hat{\text{k}}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\text{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\text{j}} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{\text{k}}. \tag{4-9}$$

Assim, por exemplo, se uma partícula sofre um deslocamento de $(12\text{ m})\hat{\text{i}} + (3{,}0\text{ m})\hat{\text{k}}$ em 2,0 s, a velocidade média durante esse movimento é

$$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(12\text{ m})\hat{\text{i}} + (3{,}0\text{ m})\hat{\text{k}}}{2{,}0\text{ s}} = (6{,}0\text{ m/s})\hat{\text{i}} + (1{,}5\text{ m/s})\hat{\text{k}}.$$

Nesse caso, portanto, a velocidade média (uma grandeza vetorial) tem uma componente de 6,0 m/s em relação ao eixo x e uma componente de 1,5 m/s em relação ao eixo z.

Quando falamos da **velocidade** de uma partícula, em geral estamos nos referindo à **velocidade instantânea** $\vec{v}$ em um certo instante. Esta velocidade $\vec{v}$ é o valor para o qual tende a velocidade $\vec{v}_{\text{méd}}$ quando o intervalo de tempo Δt tende a zero. Usando a linguagem do cálculo, podemos escrever $\vec{v}$ como a derivada

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{4-10}$$

A Fig. 4-3 mostra a trajetória de uma partícula que se move no plano xy. Quando a partícula se desloca para a direita ao longo da curva, o vetor posição gira para a direita. Durante o intervalo de tempo Δt, o vetor posição muda de $\vec{r}_1$ para $\vec{r}_2$ e o deslocamento da partícula é $\Delta\vec{r}$.

Para determinar a velocidade instantânea da partícula no instante t_1 (instante em que a partícula se encontra na posição 1), reduzimos o intervalo de tempo Δt nas vizinhanças de t_1, fazendo-o tender a zero. Ao fazermos isso, três coisas acontecem: (1) O vetor posição $\vec{r}_2$ da Fig. 4-3 se aproxima de $\vec{r}_1$, fazendo $\Delta\vec{r}$ tender a zero. (2) A direção de $\Delta\vec{r}/\Delta t$ (e, portanto, de $\vec{v}_{\text{méd}}$) se aproxima da direção da reta tangente à

Quando a partícula se move, o vetor posição muda.

Tangente

Este é o deslocamento.

y
1
2
$\Delta\vec{r}$
$\vec{r}_1$
$\vec{r}_2$
Trajetória
O
x

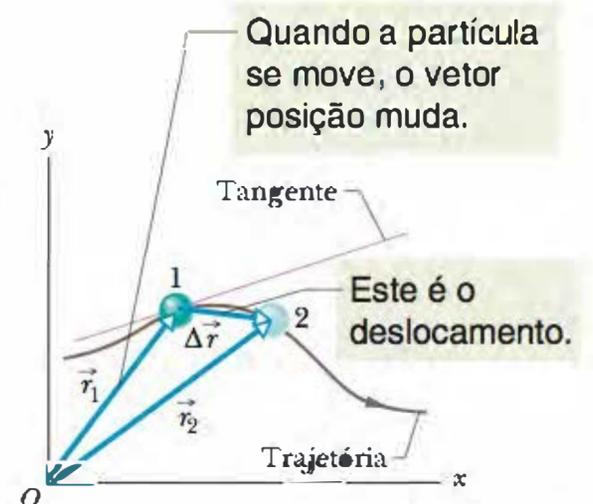



Figura 4-3 O deslocamento $\Delta\vec{r}$ de uma partícula durante um intervalo de tempo Δt, da posição 1, com vetor posição $\vec{r}_1$ no instante t_1, até a posição 2, com vetor posição $\vec{r}_2$ no instante t_2. A figura mostra também a tangente à trajetória da partícula na posição 1.

trajetória da partícula na posição 1. (3) A velocidade média $\vec{v}_{méd}$ se aproxima da velocidade instantânea $\vec{v}$ no instante t_1.

No limite $\Delta t \to 0$, temos $\vec{v}_{méd} \to \vec{v}$ e, o que é mais importante nesse contexto, $\vec{v}_{méd}$ assume a direção da reta tangente. Assim, $\vec{v}$ também assume essa direção:

> A direção da velocidade instantânea $\vec{v}$ de uma partícula é sempre tangente à trajetória da partícula na posição da partícula.

O resultado é o mesmo em três dimensões: $\vec{v}$ é sempre tangente à trajetória da partícula.

Para escrever a Eq. 4-10 na forma de vetores unitários, usamos a expressão para $\vec{r}$ dada pela Eq. 4-1:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x\hat{\mathrm{i}} + y\hat{\mathrm{j}} + z\hat{\mathrm{k}}) = \frac{dx}{dt}\hat{\mathrm{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathrm{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathrm{k}}.$$

Essa equação pode ser simplificada se a escrevermos como

$$\vec{v} = v_x\hat{\mathrm{i}} + v_y\hat{\mathrm{j}} + v_z\hat{\mathrm{k}}, \qquad (4\text{-}11)$$

onde as componentes escalares de $\vec{v}$ são

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad \text{e} \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \qquad (4\text{-}12)$$

Assim, por exemplo, dx/dt é a componente escalar de $\vec{v}$ em relação ao eixo x. Isso significa que podemos encontrar as componentes escalares de $\vec{v}$ derivando as componentes de $\vec{r}$.

A Fig. 4-4 mostra o vetor velocidade $\vec{v}$ e as componentes escalares x e y. Note que $\vec{v}$ é tangente à trajetória da partícula na posição da partícula. *Atenção:* um vetor posição, como os que aparecem nas Figs. 4-1 a 4-3, é uma seta que se estende de um ponto ("aqui") a outro ("lá"). Entretanto, um vetor velocidade, como o da Fig. 4-4, *não se estende* de um ponto a outro. No caso do vetor velocidade, a orientação do vetor é usada para mostrar a direção instantânea do movimento de uma partícula localizada na origem do vetor; o comprimento, que representa o módulo da velocidade, pode ser desenhado em qualquer escala.

TESTE 1

A figura mostra uma trajetória circular descrita por uma partícula. Se a velocidade da partícula em um certo instante é $\vec{v} = (2\text{ m/s})\hat{\mathrm{i}} - (2\text{ m/s})\hat{\mathrm{j}}$, em qual dos quadrantes a partícula está se movendo nesse instante se o movimento é (a) no sentido horário e (b) no sentido anti-horário? Desenhe $\vec{v}$ na figura para os dois casos.

O vetor velocidade é sempre tangente à trajetória.

Estas são as componentes x e y do vetor velocidade neste instante.

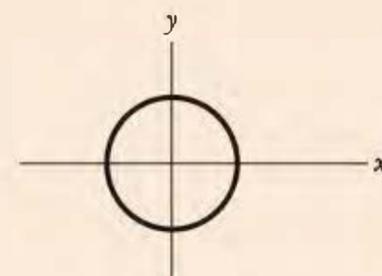
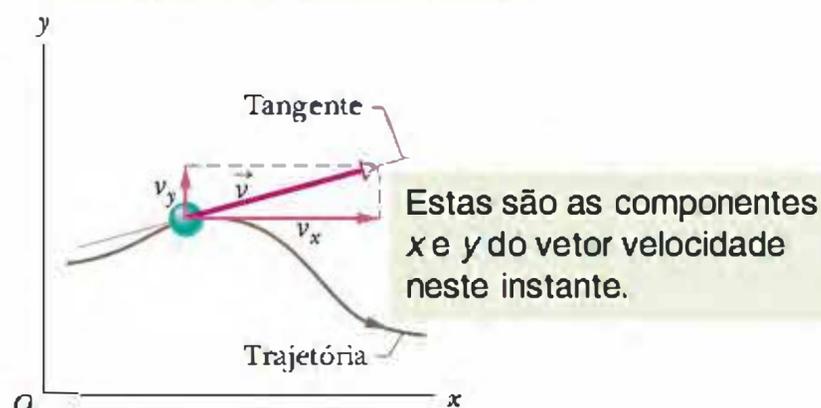



Figura 4-4 A velocidade $\vec{v}$ de uma partícula e as componentes escalares de $\vec{v}$.

Exemplo

Velocidade bidimensional de um coelho

Determine a velocidade $\vec{v}$ do coelho do exemplo anterior no instante $t = 15$ s.

IDEIA-CHAVE

Podemos determinar $\vec{v}$ calculando as derivadas das componentes do vetor posição do coelho.

Cálculos Aplicando a parte da Eq. 4-12 correspondente a v_x à Eq. 4-5, descobrimos que a componente x de $\vec{v}$ é

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28) = -0{,}62t + 7{,}2. \quad (4\text{-}13)$$

Em $t = 15$ s, isso nos dá $v_x = -2{,}1$ m/s. Da mesma forma, aplicando a parte da Eq. 4-12 correspondente a v_y à Eq. 4-6, descobrimos que a componente y é

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30) = 0{,}44t - 9{,}1. \quad (4\text{-}14)$$

Em $t = 15$ s, isso nos dá $v_y = -2{,}5$ m/s. Assim, de acordo com a Eq. 4-11,

$$\vec{v} = (-2{,}1 \text{ m/s})\hat{i} + (-2{,}5 \text{ m/s})\hat{j}, \quad \text{(Resposta)}$$

que está desenhada na Fig. 4-5, tangente à trajetória do coelho e na direção em que o animal está se movendo em $t = 15$ s.

Para obter o módulo e o ângulo de $\vec{v}$, podemos usar uma calculadora ou escrever, de acordo com a Eq. 3-6,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-2{,}1 \text{ m/s})^2 + (-2{,}5 \text{ m/s})^2} = 3{,}3 \text{ m/s} \quad \text{(Resposta)}$$

e

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1}\left(\frac{-2{,}5 \text{ m/s}}{-2{,}1 \text{ m/s}}\right) = \tan^{-1} 1{,}19 = -130°. \quad \text{(Resposta)}$$

Verificação O ângulo é $-130°$ ou $-130° + 180° = 50°$?

Figura 4-5 A velocidade $\vec{v}$ do coelho em $t = 15$ s.

4-4 Aceleração Média e Aceleração Instantânea

Quando a velocidade de uma partícula varia de $\vec{v}_1$ para $\vec{v}_2$ em um intervalo de tempo Δt, a **aceleração média** $\vec{a}_{méd}$ durante o intervalo Δt é

$$\text{aceleração média} = \frac{\text{variação de velocidade}}{\text{intervalo de tempo}},$$

ou

$$\vec{a}_{méd} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \quad (4\text{-}15)$$

Quando fazemos Δt tender a zero no entorno de um certo instante, $\vec{a}_{méd}$ tende para a **aceleração instantânea** (ou, simplesmente, **aceleração**) $\vec{a}$ nesse instante, ou seja,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (4\text{-}16)$$

Se o módulo *ou* a orientação da velocidade varia (ou ambos variam), a partícula possui uma aceleração.

Podemos escrever a Eq. 4-16 em termos de vetores unitários substituindo $\vec{v}$ pelo seu valor, dado pela Eq. 4-11, para obter

Estas são as componentes x e y do vetor aceleração neste instante.

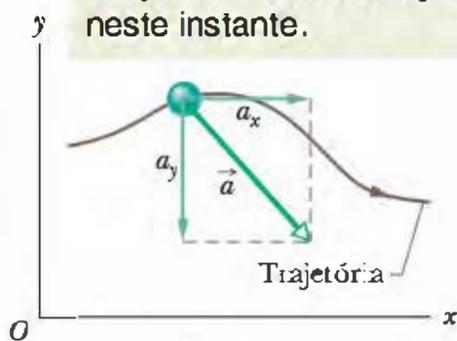



Figura 4-6 A aceleração $\vec{a}$ de uma partícula e as componentes escalares de $\vec{a}$.

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k})$$
$$= \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}.$$

Podemos escrever esta equação na forma

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}, \qquad (4\text{-}17)$$

onde as componentes escalares de $\vec{a}$ são

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad \text{e} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \qquad (4\text{-}18)$$

Assim, podemos obter as componentes escalares de $\vec{a}$ derivando as componentes escalares de $\vec{v}$ em relação ao tempo.

A Fig. 4-6 mostra o vetor aceleração $\vec{a}$ e suas componentes escalares para uma partícula que se move em duas dimensões. *Atenção:* um vetor aceleração, como o da Fig. 4-6, *não se estende* de um ponto a outro. No caso do vetor aceleração, a orientação do vetor é usada para mostrar a direção instantânea da aceleração de uma partícula localizada na origem do vetor; o comprimento, que representa o módulo da aceleração, pode ser desenhado em qualquer escala.

TESTE 2

Considere as seguintes descrições da posição (em metros) de uma partícula que se move no plano xy:

(1) $x = -3t^2 + 4t - 2$ e $y = 6t^2 - 4t$

(2) $x = -3t^3 - 4t$ e $y = -5t^2 + 6$

(3) $\vec{r} = 2t^2\hat{i} - (4t + 3)\hat{j}$

(4) $\vec{r} = (4t^3 - 2t)\hat{i} + 3\hat{j}$

As componentes x e y da aceleração são constantes em todas essas situações? A aceleração $\vec{a}$ é constante?

Exemplo

Aceleração bidimensional de um coelho

Determine a aceleração $\vec{a}$ do coelho dos exemplos anteriores no instante $t = 15$ s.

IDEIA-CHAVE

Podemos determinar a aceleração $\vec{a}$ calculando as derivadas das componentes da velocidade do coelho.

Cálculos Aplicando a parte da Eq. 4-18 correspondente a a_x à Eq. 4-13, descobrimos que a componente x de $\vec{a}$ é

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(-0{,}62t + 7{,}2) = -0{,}62 \text{ m/s}^2.$$

Analogamente, aplicando a parte da Eq. 4-18 correspondente a a_y à Eq. 4-14, descobrimos que a componente y é

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}44t - 9{,}1) = 0{,}44 \text{ m/s}^2.$$

Vemos que essa aceleração não varia com o tempo (é constante), pois a variável tempo, t, não aparece na expressão das componentes da aceleração. De acordo com a Eq. 4-17,

$$\vec{a} = (-0{,}62 \text{ m/s}^2)\hat{i} + (0{,}44 \text{ m/s}^2)\hat{j}, \qquad \text{(Resposta)}$$

que é mostrada superposta à trajetória do coelho na Fig. 4-7.

Para obter o módulo e o ângulo de $\vec{a}$, podemos usar uma calculadora ou a Eq. 3-6. No caso do módulo, temos:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0{,}62 \text{ m/s}^2)^2 + (0{,}44 \text{ m/s}^2)^2}$$
$$= 0{,}76 \text{ m/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

No caso do ângulo, temos:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a_y}{a_x} = \tan^{-1}\left(\frac{0{,}44 \text{ m/s}^2}{-0{,}62 \text{ m/s}^2}\right) = -35°.$$

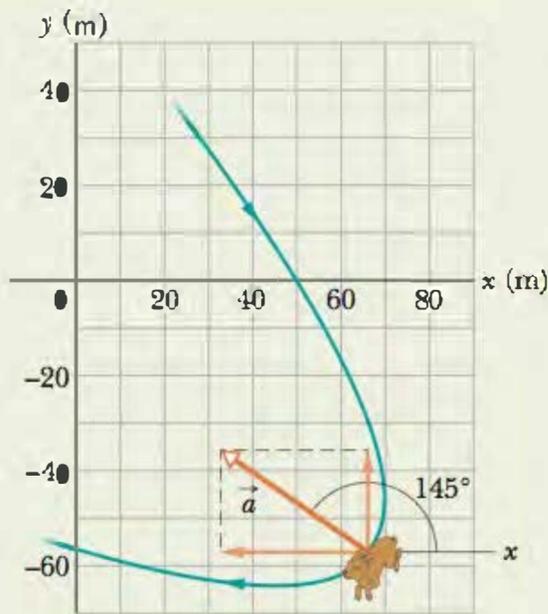



Figura 4-7 A aceleração $\vec{a}$ do coelho em $t = 15$ s. O coelho possui a mesma aceleração em todos os pontos da trajetória.

Esse ângulo, que é o resultado fornecido por uma calculadora, indica que a orientação de $\vec{a}$ é para a direita e para baixo na Fig. 4-7. Entretanto, sabemos, pelas componentes x e y, que a orientação de $\vec{a}$ é para a esquerda e para cima. Para determinar o outro ângulo que possui a mesma tangente que $-35°$, mas não é mostrado pela calculadora, somamos 180°:

$$-35° + 180° = 145°. \quad \text{(Resposta)}$$

Esse novo resultado *é* compatível com as componentes de $\vec{a}$. Observe que, como a aceleração do coelho é constante, o módulo e a orientação de $\vec{a}$ são os mesmos em todos os pontos da trajetória do coelho.

4-5 Movimento Balístico

Consideraremos a seguir um caso especial de movimento bidimensional: uma partícula que se move em um plano vertical com velocidade inicial $\vec{v}_0$ e com uma aceleração constante, igual à aceleração de queda livre $\vec{g}$, dirigida para baixo. Uma partícula que se move dessa forma é chamada de **projétil** (o que significa que é projetada ou lançada) e o movimento é chamado de **movimento balístico**. O projétil pode ser uma bola de tênis (Fig. 4-8) ou de pingue-pongue, mas não um avião ou um pato. Muitos esportes (do golfe e do futebol ao lacrosse e ao raquetebol) envolvem o movimento balístico de uma bola; jogadores e técnicos estão sempre procurando controlar esse movimento para obter o máximo de vantagem. O jogador que descobriu a rebatida em Z no raquetebol na década de 1970, por exemplo, vencia os jogos com facilidade porque a trajetória peculiar da bola no fundo da quadra surpreendia os adversários.

Vamos agora analisar o movimento balístico usando as ferramentas descritas nas Seções 4-2 a 4-4 para o movimento bidimensional, sem levar em conta a influência do ar. A Fig. 4-9, que será discutida na próxima seção, mostra a trajetória de um projétil quando o efeito do ar pode ser ignorado. O projétil é lançado com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$ que pode ser escrita na forma

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{\mathrm{i}} + v_{0y}\hat{\mathrm{j}}. \quad (4\text{-}19)$$

Figura 4-8 Fotografia estroboscópica de uma bola de tênis amarela quicando em uma superfície dura. Entre os impactos, a trajetória da bola é balística. *Fonte:* Richard Megna/Fundamental Photographs.

As componentes v_{0x} e v_{0y} podem ser calculadas se conhecermos o ângulo θ_0 entre $\vec{v}_0$ e o semieixo x positivo:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \quad \text{e} \quad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0. \quad (4\text{-}20)$$

Durante o movimento bidimensional, o vetor posição $\vec{r}$ e a velocidade $\vec{v}$ do projétil mudam continuamente, mas o vetor aceleração $\vec{a}$ é constante e está *sempre* dirigido verticalmente para baixo. O projétil *não possui* aceleração horizontal.

O movimento balístico, como o das Figs. 4-8 e 4-9, parece complicado, mas temos a seguinte propriedade simplificadora (demonstrada experimentalmente):

No movimento balístico, o movimento horizontal e o movimento vertical são independentes, ou seja, um não afeta o outro.

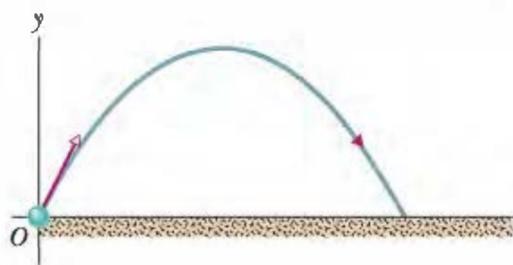



Figura 4-9 O *movimento balístico* de um projétil lançado da origem de um sistema de coordenadas com velocidade inicial $\vec{v}_0$ e ângulo θ_0. Como mostram as componentes da velocidade, o movimento é uma combinação de movimento vertical (com aceleração constante) e movimento horizontal (com velocidade constante).

Movimento vertical + Movimento horizontal ➡ Movimento balístico

O movimento balístico é uma combinação do movimento vertical com o movimento horizontal.

Velocidade vertical

Lançamento

Velocidade de lançamento

Ângulo de lançamento

Lançamento

Velocidade decrescente

Velocidade constante

$v_y = 0$

Velocidade nula na altura máxima

Velocidade constante

$v_y = 0$

Velocidade crescente

Velocidade constante

Velocidade constante

Essa propriedade permite decompor um problema que envolve um movimento bidimensional em dois problemas unidimensionais independentes e mais fáceis de serem resolvidos, um para o movimento horizontal (com *aceleração nula*) e outro para o movimento vertical (com *aceleração constante para baixo*). Apresentamos a seguir dois experimentos que mostram que o movimento horizontal e o movimento vertical são realmente independentes.

Duas Bolas de Golfe

A Fig. 4-10 é uma fotografia estroboscópica de duas bolas de golfe, uma que simplesmente se deixou cair e outra que foi lançada horizontalmente por uma mola. As bolas de golfe têm o mesmo movimento vertical; ambas percorrem a mesma distância vertical no mesmo intervalo de tempo. *O fato de uma bola estar se movendo horizontalmente enquanto está caindo não afeta o movimento vertical*, ou seja, os movimentos horizontal e vertical são independentes.

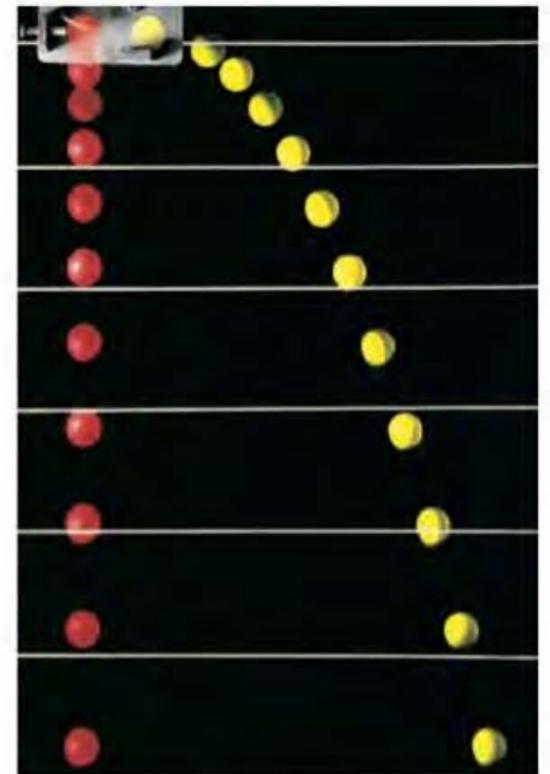



Figura 4-10 Uma bola é deixada cair a partir do repouso no mesmo instante em que outra bola é lançada horizontalmente para a direita. Os movimentos verticais das duas bolas são iguais. *Fonte:* Richard Megna/ Fundamental Photographs.

Uma Demonstração Interessante

A Fig. 4-11 mostra uma demonstração que tem animado muitas aulas de física. Um canudo C é usado para soprar pequenas bolas em direção a uma lata suspensa por um eletroímã M. O experimento é arranjado de tal forma que o canudo está apontado para a lata e o ímã solta a lata no mesmo instante em que a bola deixa o tubo.

Se g (o módulo da aceleração de queda livre) fosse zero, a bola seguiria a trajetória em linha reta mostrada na Fig. 4-11 e a lata continuaria no mesmo lugar após ter sido liberada pelo eletroímã. Assim, a bola certamente atingiria a lata, independentemente da força do sopro.

Na verdade, *g não é* zero, mas, mesmo assim, a bola *sempre atinge a lata!* Como mostra a Fig. 4-11, a aceleração da gravidade faz com que a bola e a lata sofram o mesmo deslocamento para baixo, h, em relação à posição que teriam, a cada instante, se a gravidade fosse nula. Quanto maior a força do sopro, maior a velocidade inicial da bola, menor o tempo que a bola leva para se chocar com a lata e menor o valor de h.

A bola e a lata caem à mesma distância h.

M
Lata
h
Trajetória de zero g
C

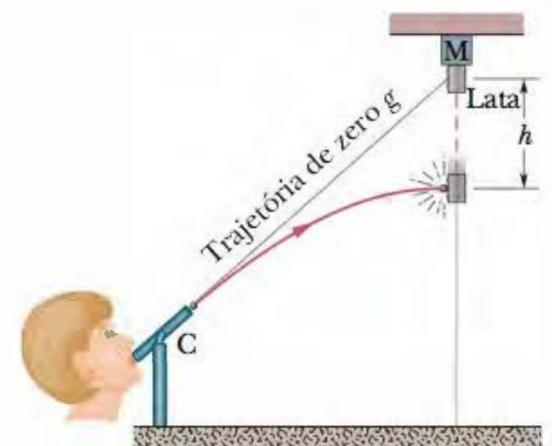



Figura 4-11 A bola sempre acerta na lata que está caindo, já que as duas percorrem a mesma distância h em queda livre.

TESTE 3

Em um certo instante, uma bola que descreve um movimento balístico tem uma velocidade $\vec{v} = 25\hat{i} - 4{,}9\hat{j}$ (o eixo x é horizontal, o eixo y é para cima e $\vec{v}$ está em metros por segundo). A bola já passou pelo ponto mais alto da trajetória?

4-6 Análise do Movimento Balístico

Agora estamos preparados para analisar o movimento horizontal e vertical de um projétil.

Movimento Horizontal

Como *não existe aceleração* na direção horizontal, a componente horizontal v_x da velocidade de um projétil permanece inalterada e igual ao valor inicial v_{0x} durante toda a trajetória, como mostra a Fig. 4-12. Em qualquer instante t, o deslocamento horizontal do projétil em relação à posição inicial, $x - x_0$, é dado pela Eq. 2-15 com $a = 0$, que podemos escrever na forma

$$x - x_0 = v_{0x}t.$$

Como $v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$, temos:

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t. \tag{4-21}$$

Figura 4-12 A componente vertical da velocidade deste skatista está variando, mas não a componente horizontal, que é igual à velocidade do skate. Em consequência, o skate permanece abaixo do atleta, permitindo que ele pouse no skate após o salto. *Fonte:* Jamie Budge/ Liaison/Getty Images, Inc.

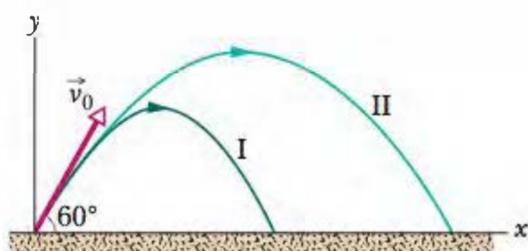



Figura 4-13 (I) Trajetória de uma bola, levando em conta a resistência do ar. (II) Trajetória que a bola seguiria no vácuo, calculada usando as equações deste capítulo. Os dados correspondentes estão na Tabela 4-1. (Adaptada de "The Trajectory of a Fly Ball", Peter J. Brancazio, *The Physics Teacher*, January 1985.)

Tabela 4-1

Trajetórias de Duas Bolas de Beisebol[a]

	Trajetória I (Ar)	Trajetória II (Vácuo)
Alcance	98,5 m	177 m
Altura máxima	53,0 m	76,8 m
Tempo de percurso	6,6 s	7,9 s

[a]Veja a Fig. 4-13. O ângulo de lançamento é 60° e a velocidade de lançamento é 44,7 m/s.

Movimento Vertical

O movimento vertical é o movimento que discutimos na Seção 2-9 para uma partícula em queda livre. O mais importante é que a aceleração é constante. Assim, as equações da Tabela 2-1 podem ser usadas, desde que a seja substituído por $-g$ e o eixo x seja substituído pelo eixo y. A Eq. 2-15, por exemplo, se torna

$$\begin{aligned} y - y_0 &= v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \\ &= (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2, \end{aligned} \tag{4-22}$$

onde a componente vertical da velocidade inicial, v_{0y}, foi substituída pela expressão equivalente $v_0 \operatorname{sen} \theta_0$. Da mesma forma, as Eqs. 2-11 e 2-16 se tornam

$$v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - gt \tag{4-23}$$

e

$$v_y^2 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \tag{4-24}$$

Como mostram a Fig. 4-9 e a Eq. 4-23, a componente vertical da velocidade se comporta exatamente como a de uma bola lançada verticalmente para cima. Está dirigida inicialmente para cima e o módulo diminui progressivamente até se anular, *exatamente no ponto mais alto da trajetória*. Em seguida, a componente vertical da velocidade muda de sentido e o módulo passa a aumentar com o tempo.

Equação da Trajetória

Podemos obter a equação do caminho percorrido pelo projétil (a **trajetória**) eliminando o tempo t nas Eqs. 4-21 e 4-22. Explicitando t na Eq. 4-21 e substituindo o resultado na Eq. 4-22, obtemos, após algumas manipulações algébricas,

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} \quad \text{(trajetória)}. \tag{4-25}$$

Esta é a equação da trajetória mostrada na Fig. 4-9. Ao deduzi-la, para simplificar, fizemos $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ nas Eqs. 4-21 e 4-22, respectivamente. Como g, θ_0 e v_0 são constantes, a Eq. 4-25 é da forma $y = ax + bx^2$, onde a e b são constantes. Como essa é a equação de uma parábola, dizemos que a trajetória é *parabólica*.

Alcance Horizontal

O *alcance horizontal* R de um projétil é a distância *horizontal* percorrida pelo projétil até voltar à altura inicial (altura de lançamento). Para determinar o alcance R, fazemos $x - x_0 = R$ na Eq. 4-21 e $y - y_0 = 0$ na Eq. 4-22, obtendo

$$R = (v_0 \cos \theta_0)t$$

e

$$0 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Eliminando t nessas duas equações, obtemos

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0.$$

Usando a identidade $\operatorname{sen} 2\theta_0 = 2 \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0$ (veja o Apêndice E), obtemos

$$R = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta_0. \tag{4-26}$$

Atenção: esta equação *não fornece* a distância horizontal percorrida pelo projétil quando a altura final é diferente da altura de lançamento.

Observe que R na Eq. 4-26 atinge o valor máximo para $\operatorname{sen} 2\theta_0 = 1$, que corresponde a $2\theta_0 = 90°$ ou $\theta_0 = 45°$.

O alcance horizontal R é máximo para um ângulo de lançamento de 45°.

Quando a altura final é diferente da altura de lançamento, com acontece no arremesso de peso, no lançamento de disco e no basquetebol, a distância horizontal máxima não é atingida para um ângulo de lançamento de 45°.

Efeito do Ar

Até agora, supusemos que o ar não exerce efeito algum sobre o movimento de um projétil. Em muitas situações, porém, a diferença entre a trajetória calculada desta forma e a trajetória real do projétil pode ser considerável, já que o ar resiste (se opõe) ao movimento. A Fig. 4-13, por exemplo, mostra as trajetórias de duas bolas de beisebol que deixam o bastão fazendo um ângulo de 60° com a horizontal, com uma velocidade inicial de 44,7 m/s. A trajetória I (de uma bola de verdade) foi calculada para as condições normais de jogo, levando em conta a resistência do ar. A trajetória II (de uma bola em condições ideais) é a trajetória que a bola seguiria no vácuo.

TESTE 4

Uma bola de beisebol é rebatida na direção do campo de jogo. Durante o percurso (ignorando o efeito do ar), o que acontece com a componente (a) horizontal e (b) vertical da velocidade? Qual é a componente (c) horizontal e (d) vertical da aceleração durante a subida, durante a descida e no ponto mais alto da trajetória?

Exemplo

Projétil lançado de um avião

Na Fig. 4-14, um avião de salvamento voa a 198 km/h (= 55,0 m/s), a uma altura constante de 500 m, rumo a um ponto diretamente acima da vítima de um naufrágio, para deixar cair uma balsa.

(a) Qual deve ser o ângulo ϕ da linha de visada do piloto para a vítima no instante em que o piloto deixa cair a balsa?

IDEIAS-CHAVE

Depois de liberada, a balsa é um projétil; assim, os movimentos horizontal e vertical podem ser examinados separadamente (não é preciso levar em conta a curvatura da trajetória).

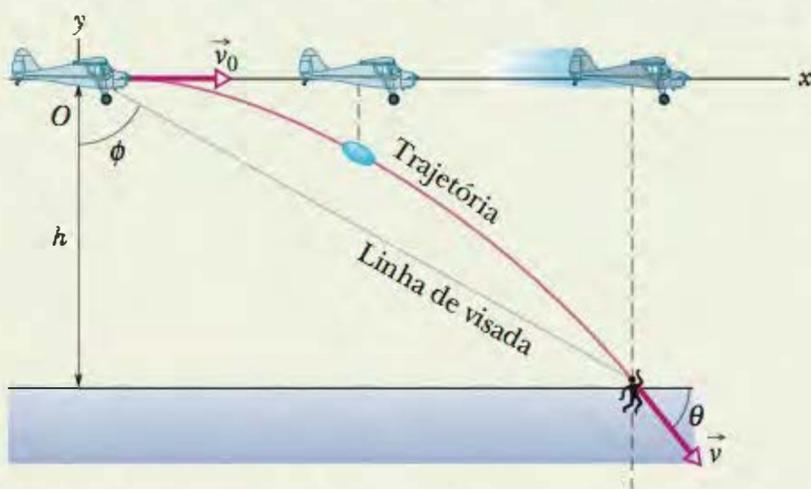



Figura 4-14 Um avião lança uma balsa enquanto se desloca com velocidade constante em um voo horizontal. Durante a queda, a velocidade horizontal da balsa permanece igual à velocidade do avião.

Cálculos Na Fig. 4-14, vemos que ϕ é dado por

$$\phi = \tan^{-1}\frac{x}{h}, \qquad (4\text{-}27)$$

onde x é a coordenada horizontal da vítima (e da balsa ao chegar à água) e $h = 500$ m. Podemos calcular x com o auxílio da Eq. 4-21:

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t. \qquad (4\text{-}28)$$

Sabemos que $x_0 = 0$ porque a origem foi colocada no ponto de lançamento. Como a balsa é *deixada cair* e não arremessada do avião, a velocidade inicial $\vec{v}_0$ é igual à velocidade do avião. Assim, sabemos também que a velocidade inicial tem módulo $v_0 = 55{,}0$ m/s e ângulo $\theta_0 = 0°$ (medido em relação ao semieixo x positivo). Entretanto, não conhecemos o tempo t que a balsa leva para percorrer a distância do avião até a vítima.

Para determinar o valor de t, temos que considerar o movimento *vertical* e, mais especificamente, a Eq. 4-22:

$$y - y_0 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2. \qquad (4\text{-}29)$$

onde o deslocamento vertical $y - y_0$ da balsa é -500 m (o valor negativo indica que a balsa se move *para baixo*).

Assim,

$$-500\ \text{m} = (55{,}0\ \text{m/s})(\text{sen}\ 0°)t - \tfrac{1}{2}(9{,}8\ \text{m/s}^2)t^2. \quad (4\text{-}30)$$

Resolvendo esta equação, obtemos $t = 10{,}1$. Substituindo este valor na Eq. 4-28, obtemos:

$$x - 0 = (55{,}0\ \text{m/s})(\cos 0°)(10{,}1\ \text{s}), \quad (4\text{-}31)$$

ou

$$x = 555{,}5\ \text{m}.$$

Nesse caso, a Eq. 4-27 nos dá

$$\phi = \tan^{-1}\frac{555{,}5\ \text{m}}{500\ \text{m}} = 48{,}0°. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) No momento em que a balsa atinge a água, qual é a sua velocidade $\vec{v}$ em termos dos vetores unitários e na notação módulo-ângulo?

IDEIAS-CHAVE

(1) As componentes horizontal e vertical da velocidade da balsa são independentes. (2) A componente v_x não muda em relação ao valor inicial $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$, pois não existe uma aceleração horizontal. (3) A componente v_y muda em relação ao valor inicial $v_{0y} = v_0\ \text{sen}\ \theta_0$, pois existe uma aceleração vertical.

Cálculos Quando a balsa atinge a água,

$$v_x = v_0 \cos\theta_0 = (55{,}0\ \text{m/s})(\cos 0°) = 55{,}0\ \text{m/s}.$$

Usando a Eq. 4-23 e o tempo de queda da balsa $t = 10{,}1$ s, descobrimos que, quando a balsa atinge a água,

$$\begin{aligned} v_y &= v_0\,\text{sen}\,\theta_0 - gt \quad (4\text{-}32)\\ &= (55{,}0\ \text{m/s})(\text{sen}\ 0°) - (9{,}8\ \text{m/s}^2)(10{,}1\ \text{s})\\ &= -99{,}0\ \text{m/s}. \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\vec{v} = (55{,}0\ \text{m/s})\hat{\text{i}} - (99{,}0\ \text{m/s})\hat{\text{j}}. \quad \text{(Resposta)}$$

Usando a Eq. 3-6 como guia, descobrimos que o módulo e o ângulo de $\vec{v}$ são

$$v = 113\ \text{m/s} \quad \text{e} \quad \theta = -60{,}9°. \quad \text{(Resposta)}$$

Exemplo

Tiro de canhão contra um navio pirata

A Fig. 4-15 mostra um navio pirata a 560 m de um forte que protege a entrada de um porto. Um canhão de defesa, situado ao nível do mar, dispara balas com uma velocidade inicial $v_0 = 82$ m/s.

(a) Com que ângulo θ_0 em relação à horizontal as balas devem ser disparadas para atingir o navio?

IDEIAS-CHAVE

(1) Uma bala disparada pelo canhão é um projétil. Estamos interessados em uma equação que relacione o ângulo de lançamento θ_0 ao deslocamento horizontal da bala entre o canhão e o navio. (2) Como o canhão e o navio estão na mesma altura, o deslocamento horizontal é igual ao alcance.

Dois ângulos de lançamento são possíveis.

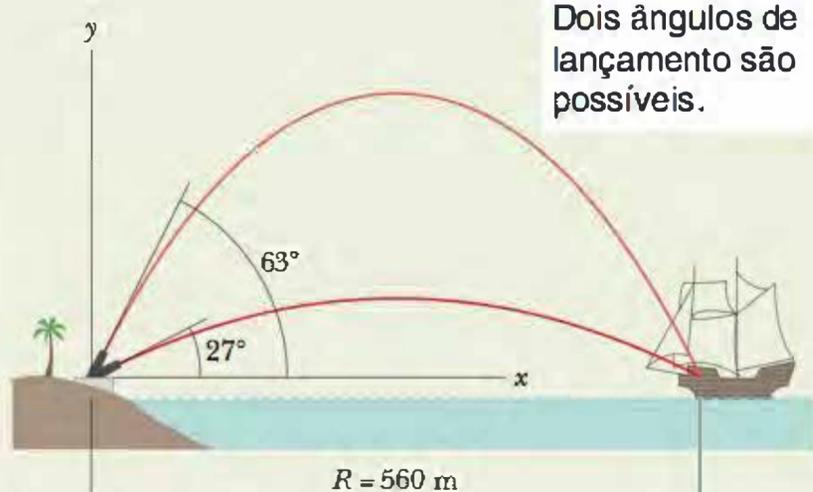



Figura 4-15 Um navio pirata sendo atacado.

Cálculos Podemos relacionar o ângulo de lançamento θ_0 ao alcance R através da Eq. 4-26, que pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{1}{2}\,\text{sen}^{-1}\frac{gR}{v_0^2} = \frac{1}{2}\,\text{sen}^{-1}\frac{(9{,}8\ \text{m/s}^2)(560\ \text{m})}{(82\ \text{m/s})^2}\\ &= \frac{1}{2}\,\text{sen}^{-1}\ 0{,}816. \quad (4\text{-}33) \end{aligned}$$

Uma solução de sen^{-1} 0,816 (54,7°) é a fornecida pelas calculadoras; subtraindo-a de 180°, obtemos a outra solução (125,3°). Assim, a Eq. 4-33 nos dá

$$\theta_0 = 27° \quad \text{e} \quad \theta_0 = 63°. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é o alcance máximo das balas de canhão?

Cálculos Como vimos anteriormente, o alcance máximo corresponde a um ângulo de elevação θ_0 de 45°. Assim,

$$\begin{aligned} R &= \frac{v_0^2}{g}\,\text{sen}\,2\theta_0 = \frac{(82\ \text{m/s})^2}{9{,}8\ \text{m/s}^2}\,\text{sen}\,(2 \times 45°)\\ &= 686\ \text{m} \approx 690\ \text{m}. \quad \text{(Resposta)} \end{aligned}$$

Quando o navio pirata se afasta do porto, a diferença entre os dois ângulos de elevação que permitem acertar o navio diminui até que se tornam iguais entre si e iguais a $\theta = 45°$ quando o navio está a 690 m de distância. Para distâncias maiores, é impossível acertar o navio.

4-7 Movimento Circular Uniforme

Uma partícula em **movimento circular uniforme** descreve uma circunferência ou um arco de circunferência com velocidade escalar constante (*uniforme*). Embora a velocidade escalar não varie nesse tipo de movimento, *a partícula está acelerada* porque a direção da velocidade está mudando.

A Fig. 4-16 mostra a relação entre os vetores velocidade e aceleração em várias posições durante o movimento circular uniforme. O módulo dos dois vetores permanece constante durante o movimento, mas a orientação varia continuamente. A velocidade está sempre na direção tangente à circunferência e tem o mesmo sentido que o movimento. A aceleração está sempre na direção *radial* e aponta para o centro da circunferência. Por essa razão, a aceleração associada ao movimento circular uniforme é chamada de **aceleração centrípeta** ("que busca o centro"). Como será demonstrado a seguir, o módulo dessa aceleração $\vec{a}$ é

$$a = \frac{v^2}{r} \quad \text{(aceleração centrípeta)}, \tag{4-34}$$

onde r é o raio da circunferência e v é a velocidade da partícula.

Durante essa aceleração com velocidade escalar constante, a partícula percorre a circunferência completa (uma distância igual a $2\pi r$) em um intervalo de tempo dado por

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad \text{(período)}. \tag{4-35}$$

O parâmetro T é chamado de *período de revolução* ou, simplesmente, *período*. No caso mais geral, o período é o tempo que uma partícula leva para completar uma volta em uma trajetória fechada.

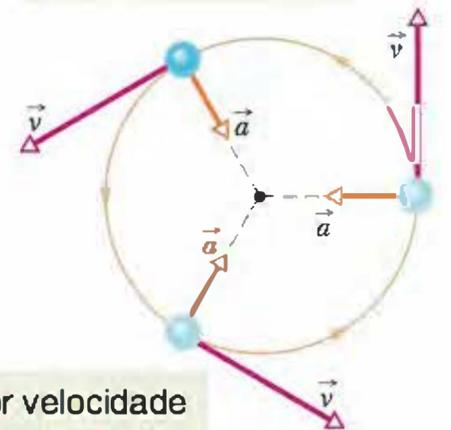
O vetor aceleração sempre aponta para o centro.

O vetor velocidade é sempre tangente à trajetória.

Figura 4-16 Os vetores velocidade e aceleração de uma partícula em movimento circular uniforme.

Demonstração da Eq. 4-34

Para determinar o módulo e a orientação da aceleração no caso do movimento circular uniforme, considere a Fig. 4-17. Na Fig. 4-17*a*, a partícula p se move com velocidade escalar constante v enquanto percorre uma circunferência de raio r. No instante mostrado, as coordenadas de p são x_p e y_p.

Como vimos na Seção 4-3, a velocidade $\vec{v}$ de uma partícula em movimento é sempre tangente à trajetória da partícula na posição considerada. Na Fig. 4-17*a*, isso significa que $\vec{v}$ é perpendicular a uma reta r que liga o centro da circunferência à posição da partícula. Nesse caso, o ângulo θ que $\vec{v}$ faz com uma reta vertical passando pelo ponto p é igual ao ângulo θ que o raio r faz com o eixo x.

Figura 4-17 Uma partícula p em movimento circular uniforme no sentido anti-horário. (*a*) Posição e velocidade $\vec{v}$ da partícula em um certo instante de tempo. (*b*) Velocidade $\vec{v}$. (*c*) Aceleração $\vec{a}$.

As componentes escalares de $\vec{v}$ aparecem na Fig. 4-17*b*. Em termos dessas componentes, a velocidade $\vec{v}$ pode ser escrita na forma

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = (-v \operatorname{sen} \theta)\hat{i} + (v \cos \theta)\hat{j}. \quad (4\text{-}36)$$

Usando o triângulo retângulo da Fig. 4-17*a*, podemos substituir sen θ por y_p/r e cos θ por x_p/r e escrever

$$\vec{v} = \left(-\frac{vy_p}{r}\right)\hat{i} + \left(\frac{vx_p}{r}\right)\hat{j}. \quad (4\text{-}37)$$

Para determinar a aceleração $\vec{a}$ da partícula *p*, devemos calcular a derivada dessa equação em relação ao tempo. Observando que a velocidade escalar *v* e o raio *r* não variam com o tempo, obtemos

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\frac{v}{r}\frac{dy_p}{dt}\right)\hat{i} + \left(\frac{v}{r}\frac{dx_p}{dt}\right)\hat{j}. \quad (4\text{-}38)$$

Note que a taxa de variação com o tempo de y_p, dy_p/dt, é igual à componente *y* da velocidade, v_y. Analogamente, $dx_p/dt = v_x$, e, novamente de acordo com a Fig. 4-17*b*, $v_x = -v \operatorname{sen} \theta$ e $v_y = v \cos \theta$. Fazendo essas substituições na Eq. 4-38, obtemos

$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r}\cos \theta\right)\hat{i} + \left(-\frac{v^2}{r}\operatorname{sen} \theta\right)\hat{j}. \quad (4\text{-}39)$$

Este vetor e suas componentes aparecem Fig. 4-17*c*. De acordo com a Eq. 3-6, temos:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{(\cos \theta)^2 + (\operatorname{sen} \theta)^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{1} = \frac{v^2}{r},$$

como queríamos demonstrar. Para determinar a orientação de $\vec{a}$, calculamos o ângulo ϕ da Fig. 4-17*c*:

$$\tan \phi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-(v^2/r)\operatorname{sen} \theta}{-(v^2/r)\cos \theta} = \tan \theta.$$

Assim, $\phi = \theta$, o que significa que $\vec{a}$ aponta na direção do raio *r* da Fig. 4-17*a*, no sentido do centro da circunferência, como queríamos demonstrar.

TESTE 5

Um objeto se move com velocidade escalar constante, ao longo de uma trajetória circular, em um plano *xy* horizontal com centro na origem. Quando o objeto está em $x = -2$ m, a velocidade é $-(4 \text{ m/s})\hat{j}$. Determine (a) a velocidade e (b) a aceleração do objeto em $y = 2$ m.

Exemplo

Pilotos de caça fazendo curvas

Os pilotos de caça se preocupam quando têm que fazer curvas muito fechadas. Como o corpo do piloto fica submetido à aceleração centrípeta, com a cabeça mais próxima do centro de curvatura, a pressão sanguínea no cérebro diminui, o que pode levar à perda das funções cerebrais.

Os sinais de perigo são vários. Quando a aceleração centrípeta é $2g$ ou $3g$, o piloto se sente pesado. Por volta de $4g$, a visão do piloto passa para preto e branco e se reduz à "visão de túnel". Se a aceleração é mantida ou aumentada, o piloto deixa de enxergar e, logo depois, perde a consciência, uma situação conhecida como *g*-LOC, da expressão em inglês *g-induced loss of consciousness*, ou seja, "perda de consciência induzida por *g*".

Qual é o módulo da aceleração, em unidades de *g*, para um piloto cuja aeronave inicia uma curva horizontal com uma velocidade $\vec{v}_i = (400\hat{i} + 500\hat{j})$ m/s e, 24,0 s mais tarde, termina a curva com uma velocidade $\vec{v}_f = (-400\hat{i} - 500\hat{j})$ m/s?

IDEIAS-CHAVE

Supomos que o avião execute a curva com um movimento circular uniforme. Nesse caso, o módulo da aceleração centrípeta é dado pela Eq. 4-34 ($a = v^2/R$), onde R é o raio da curva. O tempo necessário para descrever uma circunferência completa é o período dado pela Eq. 4-35 ($T = 2\pi R/v$).

Cálculos Como não conhecemos o raio R, vemos explicitar R na Eq. 4-35 e substituí-lo pelo seu valor na Eq. 4-34. O resultado é o seguinte:

$$a = \frac{2\pi v}{T}.$$

Nesta equação, v é o módulo (constante) da velocidade durante a curva. Vamos substituir as componentes da velocidade inicial na Eq. 3-6:

$$v = \sqrt{(400 \text{ m/s})^2 + (500 \text{ m/s})^2} = 640{,}31 \text{ m/s}.$$

Para determinar o período T do movimento, observamos que a velocidade final é igual ao negativo da velocidade inicial. Isso significa que a aeronave termina a curva no lado oposto da circunferência e completou metade de uma circunferência em 24,0 s. Assim, levaria T = 48,0 s para descrever uma circunferência completa. Substituindo esses valores na equação de a, obtemos

$$a = \frac{2\pi(640{,}31 \text{ m/s})}{48{,}0 \text{ s}} = 83{,}81 \text{ m/s}^2 \approx 8{,}6g. \quad \text{(Resposta)}$$

4-8 Movimento Relativo em Uma Dimensão

Suponha que você veja um pato voando para o norte a 30 km/h. Para um outro pato que esteja voando ao lado do primeiro, o primeiro parece estar parado. Em outras palavras, a velocidade de uma partícula depende do **referencial** de quem está observando ou medindo a velocidade. Para nossos propósitos, um referencial é um objeto no qual fixamos um sistema de coordenadas. No dia a dia, esse objeto é frequentemente o solo. Assim, por exemplo, a velocidade que aparece em uma multa de trânsito é a velocidade do carro em relação ao solo. A velocidade em relação ao guarda de trânsito será diferente se o guarda estiver se movendo enquanto mede a velocidade.

Suponha que Alexandre (situado na origem do referencial A da Fig. 4-20) esteja parado no acostamento de uma rodovia, observando o carro P (a "partícula") passar. Bárbara (situada na origem do referencial B) está dirigindo um carro na rodovia com velocidade constante e também observa o carro P. Suponha que os dois meçam a posição do carro em um dado momento. De acordo com a Fig. 4-18, temos:

$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}. \tag{4-40}$$

Essa equação significa o seguinte: "A coordenada x_{PA} de P medida por A é *igual* à coordenada x_{PB} de P medida por B *mais* a coordenada x_{BA} de B medida por A". Observe que esta leitura está de acordo com a ordem em que os índices foram usados.

Derivando a Eq. 4-40 em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{d}{dt}(x_{PA}) = \frac{d}{dt}(x_{PB}) + \frac{d}{dt}(x_{BA}).$$

Assim, as componentes da velocidade estão relacionadas através da equação

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}. \tag{4-41}$$

Esta equação significa o seguinte: "A velocidade v_{PA} de P medida por A é *igual* à velocidade v_{PB} de P medida por B *mais* a velocidade v_{BA} de B medida por A." O termo v_{BA} é a velocidade do referencial B em relação ao referencial A.

Neste capítulo, estamos considerando apenas referenciais que se movem com velocidade constante um em relação ao outro. Em nosso exemplo, isso significa que Bárbara (referencial B) dirige com velocidade constante v_{BA} em relação a Alexandre (referencial A). Esta restrição não vale para o carro P (a partícula em movimento), cuja velocidade pode mudar de módulo e direção (ou seja, a partícula pode sofrer uma aceleração).

O referencial B se move em relação ao referencial A enquanto ambos observam P.

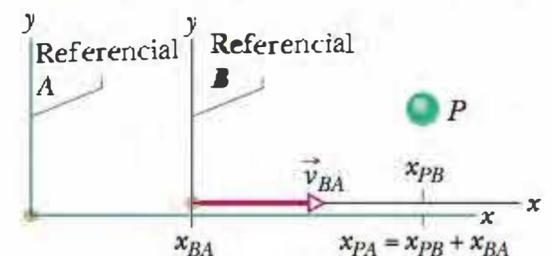



Figura 4-18 Alexandre (referencial A) e Bárbara (referencial B) observam o carro P enquanto B e P se movem com velocidades diferentes ao longo do eixo x comum aos dois referenciais. No instante mostrado, x_{BA} é a coordenada de B no referencial A. A coordenada de P é x_{PB} no referencial B e $x_{PA} = x_{PB} - x_{BA}$ no referencial A.

Para relacionar as acelerações de P medidas por Bárbara e por Alexandre em um mesmo instante, calculamos a derivada da Eq. 4-41 em relação ao tempo:

$$\frac{d}{dt}(v_{PA}) = \frac{d}{dt}(v_{PB}) + \frac{d}{dt}(v_{BA}).$$

Como v_{BA} é constante, o último termo é zero e temos

$$a_{PA} = a_{PB}. \qquad (4\text{-}42)$$

Em outras palavras,

A aceleração de uma partícula medida por observadores em referenciais que se movem com velocidade constante um em relação ao outro é exatamente a mesma.

Exemplo

Movimento relativo unidimensional: Alexandre e Bárbara

Na Fig. 4-18, suponha que a velocidade de Bárbara em relação a Alexandre seja $v_{BA} = 52$ km/h (constante) e que o carro P esteja se movendo no sentido negativo do eixo x.

(a) Se Alexandre mede uma velocidade constante $v_{PA} = -78$ km/h para o carro P, qual é a velocidade v_{PB} medida por Bárbara?

IDEIAS-CHAVE

Podemos associar um referencial A a Alexandre e um referencial B a Bárbara. Como os dois referenciais se movem com velocidade constante um em relação ao outro ao longo do eixo x, podemos usar a Eq. 4-41 ($v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}$) para relacionar v_{PB} a v_{PA} e v_{BA}.

Cálculo Temos

$$-78 \text{ km/h} = v_{PB} + 52 \text{ km/h}.$$

Assim,

$$v_{PB} = -130 \text{ km/h}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Comentário Se o carro P estivesse ligado ao carro de Bárbara por um fio flexível enrolado em uma bobina, o fio se desenrolaria a uma velocidade de 130 km/h enquanto os dois carros estivessem se separando.

(b) Se o carro P freia com aceleração constante até parar em relação a Alexandre (e, portanto, em relação ao solo) no instante $t = 10$ s, qual é a aceleração a_{PA} em relação a Alexandre?

IDEIAS-CHAVE

Para calcular a aceleração do carro P *em relação a Alexandre*, devemos usar a velocidade do carro *em relação a Alexandre*. Como a aceleração é constante, podemos usar a Eq. 2-11 ($v = v_0 + at$) para relacionar a aceleração às velocidades inicial e final de P.

Cálculo A velocidade inicial de P em relação a Alexandre é $v_{PA} = -78$ km/h, enquanto a velocidade final é 0. Assim,

$$a_{PA} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - (-78 \text{ km/h})}{10 \text{ s}} \frac{1 \text{ m/s}}{3{,}6 \text{ km/h}}$$
$$= 2{,}2 \text{ m/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

(c) Qual é a aceleração a_{PB} do carro P em relação a Bárbara durante a frenagem?

IDEIA-CHAVE

Para calcular a aceleração do carro P *em relação a Bárbara*, devemos usar a velocidade do carro *em relação a Bárbara*.

Cálculo A velocidade inicial de P em relação a Bárbara foi determinada na parte (a) ($v_{PB} = -130$ km/h). A velocidade final de P em relação a Bárbara é -52 km/h (a velocidade do carro parado em relação à velocidade do carro de Bárbara). Assim,

$$a_{PB} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{-52 \text{ km/h} - (-130 \text{ km/h})}{10 \text{ s}} \frac{1 \text{ m/s}}{3{,}6 \text{ km/h}}$$
$$= 2{,}2 \text{ m/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Comentário Este resultado é previsível. Como Alexandre e Bárbara estão se movendo com velocidade constante um em relação ao outro, a aceleração do carro P medida pelos dois deve ser a mesma.

4-9 Movimento Relativo em Duas Dimensões

Nossos dois amigos estão novamente observando o movimento de uma partícula P a partir da origem dos referenciais A e B, enquanto B se move com velocidade constante $\vec{v}_{BA}$ em relação a A. (Os eixos correspondentes aos dois sistemas de coordenadas permanecem paralelos.) A Fig. 4-19 mostra um certo instante durante o movimento. Nesse instante, o vetor posição da origem de B em relação à origem de A é $\vec{r}_{BA}$. Os vetores posição da partícula P são $\vec{r}_{PA}$ em relação à origem de A e $\vec{r}_{PB}$ em relação à origem de B. A posição das origens e extremidades desses três vetores mostra que estão relacionados através da equação

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}. \tag{4-43}$$

Derivando essa equação em relação ao tempo, encontramos uma equação que envolve as velocidades $\vec{v}_{PA}$ e $\vec{v}_{PB}$ da partícula P em relação aos nossos observadores:

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}. \tag{4-44}$$

Derivando esta equação em relação ao tempo, obtemos uma equação que envolve as acelerações $\vec{a}_{PA}$ e $\vec{a}_{PB}$ da partícula P em relação aos nossos observadores. Note, porém, que, como $\vec{v}_{BA}$ é constante, sua derivada em relação ao tempo é nula. Assim, obtemos

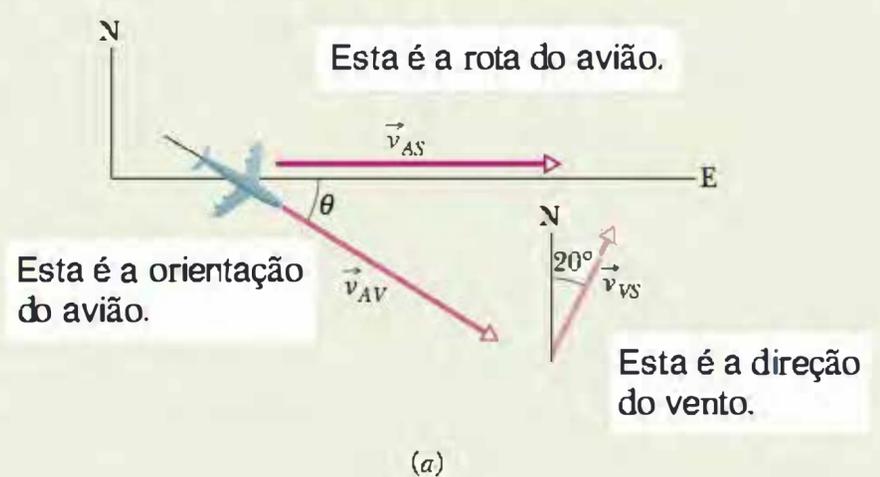
$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}. \tag{4-45}$$

Assim, da mesma forma que no movimento unidimensional, temos a seguinte regra: a aceleração de uma partícula medida por observadores em referenciais que se movem com velocidade constante um em relação ao outro é exatamente a mesma.

Figura 4-19 O referencial B possui uma velocidade bidimensional constante $\vec{v}_{BA}$ em relação ao referencial A. O vetor posição de B em relação a A é $\vec{r}_{BA}$. Os vetores posição da partícula P são $\vec{r}_{PA}$ em relação a A e $\vec{r}_{PB}$ em relação a B.

Exemplo

Movimento relativo bidimensional: aviões

Na Fig. 4-20*a*, um avião se move para leste enquanto o piloto direciona o avião ligeiramente para o sul do leste, de modo a compensar um vento constante que sopra para nordeste. O avião tem uma velocidade $\vec{v}_{AV}$ em relação ao vento, com uma velocidade do ar (velocidade escalar em relação ao vento) de 215 km/h e uma orientação que faz um ângulo θ ao sul do leste. O vento tem uma velocidade $\vec{v}_{VS}$ em relação ao solo, com uma velocidade escalar de 65,0 km/h e uma orientação que faz um ângulo de 20° a leste do norte. Qual é o módulo da velocidade $\vec{v}_{AS}$ do avião em relação ao solo e qual é o valor de θ?

IDEIAS-CHAVE

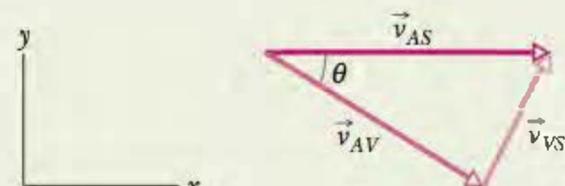
A situação é semelhante à da Fig. 4-19. Nesse caso, a partícula P é o avião, o referencial A está associado ao solo (que chamaremos de S) e o referencial B está associado ao vento (que chamaremos de V). Precisamos construir um diagrama vetorial semelhante ao da Fig. 4-19, mas, dessa vez, usando os três vetores velocidade.

Cálculos Primeiro, escrevemos uma frase que expressa uma relação entre os três vetores da Fig. 4-20*b*:

Figura 4-20 Efeito do vento sobre um avião.

velocidade do avião em relação ao solo (*AS*) = velocidade do avião em relação ao vento (*AV*) + velocidade do vento em relação ao solo (*VS*)

Em notação vetorial, esta relação se torna

$$\vec{v}_{AS} = \vec{v}_{AV} + \vec{v}_{VS} \qquad (4\text{-}46)$$

Podemos determinar as componentes dos vetores no sistema de coordenadas da Fig. 4-20*b* e resolver a Eq. 4-46 eixo por eixo. No caso das componentes *y*, temos:

$$v_{AS,y} = v_{AV,y} + v_{VS,y}$$

ou $0 = -(215 \text{ km/h}) \operatorname{sen} \theta + (65{,}0 \text{ km/h})(\cos 20{,}0°)$.

Explicitando θ, obtemos

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1} \frac{(65{,}0 \text{ km/h})(\cos 20{,}0°)}{215 \text{ km/h}} = 16{,}5°. \qquad \text{(Resposta)}$$

No caso das componentes *x*, temos:

$$v_{AS,x} = v_{AV,x} + v_{VS,x}$$

Como $\vec{v}_{AS}$ é paralela ao eixo *x*, a componente $v_{AS,x}$ é igual ao módulo v_{AS} do vetor. Substituindo $v_{AS,x}$ por v_{AS} e fazendo $\theta = 16{,}5°$, obtemos

$$v_{AS} = (215 \text{ km/h})(\cos 16{,}5°) + (65{,}0 \text{ km/h})(\operatorname{sen} 20{,}0°)$$
$$= 228 \text{ km/h}. \qquad \text{(Resposta)}$$

REVISÃO E RESUMO

Vetor Posição A localização de uma partícula em relação à origem de um sistema de coordenadas é dada por um *vetor posição* $\vec{r}$, que, em termos dos vetores unitários, assume a forma

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}. \qquad (4\text{-}1)$$

onde $x\hat{i}$, $y\hat{j}$ e $z\hat{k}$ são as componentes vetoriais do vetor posição $\vec{r}$ e *x*, *y* e *z* são as componentes escalares (e também as coordenadas da partícula). Um vetor posição pode ser descrito por um módulo e um ou dois ângulos, pelas componentes vetoriais ou pelas componentes escalares.

Deslocamento Se uma partícula se move de tal forma que o vetor posição muda de $\vec{r}_1$ para $\vec{r}_2$, o *deslocamento* $\Delta\vec{r}$ da partícula é dado por

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \qquad (4\text{-}2)$$

O deslocamento também pode ser escrito na forma

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} \qquad (4\text{-}3)$$
$$= \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}. \qquad (4\text{-}4)$$

Velocidade Média e Velocidade Instantânea Se uma partícula sofre um deslocamento $\Delta\vec{r}$ em um intervalo de tempo Δt, a velocidade média $\vec{v}_{méd}$ nesse intervalo de tempo é dada por

$$\vec{v}_{méd} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (4\text{-}8)$$

Quando Δt na Eq. 4-8 tende a 0, $\vec{v}_{méd}$ tende para um limite $\vec{v}$ que é chamado de *velocidade instantânea* ou, simplesmente, *velocidade*:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \qquad (4\text{-}10)$$

Em termos dos vetores unitários, a velocidade instantânea assume a forma

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}, \qquad (4\text{-}11)$$

onde $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$ e $v_z = dz/dt$. A velocidade instantânea $\vec{v}$ de uma partícula é sempre tangente à trajetória da partícula na posição da partícula.

Aceleração Média e Aceleração Instantânea Se a velocidade de uma partícula varia de $\vec{v}_1$ para $\vec{v}_2$ no intervalo de tempo Δt, a *aceleração média* durante o intervalo Δt é

$$\vec{a}_{méd} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \qquad (4\text{-}15)$$

Quando Δt na Eq. 4-15 tende a zero, $\vec{a}_{méd}$ tende para um limite $\vec{a}$ que é chamado de *aceleração instantânea* ou, simplesmente, *aceleração*:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \qquad (4\text{-}16)$$

Na notação de vetores unitários,

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}, \qquad (4\text{-}17)$$

onde $a_x = dv_x/dt$, $a_y = dv_y/dt$ e $a_z = dv_z/dt$.

Movimento de Projéteis *Movimento balístico* é o movimento de uma partícula lançada com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$. Durante o percurso, a aceleração horizontal da partícula é zero e a aceleração vertical é a aceleração de queda livre, $-g$. (O deslocamento para cima é escolhido como sentido positivo.) Se $\vec{v}_0$ é expressa através de um módulo (a velocidade escalar v_0) e um ângulo θ_0 (medido em relação à horizontal), as equações de movimento da partícula ao longo do eixo horizontal *x* e do eixo vertical *y* são

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t, \qquad (4\text{-}21)$$

$$y - y_0 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2, \qquad (4\text{-}22)$$

$$v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - gt, \qquad (4\text{-}23)$$

$$v_y^2 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \qquad (4\text{-}24)$$

A **trajetória** de uma partícula em movimento balístico tem a forma de uma parábola e é dada por

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2}, \qquad (4\text{-}25)$$

se x_0 e y_0 das Eqs. 4-21, 4-22, 4-23 e 4-24 forem nulos. O **alcance horizontal** *R* da partícula, que é a distância horizontal do ponto de lançamento ao ponto em que a partícula retorna à altura do ponto de lançamento, é dado por

$$R = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta_0. \qquad (4\text{-}26)$$

Movimento Circular Uniforme Se uma partícula descreve uma circunferência ou arco de circunferência de raio r com velocidade constante v, dizemos que se trata de um *movimento circular uniforme*. Nesse caso, a partícula possui uma aceleração $\vec{a}$ cujo módulo é dado por

$$a = \frac{v^2}{r}. \quad (4\text{-}34)$$

O vetor $\vec{a}$ aponta para o centro da circunferência ou arco de circunferência e é chamado de *aceleração centrípeta*. O tempo que a partícula leva para descrever uma circunferência completa é dado por

$$T = \frac{2\pi r}{v}. \quad (4\text{-}35)$$

O parâmetro T é chamado de *período de revolução* ou, simplesmente, *período*.

Movimento Relativo Quando dois referenciais A e B estão se movendo um em relação ao outro com velocidade constante, a velocidade de uma partícula P, medida por um observador do referencial A, é em geral diferente da velocidade medida por um observador do referencial B. As duas velocidades estão relacionadas através da equação

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}, \quad (4\text{-}44)$$

onde $\vec{v}_{BA}$ é a velocidade de B em relação a A. Os dois observadores medem a mesma aceleração:

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}. \quad (4\text{-}45)$$

PERGUNTAS

1 A Fig. 4-21 mostra o caminho seguido por um gambá à procura de comida no lixo, a partir do ponto inicial i. O gambá levou o mesmo tempo T para ir de cada um dos pontos marcados até o ponto seguinte. Ordene os pontos a, b e c de acordo com o módulo da velocidade média do gambá para alcançá-los a partir do ponto inicial i, começando pelo maior.

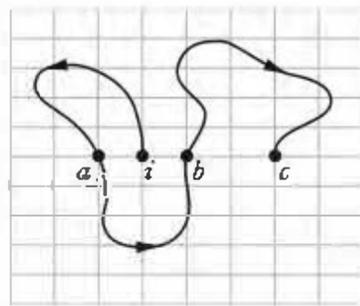



Figura 4-21 Pergunta 1.

2 A Fig. 4-22 mostra a posição inicial i e a posição final f de uma partícula. Determine (a) o vetor posição inicial $\vec{r}_i$ e (b) o vetor posição final $\vec{r}_f$ da partícula, ambos na notação de vetores unitários. (c) Qual é a componente x do deslocamento $\Delta\vec{r}$?

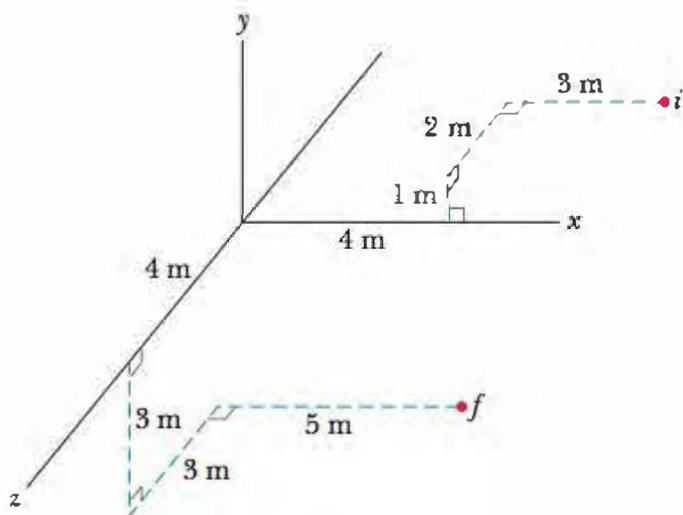



Figura 4-22 Pergunta 2.

3 Quando Paris foi bombardeada a mais de 100 km de distância na Primeira Guerra Mundial, por um canhão apelidado de "Big Bertha", os projéteis foram lançados com um ângulo maior que 45° para atingir uma distância maior, possivelmente até duas vezes maior que a 45°. Este resultado significa que a densidade do ar em grandes altitudes aumenta ou diminui?

4 Você tem que lançar um foguete, praticamente do nível do solo, com uma das velocidades iniciais especificadas pelos seguintes vetores: (1) $\vec{v}_0 = 20\hat{i} + 70\hat{j}$; (2) $\vec{v}_0 = -20\hat{i} + 70\hat{j}$; (3) $\vec{v}_0 = 20\hat{i} - 70\hat{j}$; (4) $\vec{v}_0 = -20\hat{i} - 70\hat{j}$. No seu sistema de coordenadas, x varia ao longo do nível do solo e y cresce para cima. (a) Ordene os vetores de acordo com o módulo da velocidade de lançamento do projétil, começando pelo maior. (b) Ordene os vetores de acordo com o tempo de voo do projétil, começando pelo maior.

5 A Fig. 4-23 mostra três situações nas quais projéteis iguais são lançados do solo (a partir do mesmo nível) com a mesma velocidade escalar e o mesmo ângulo. Entretanto, os projéteis não caem no mesmo terreno. Ordene as situações de acordo com a velocidade escalar final dos projéteis imediatamente antes de aterrissarem, começando pela maior.

(a) (b) (c)

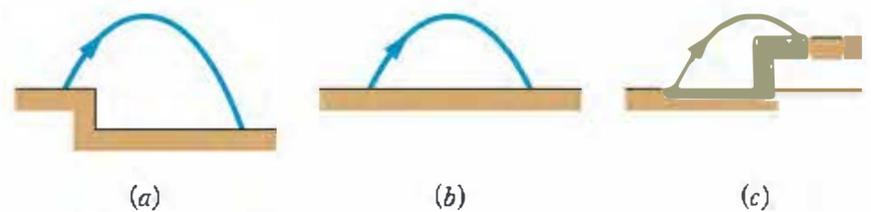



Figura 4-23 Pergunta 5.

6 O único uso decente de um bolo de frutas é na prática da catapulta. A curva 1 na Fig. 4-24 mostra a altura y de um bolo de frutas arremessado por uma catapulta em função do ângulo θ entre o vetor velocidade e o vetor aceleração durante o percurso. (a) Qual dos pontos assinalados por letras nessa curva corresponde ao choque do bolo de frutas com o solo? (b) A curva 2 é um gráfico semelhante para a mesma velocidade escalar inicial, mas um ângulo de lançamento diferente. Nesse caso, o bolo de frutas vai cair em um ponto mais distante ou mais próximo do ponto de lançamento?

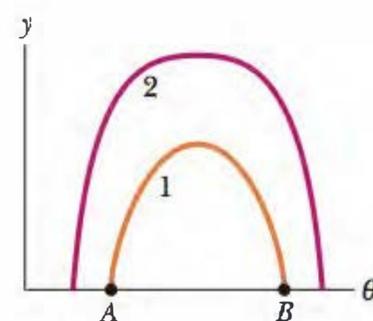



Figura 4-24 Pergunta 6.

7 Um avião que está voando horizontalmente com uma velocidade constante de 350 km/h, sobrevoando um terreno plano, deixa cair um fardo com suprimentos. Ignore o efeito do ar sobre o fardo. Quais são as componentes iniciais (a) vertical e (b) horizontal da velocidade inicial do fardo? (c) Qual é a componente horizontal da velocidade imediatamente antes de o fardo se chocar com o solo? (d) Se a velocidade do avião fosse 450 km/h, o tempo de queda seria maior, menor ou igual?

8 Na Fig. 4-25, uma tangerina é arremessada para cima e passa pelas janelas 1, 2 e 3, que têm o mesmo tamanho e estão regularmente espaçadas na vertical. Ordene essas três janelas de acordo (a) com o tempo que a tangerina leva para passar e (b) com a velocidade média da tangerina durante a passagem, em ordem decrescente.

Na descida, a tangerina passa pelas janelas 4, 5 e 6, que têm o mesmo tamanho e não estão regularmente espaçadas na horizontal. Ordene essas três janelas de acordo (c) com o tempo que a tangerina leva para passar e (d) com a velocidade média da tangerina durante a passagem, em ordem decrescente.

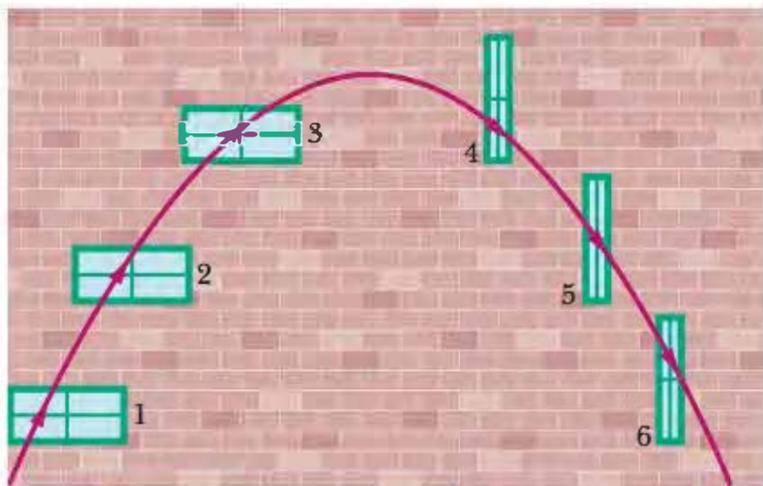



Figura 4-25 Pergunta 8.

9 A Fig. 4-26 mostra três trajetórias de uma bola de futebol chutada a partir do chão. Ignorando os efeitos do ar, ordene as trajetórias de acordo (a) com o tempo de percurso, (b) com a componente vertical da velocidade inicial, (c) com a componente horizontal da velocidade inicial e (d) com a velocidade escalar inicial, em ordem decrescente.

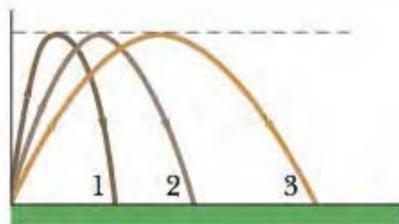



Figura 4-26 Pergunta 9.

10 Uma bola é chutada a partir do chão, em um terreno plano, com uma certa velocidade inicial. A Fig. 4-27 mostra o alcance R da bola em função do ângulo de lançamento θ_0. Ordene os três pontos identificados por letras no gráfico de acordo (a) com o tempo que a bola permanece no ar e (b) com a velocidade da bola na altura máxima, em ordem decrescente.

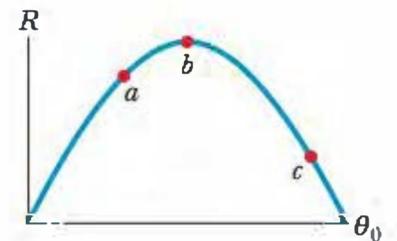



Figura 4-27 Pergunta 10.

11 A Fig. 4-28 mostra quatro trilhos (semicírculos ou quartos de círculo) que podem ser usados por um trem, que se move com velocidade escalar constante. Ordene os trilhos de acordo com o módulo de aceleração do trem no trecho curvo, em ordem decrescente.

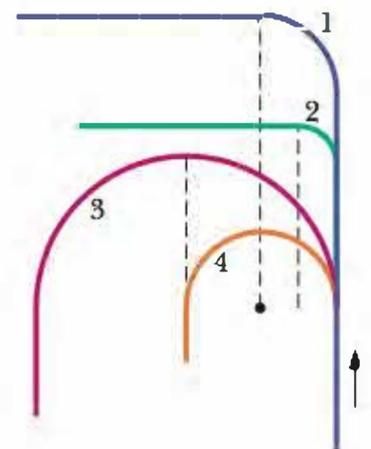



Figura 4-28 Pergunta 11.

12 Na Fig. 4-29, a partícula P está em movimento circular uniforme em torno da origem de um sistema de coordenadas xy. (a) Para que valores de θ a componente vertical r_y do vetor posição possui maior módulo? (b) Para que valores de θ a componente vertical v_y da velocidade da partícula possui maior módulo? (c) Para que valores de θ a componente vertical a_y da aceleração da partícula possui maior módulo?

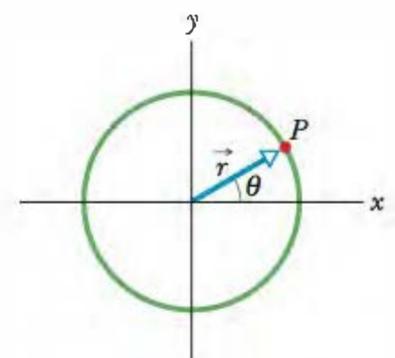



Figura 4-29 Pergunta 12.

13 (a) É possível estar acelerando enquanto se viaja com velocidade escalar constante? É possível fazer uma curva (b) com aceleração nula e (c) com uma aceleração de módulo constante?

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física* de Jearl Walker, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

Seção 4-2 Posição e Deslocamento

•1 O vetor posição de um elétron é $\vec{r} = (5{,}0\text{ m})\hat{i} - (3{,}0\text{ m})\hat{j} + (2{,}0\text{ m})\hat{k}$. (a) Determine o módulo de $\vec{r}$. (b) Desenhe o vetor em um sistema de coordenadas dextrogiro.

•2 Uma semente de melancia possui as seguintes coordenadas: $x = -5{,}0$ m, $y = 8{,}0$ m e $z = 0$ m. Determine o vetor posição da semente (a) na notação de vetores unitários e como (b) um módulo e (c) um ângulo em relação ao sentido positivo do eixo x. (d) Dese-

nhe o vetor em um sistema de coordenadas dextrogiro. Se a semente é transportada para as coordenadas (3,00 m, 0 m, 0 m), determine o deslocamento (e) na notação de vetores unitários e como (f) um módulo e (g) um ângulo em relação ao sentido positivo do eixo x.

•**3** Um pósitron sofre um deslocamento $\Delta\vec{r} = 2{,}0\hat{i} - 3{,}0\hat{j} + 6{,}0\hat{k}$ e termina com o vetor posição $\vec{r} = 3{,}0\hat{j} - 4{,}0\hat{k}$, em metros. Qual era o vetor posição inicial do pósitron?

••**4** O ponteiro dos minutos de um relógio de parede mede 10 cm da ponta até o eixo de rotação. O módulo e o ângulo do vetor deslocamento da ponta devem ser determinados para três intervalos de tempo. Determine (a) o módulo e (b) o ângulo associado ao deslocamento da ponta entre as posições correspondentes a quinze e trinta minutos depois da hora, (c) o módulo e (d) o ângulo correspondente à meia hora seguinte, e (e) o módulo e (f) o ângulo correspondentes à hora seguinte.

Seção 4-3 Velocidade Média e Velocidade Instantânea

•**5** Um trem com uma velocidade constante de 60,0 km/h se move na direção leste por 40,0 min, depois em uma direção que faz um ângulo de 50,0° a leste com a direção norte por 20,0 min e, finalmente, na direção oeste por mais 50,0 min. Quais são (a) o módulo e (b) o ângulo da velocidade média do trem durante a viagem?

•**6** A posição de um elétron é dada por $\vec{r} = 3{,}00t\hat{i} - 4{,}00t^2\hat{j} + 2{,}00\hat{k}$, com t em segundos e $\vec{r}$ em metros. (a) Qual é a velocidade $\vec{v}(t)$ do elétron na notação de vetores unitários? Quanto vale $\vec{v}(t)$ no instante $t = 2{,}00$ s (b) na notação de vetores unitários e como (c) um módulo e (d) um ângulo em relação ao sentido positivo do eixo x?

•**7** O vetor posição de um íon é inicialmente $\vec{r} = 5{,}0\hat{i} - 6{,}0\hat{j} + 2{,}0\hat{k}$ e 10 s depois passa a ser $\vec{r} = -2{,}0\hat{i} + 8{,}0\hat{j} - 2{,}0\hat{k}$, com todos os valores em metros. Na notação de vetores unitários, qual é a velocidade média $\vec{v}_{méd}$ durante os 10 s?

••**8** Um avião voa 483 km para leste, da cidade A para a cidade B, em 45,0 min, e depois 966 km para o sul, da cidade B para uma cidade C, em 1,50 h. Para a viagem inteira, determine (a) o módulo e (b) a direção do deslocamento do avião, (c) o módulo e (d) a direção da velocidade média e (e) a velocidade escalar média.

••**9** A Fig. 4-30 mostra os movimentos de um esquilo em um terreno plano, do ponto A (no instante $t = 0$) para os pontos B (em $t = 5{,}00$ min), C (em $t = 10{,}0$ min) e, finalmente, D (em $t = 15{,}0$ min). Considere as velocidades médias do esquilo do ponto A para cada um dos outros três pontos. Entre essas velocidades médias determine (a) o módulo e (b) o ângulo da que possui o menor módulo e (c) o módulo e (d) o ângulo da que possui o maior módulo.

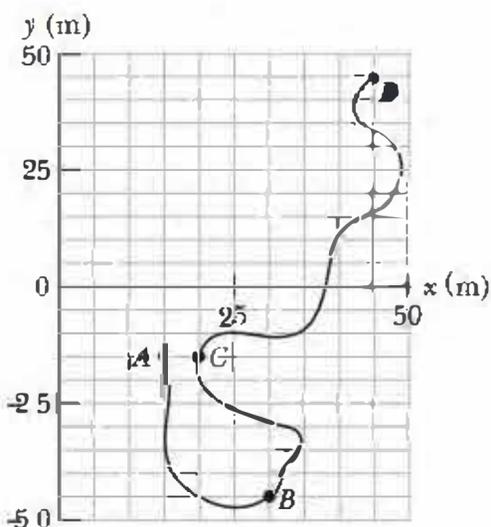



Figura 4-30 Problema 9.

•••**10** O vetor $\vec{r} = 5{,}00t\hat{i} + (et + ft^2)\hat{j}$ mostra a posição de uma partícula em função do tempo t. O vetor $\vec{r}$ está em metros, t está em segundos e os fatores e e f são constantes. A Fig. 4-31 mostra o ângulo θ da direção do movimento da partícula em função de t (θ é medido a partir do semieixo x positivo). Determine (a) e e (b) f, indicando as unidades correspondentes.

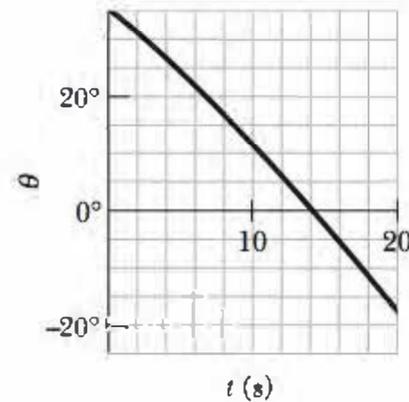



Figura 4.31 Problema 10.

Seção 4-4 Aceleração Média e Aceleração Instantânea

•**11** A posição $\vec{r}$ de uma partícula que se move em um plano xy é dada por $\vec{r} = (2{,}00t^3 - 5{,}00t)\hat{i} + (6{,}00 - 7{,}00t^4)\hat{j}$, com $\vec{r}$ em metros e t em segundos. Na notação de vetores unitários, calcule (a) $\vec{r}$, (b) $\vec{v}$ e (c) $\vec{a}$ para $t = 2{,}00$ s. (d) Qual é o ângulo entre o semieixo positivo x e uma reta tangente à trajetória da partícula em $t = 2{,}00$ s?

•**12** Em um certo instante, um ciclista está 40,0 m a leste do mastro de um parque, indo para o sul com uma velocidade de 10,0 m/s. Após 30,0 s, o ciclista está 40,0 m ao norte do mastro, dirigindo-se para leste com uma velocidade de 10,0 m/s. Para o ciclista, neste intervalo de 30,0 s, quais são (a) o módulo e (b) a direção do deslocamento, (c) o módulo e (d) a direção da velocidade média e (e) o módulo e (f) a direção da aceleração média?

•**13** Uma partícula se move de tal forma que a posição (em metros) em função do tempo (em segundos) é dada por $\vec{r} = \hat{i} + 4t^2\hat{j} + t\hat{k}$. Escreva expressões para (a) a velocidade e (b) a aceleração em função do tempo.

•**14** A velocidade inicial de um próton é $\vec{v} = 4{,}0\hat{i} - 2{,}0\hat{j} + 3{,}0\hat{k}$; 4,0 s mais tarde, passa a ser $\vec{v} = -2{,}0\hat{i} - 2{,}0\hat{j} + 5{,}0\hat{k}$ (em metros por segundo). Para esses 4,0 s, determine quais são (a) a aceleração média do próton $\vec{a}_{méd}$ na notação de vetores unitários, (b) o módulo de $\vec{a}_{méd}$ e (c) o ângulo entre $\vec{a}_{méd}$ e o semieixo x positivo.

••**15** Uma partícula deixa a origem com uma velocidade inicial $\vec{v} = (3{,}00\hat{i})$ m/s e uma aceleração constante $\vec{a} = (-1{,}00\hat{i} - 0{,}500\hat{j})$ m/s². Quando a partícula atinge o máximo valor da coordenada x, quais são (a) a velocidade e (b) o vetor posição?

••**16** A velocidade $\vec{v}$ de uma partícula que se move no plano xy é dada por $\vec{v} = (6{,}0t - 4{,}0t^2)\hat{i} + 8{,}0\hat{j}$, com $\vec{v}$ em metros por segundo e t (> 0) em segundos. (a) Qual é a aceleração no instante $t = 3{,}0$ s? (b) Em que instante (se isso é possível) a aceleração é nula? (c) Em que instante (se isso é possível) a velocidade é nula? (d) Em que instante (se isso é possível) a velocidade escalar da partícula é igual a 10 m/s?

••**17** Um carro se move sobre um plano xy com componentes da aceleração $a_x = 4{,}0$ m/s² e $a_y = -2{,}0$ m/s². A velocidade inicial tem componentes $v_{0x} = 8{,}0$ m/s e $v_{0y} = 12$ m/s. Na notação de vetores unitários, qual é a velocidade do carro quando atinge a maior coordenada y?

••18 Um vento moderado acelera um seixo sobre um plano horizontal xy com uma aceleração constante $\vec{a} = (5,00 \text{ m/s}^2)\hat{i} + (7,00 \text{ m/s}^2)\hat{j}$. No instante $t = 0$, a velocidade é $(4,00 \text{ m/s})\hat{i}$. Quais são (a) o módulo e (b) o ângulo da velocidade do seixo após ter se deslocado 12,0 m paralelamente ao eixo x?

•••19 A aceleração de uma partícula que se move apenas em um plano horizontal xy é dada por $\vec{a} = 3t\hat{i} + 4t\hat{j}$, onde $\vec{a}$ está em metros por segundo ao quadrado e t em segundos. Em $t = 0$, o vetor posição $\vec{r} = (20,0 \text{ m})\hat{i} + (40,0 \text{ m})\hat{j}$ indica a localização da partícula, que nesse instante tem uma velocidade $\vec{v} = (5,00 \text{ m/s})\hat{i} + (2,00 \text{ m/s})\hat{j}$. Em $t = 4,00$ s, determine (a) o vetor posição em termos dos vetores unitários e (b) o ângulo entre a direção do movimento e o semieixo x positivo.

•••20 Na Fig. 4-32, a partícula A se move ao longo da reta $y = 30$ m com uma velocidade constante $\vec{v}$ de módulo 3,0 m/s e paralela ao eixo x. No instante em que a partícula A passa pelo eixo y, a partícula B deixa a origem com velocidade inicial zero e aceleração constante $\vec{a}$ de módulo 0,40 m/s². Para que valor do ângulo θ entre $\vec{a}$ e o semieixo y positivo acontece uma colisão?

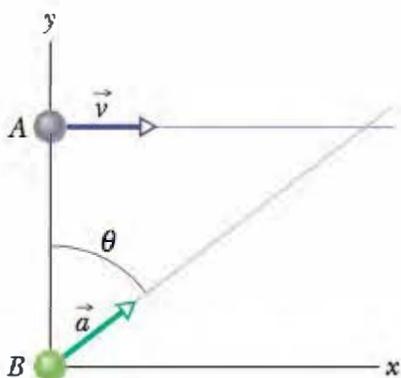



Figura 4-32 Problema 20.

Seção 4-6 Análise do Movimento de um Projétil

•21 Um dardo é arremessado horizontalmente com uma velocidade inicial de 10 m/s em direção a um ponto P, o centro de um alvo de parede. O dardo atinge um ponto Q do alvo, verticalmente abaixo de P, 0,19 s depois do arremesso. (a) Qual é a distância PQ? (b) A que distância do alvo foi arremessado o dardo?

•22 Uma pequena bola rola horizontalmente até a borda de uma mesa de 1,20 m de altura e cai no chão. A bola chega ao chão a uma distância horizontal de 1,52 m da borda da mesa. (a) Por quanto tempo a bola fica no ar? (b) Qual é a velocidade da bola no instante em que chega à borda da mesa?

•23 Um projétil é disparado horizontalmente de uma arma que está 45,0 m acima de um terreno plano, saindo da arma com uma velocidade de 250 m/s. (a) Por quanto tempo o projétil permanece no ar? (b) A que distância horizontal do ponto de disparo o projétil se choca com o solo? (c) Qual é o módulo da componente vertical da velocidade quando o projétil se choca com o solo?

•24 No Campeonato Mundial de Atletismo de 1991, em Tóquio, Mike Powell saltou 8,95 m, batendo por 5 cm um recorde de 23 anos estabelecido por Bob Beamon para o salto em distância. Suponha que Powell iniciou o salto com uma velocidade de 9,5 m/s (aproximadamente igual à de um velocista) e que $g = 9,80 \text{ m/s}^2$ em Tóquio. Calcule a diferença entre o alcance de Powell e o máximo alcance possível para uma partícula lançada com a mesma velocidade.

•25 O recorde atual de salto de motocicleta é 77,0 m, estabelecido por Jason Renie. Suponha que Renie tenha partido da rampa fazendo um ângulo de 12° com a horizontal e que as rampas de subida e de descida tivessem a mesma altura. Determine a velocidade inicial, desprezando a resistência do ar.

•26 Uma pedra é lançada por uma catapulta no instante $t = 0$, com uma velocidade inicial de módulo 20,0 m/s e ângulo 40,0° acima da horizontal. Quais são os módulos das componentes (a) horizontal e (b) vertical do deslocamento da pedra em relação à catapulta em $t = 1,10$ s? Repita os cálculos para as componentes (c) horizontal e (d) vertical em $t = 1,80$ s e para as componentes (e) horizontal e (f) vertical em $t = 5,00$ s.

••27 Um avião está mergulhando com um ângulo $\theta = 30,0°$ abaixo da horizontal, a uma velocidade de 290,0 km/h, quando o piloto libera um chamariz (Fig. 4-33). A distância horizontal entre o ponto de lançamento e o ponto onde o chamariz se choca com o solo é $d = 700$ m. (a) Quanto tempo o chamariz passou no ar? (b) De que altura foi lançado?

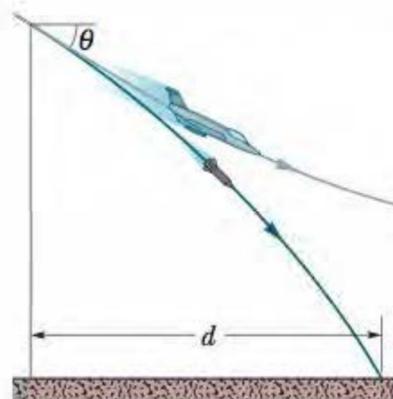



Figura 4-33 Problema 27.

••28 Na Fig. 4-34, uma pedra é lançada no alto de rochedo de altura h com uma velocidade inicial de 42,0 m/s e um ângulo $\theta_0 = 60,0°$ com a horizontal. A pedra cai em um ponto A, 5,50 s após o lançamento. Determine (a) a altura h do rochedo, (b) a velocidade da pedra imediatamente antes do impacto em A e (c) a máxima altura H alcançada acima do solo.

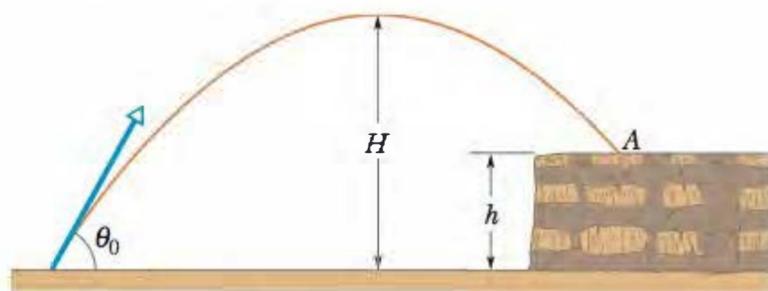



Figura 4-34 Problema 28.

••29 A velocidade de lançamento de um projétil é cinco vezes maior que a velocidade na altura máxima. Determine o ângulo de lançamento θ_0.

••30 Uma bola de futebol é chutada a partir do chão com uma velocidade inicial de 19,5 m/s e um ângulo para cima de 45°. No mesmo instante, um jogador a 55 m de distância na direção do chute, começa a correr para receber a bola. Qual deve ser a velocidade média do jogador para que alcance a bola imediatamente antes de tocar o gramado?

••31 Ao dar uma cortada, um jogador de voleibol golpeia a bola com força, de cima para baixo, em direção à quadra adversária. É difícil controlar o ângulo da cortada. Suponha que uma bola seja cortada de uma altura de 2,30 m, com uma velocidade inicial de 20,0 m/s e um ângulo para baixo de 18,00°. Se o ângulo para baixo diminuir para 8,00°, a que distância adicional a bola atingirá a quadra adversária?

••32 Você lança uma bola em direção a uma parede com uma velocidade de 25,0 m/s e um ângulo $\theta_0 = 40,0°$ acima da horizontal (Fig. 4-35). A parede está a uma distância $d = 22,0$ m do ponto de lançamento da bola. (a) A que distância acima do ponto de lançamento a bola atinge a parede? Quais são as componentes (b) horizontal e (c) vertical da velocidade da bola ao atingir a parede? (d) Ao atingir a parede, a bola já passou pelo ponto mais alto da trajetória?

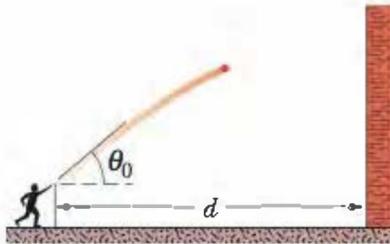



Figura 4-35 Problema 32.

••33 Um avião, mergulhando com velocidade constante em um ângulo de 53,0° com a vertical, lança um projétil a uma altitude de 730 m. O projétil chega ao solo 5,00 s após o lançamento. (a) Qual é a velocidade do avião? (b) Que distância o projétil percorre horizontalmente durante o percurso? Quais são as componentes (c) horizontal e (d) vertical da velocidade do projétil no momento em que chega ao solo?

••34 O trebuchet era uma máquina de arremesso construída para atacar as muralhas de um castelo durante um cerco. Uma grande pedra podia ser arremessada contra uma muralha para derrubá-la. A máquina não era instalada perto da muralha porque os operadores seriam um alvo fácil para as flechas disparadas do alto das muralhas do castelo. Em vez disso, o trebuchet era posicionado de tal forma que a pedra atingia a muralha na parte descendente de sua trajetória. Suponha que uma pedra fosse lançada com uma velocidade $v_0 = 28,0$ m/s e um ângulo $\theta_0 = 40,0°$. Qual seria a velocidade da pedra se ela atingisse a muralha (a) no momento em que chegasse à altura máxima da trajetória parabólica e (b) depois de cair para metade da altura máxima? (c) Qual a diferença percentual entre as respostas dos itens (b) e (a)?

••35 Um rifle que atira balas a 460 m/s é apontado para um alvo situado a 45,7 m de distância. Se o centro do alvo está na mesma altura do rifle, para que altura acima do alvo o cano do rifle deve ser apontado para que a bala atinja o centro do alvo?

••36 Durante uma partida de tênis, um jogador saca a 23,6 m/s, com o centro da bola deixando a raquete horizontalmente a 2,37 m de altura em relação à quadra. A rede está a 12 m de distância e tem 0,90 m de altura. (a) A bola passa para o outro lado da quadra? (b) Qual é a distância entre o centro da bola e o alto da rede quando a bola chega à rede? Suponha que, nas mesmas condições, a bola deixe a raquete fazendo um ângulo 5,00° abaixo da horizontal. Nesse caso, (c) a bola passa para o outro lado da quadra? (d) Qual é a distância entre o centro da bola e o alto da rede quando a bola chega à rede?

••37 Um mergulhador salta com uma velocidade horizontal de 2,00 m/s de uma plataforma que está 10,0 m acima da superfície da água. (a) A que distância horizontal da borda da plataforma está o mergulhador 0,800 s após o início do salto? (b) A que distância vertical acima da superfície da água está o mergulhador nesse instante? (c) A que distância horizontal da borda da plataforma o mergulhador atinge a água?

••38 Uma bola de golfe recebe uma tacada no solo. A velocidade da bola em função do tempo é mostrada na Fig. 4-36, onde $t = 0$ é o instante em que a bola foi golpeada. A escala vertical do gráfico é definida por $v_a = 19$ m/s e $v_b = 31$ m/s. (a) Que distância horizontal a bola de golfe percorre antes de tocar novamente o solo? (b) Qual é a altura máxima atingida pela bola?

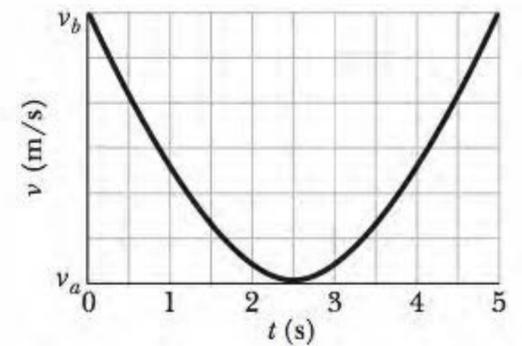



Figura 4-36 Problema 38.

••39 Na Fig. 4-37, uma bola é lançada para a esquerda da extremidade esquerda do terraço de um edifício. O ponto de lançamento está a uma altura h em relação ao solo e a bola chega ao solo 1,50 s depois, a uma distância horizontal $d = 25,0$ m do ponto de lançamento e fazendo um ângulo $\theta = 60,0°$ com a horizontal. (a) Determine o valor de h. (*Sugestão*: uma forma de resolver o problema é inverter o movimento, como se você estivesse vendo um filme de trás para a frente.) Quais são (b) o módulo e (c) o ângulo em relação à horizontal com o qual a bola foi lançada?

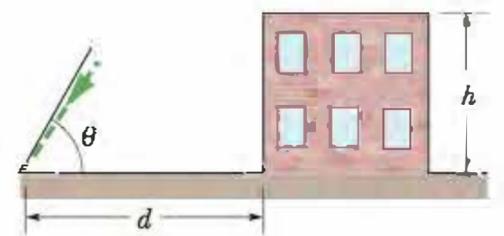



Figura 4-37 Problema 39.

••40 Um arremessador de peso de nível olímpico é capaz de lançar o peso com uma velocidade inicial $v_0 = 15,00$ m/s de uma altura de 2,160 m. Que distância horizontal é coberta pelo peso se o ângulo de lançamento θ_0 é (a) 45,00° e (b) 42,00°? As respostas mostram que o ângulo de 45°, que maximiza o alcance dos projéteis, não maximiza a distância horizontal quando a altura inicial e a altura final são diferentes.

••41 Quando vê um inseto pousado em uma planta perto da superfície da água, o peixe-arqueiro coloca o focinho para fora e lança um jato d'água na direção do inseto para derrubá-lo na água (Fig. 4-38). Embora o peixe veja o inseto na extremidade de um segmento de reta de comprimento d, que faz um ângulo ϕ com a superfície da água, o jato deve ser lançado com um ângulo diferente, θ_0, para que o jato atinja o inseto depois de descrever uma trajetória parabólica. Se $\phi = 36,0°$, $d = 0,900$ m e a velocidade de lançamento é 3,56 m/s, qual deve ser o valor de θ_0 para que o jato esteja no ponto mais alto da trajetória quando atinge o inseto?

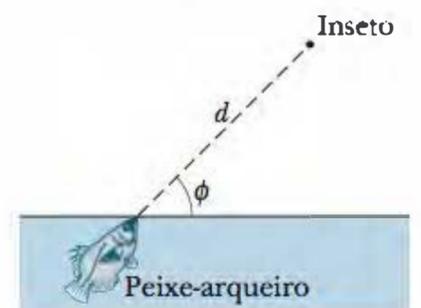



Figura 4-38 Problema 41.

••42 Em 1939 ou 1940, Emanuel Zacchini levou seu número de bala humana a novas alturas: disparado por um canhão, passou por cima de três rodas-gigante antes de cair em uma rede (Fig. 4-39). (a) Tratando Zacchini como uma partícula, determine a que

distância vertical passou da primeira roda-gigante. (b) Se Zacchini atingiu a altura máxima ao passar pela roda-gigante do meio, a que distância vertical passou dessa roda-gigante? (c) A que distância do canhão devia estar posicionado o centro da rede (desprezando a resistência do ar)?

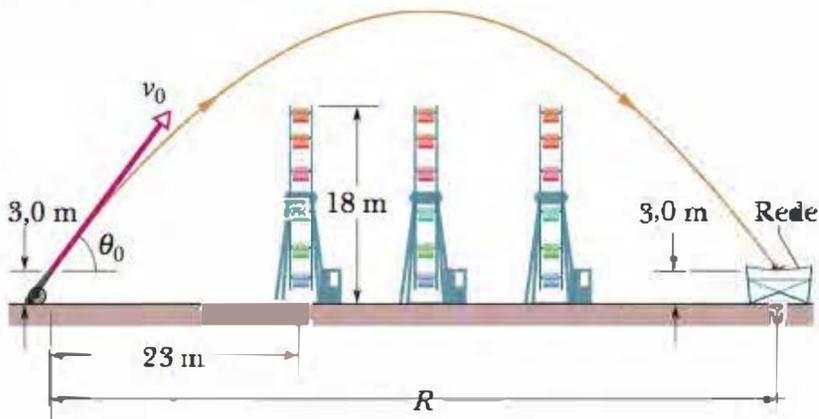



Figura 4-39 Problema 42.

••43 Uma bola é lançada a partir do solo. Quando atinge uma altura de 9,1 m, a velocidade é $\vec{v} = (7{,}6\hat{i} + 6{,}1\hat{j})$ m/s, com $\hat{i}$ horizontal e $\hat{j}$ para cima. (a) Qual é a altura máxima atingida pela bola? (b) Qual é a distância horizontal coberta pela bola? Quais são (c) o módulo e (d) o ângulo (abaixo da horizontal) da velocidade da bola no instante em que atinge o solo?

••44 Uma bola de beisebol deixa a mão do lançador horizontalmente com uma velocidade de 161 km/h. A distância até o rebatedor é 18,3 m. (a) Quanto tempo a bola leva para percorrer a primeira metade da distância? (b) E a segunda metade? (c) Que distância a bola cai livremente durante a primeira metade? (d) E durante a segunda metade? (e) Por que as respostas dos itens (c) e (d) não são iguais?

••45 Na Fig. 4-40, uma bola é lançada com uma velocidade de 10,0 m/s e um ângulo de 50,0° com a horizontal. O ponto de lançamento fica na base de uma rampa de comprimento horizontal $d_1 = 6{,}00$ m e altura $d_2 = 3{,}60$ m. No alto da rampa existe um estrado horizontal. (a) A bola cai na rampa ou no platô? No momento em que a bola cai, quais são (b) o módulo e (c) o ângulo do deslocamento da bola em relação ao ponto de lançamento?

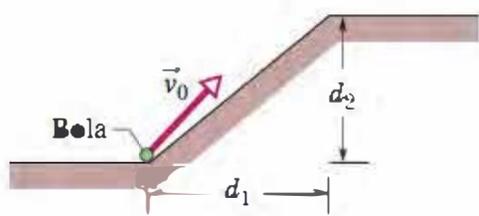



Figura 4-40 Problema 45.

••46 Alguns jogadores de basquetebol parecem flutuar no ar durante um salto em direção à cesta. A ilusão depende em boa parte da capacidade de um jogador experiente de trocar rapidamente a bola de mão durante o salto, mas pode ser acentuada pelo fato de que o jogador percorre uma distância horizontal maior na parte superior do salto do que na parte inferior. Se um jogador salta com uma velocidade inicial $v_0 = 7{,}00$ m/s e um ângulo $\theta_0 = 35{,}0°$, que porcentagem do alcance do salto o jogador passa na metade superior do salto (entre a altura máxima e metade da altura máxima)?

••47 Um rebatedor golpeia uma bola de beisebol quando o centro da bola está 1,22 m acima do solo. A bola deixa o taco fazendo um ângulo de 45° com o solo e com uma velocidade tal que o alcance horizontal (distância até voltar à *altura de lançamento*) é 107 m. (a) A bola consegue passar por um alambrado de 7,32 m de altura que está a uma distância horizontal de 97,5 m do ponto inicial? (b) Qual é a distância entre a extremidade superior do alambrado e o centro da bola quando a bola chega ao alambrado?

••48 Na Fig. 4-41, uma bola é arremessada para o alto de um edifício, caindo 4,00 s depois a uma altura $h = 20{,}0$ m acima da altura de lançamento. A trajetória da bola no final da trajetória tem uma inclinação $\theta = 60{,}0°$ em relação à horizontal. (a) Determine a distância horizontal d coberta pela bola. (Veja a sugestão do Problema 39.) Quais são (b) o módulo e (c) o ângulo (em relação à horizontal) da velocidade inicial da bola?

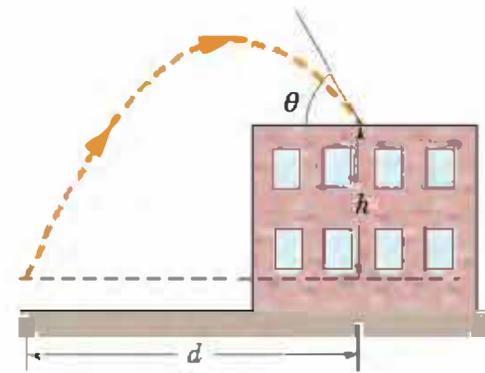



Figura 4-41 Problema 48.

•••49 O chute de um jogador de futebol americano imprime à bola uma velocidade inicial de 25 m/s. Quais são (a) o menor e (b) o maior ângulo de elevação que ele pode imprimir à bola para marcar um *field goal** a partir de um ponto situado a 50 m da meta, cujo travessão está 3,44 m acima do gramado?

•••50 Dois segundos após ter sido lançado a partir do solo, um projétil deslocou-se 40 m horizontalmente e 53 m verticalmente em relação ao ponto de lançamento. Quais são as componentes (a) horizontal e (b) vertical da velocidade inicial do projétil? (c) Qual é o deslocamento horizontal em relação ao ponto de lançamento no instante em que o projétil atinge a altura máxima em relação ao solo?

•••51 Os esquiadores experientes costumam dar um pequeno salto antes de chegarem a uma encosta descendente. Considere um salto no qual a velocidade inicial é $v_0 = 10$ m/s, o ângulo é $\theta_0 = 9{,}0°$, a pista antes do salto é aproximadamente plana e a encosta tem uma inclinação de 11,3°. A Fig. 4-42*a* mostra um *pré-salto* no qual o esquiador desce no início da encosta. A Fig. 4-42*b* mostra um salto que começa no momento em que o esquiador está chegando à encosta. Na Fig. 4-42*a*, o esquiador desce aproximadamente na mesma altura em que começou o salto. (a) Qual é o ângulo ϕ entre a trajetória do esquiador e a encosta na situação da Fig. 4-42*a*? Na situação da Fig. 4-42*b*, (b) o esquiador desce quantos metros abaixo da altura em que começou o salto e (c) qual é o valor de ϕ? (A queda maior e o maior valor de ϕ podem fazer o esquiador perder o equilíbrio.)

(*a*) (*b*)

Figura 4-42 Problema 51.

* Para marcar um *field goal* no futebol americano, um jogador tem que fazer a bola passar por cima do travessão e entre as duas traves laterais. (N.T.)

•••52 Uma bola é lançada do solo em direção a uma parede que está a uma distância x (Fig. 4-43a). A Fig. 4-43b mostra a componente v_y da velocidade da bola no instante em que alcançaria a parede em função da distância x. As escalas do gráfico são definidas por $v_{ys} = 5{,}0$ m/s e $x_s = 20$ m. Qual é o ângulo do lançamento?

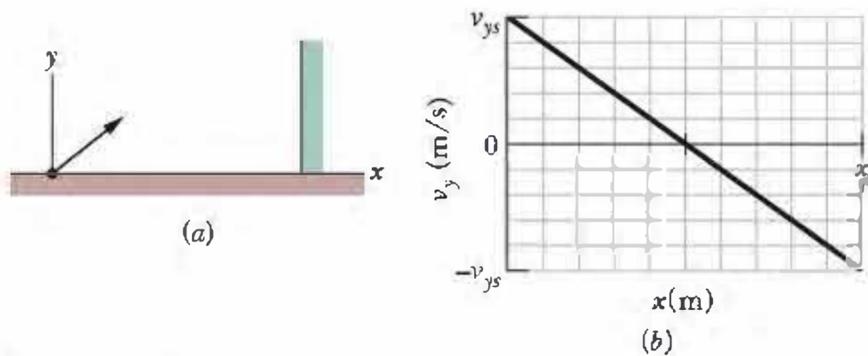



Figura 4-43 Problema 52.

•••53 Na Fig. 4-44, uma bola de beisebol é golpeada a uma altura $h = 1{,}00$ m e apanhada na mesma altura. Deslocando-se paralelamente a um muro, passa pelo alto do muro 1,00 s após ter sido golpeada e, novamente, 4,00 s depois, quando está descendo, em posições separadas por uma distância $D = 50{,}0$ m. (a) Qual é a distância horizontal percorrida pela bola do instante em que foi golpeada até ser apanhada? Quais são (b) o módulo e (c) o ângulo (em relação à horizontal) da velocidade da bola imediatamente após ter sido golpeada? (d) Qual é a altura do muro?

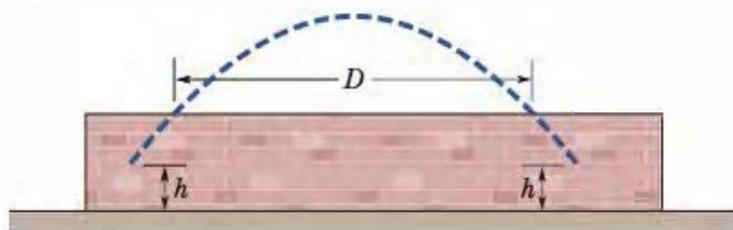



Figura 4-44 Problema 53.

•••54 Uma bola é lançada a partir do solo com uma certa velocidade. A Fig. 4-45 mostra o alcance R em função ao ângulo de lançamento θ_0. O tempo de percurso depende do valor de θ_0; seja $t_{máx}$ o maior valor possível desse tempo. Qual é a menor velocidade que a bola possui durante o percurso se θ_0 é escolhido de tal forma que o tempo de percurso seja $0{,}500t_{máx}$?

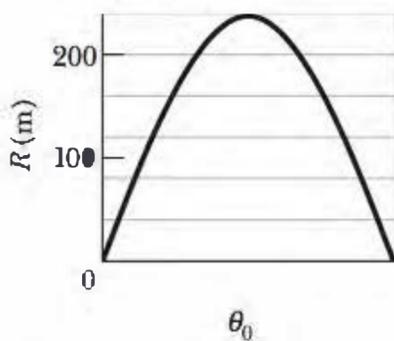



Figura 4-45 Problema 54.

•••55 Uma bola rola horizontalmente do alto de uma escada com uma velocidade de 1,52 m/s. Os degraus têm 20,3 cm de altura e 20,3 cm de largura. Em que degrau a bola bate primeiro?

Seção 4-7 Movimento Circular Uniforme

•56 Um satélite da Terra se move em uma órbita circular, 640 km acima da superfície da Terra, com um período de 98,0 min. Quais são (a) a velocidade e (b) o módulo da aceleração centrípeta do satélite?

•57 Um carrossel de um parque de diversões gira em torno de um eixo vertical com velocidade angular constante. Um homem em pé na borda do carrossel tem uma velocidade escalar constante de 3,66 m/s e uma aceleração centrípeta $\vec{a}$ de módulo 1,83 m/s². O vetor posição $\vec{r}$ indica a posição do homem em relação ao eixo do carrossel. (a) Qual é o módulo de $\vec{r}$? Qual é o sentido de $\vec{r}$ quando $\vec{a}$ aponta (b) para leste e (c) para o sul?

•58 Um ventilador realiza 1200 revoluções por minuto. Considere um ponto situado na extremidade de uma das pás, que descreve uma circunferência com 0,15 m de raio. (a) Que distância o ponto percorre em uma revolução? Quais são (b) a velocidade do ponto e (c) o módulo da aceleração? (d) Qual é o período do movimento?

•59 Uma mulher se encontra em uma roda-gigante com 15 m de raio que completa cinco voltas em torno do eixo horizontal a cada minuto. Quais são (a) o período do movimento, (b) o módulo e (c) o sentido da aceleração centrípeta no ponto mais alto, e (d) o módulo e (e) o sentido da aceleração centrípeta da mulher no ponto mais baixo?

•60 Um viciado em aceleração centrípeta executa um movimento circular uniforme de período $T = 2{,}0$ s e raio $r = 3{,}00$ m. No instante t_1, a aceleração é $\vec{a} = (6{,}00\ \text{m/s}^2)\hat{i} + (-4{,}00\ \text{m/s}^2)\hat{j}$. Quais são, nesse instante, os valores de (a) $\vec{v}\cdot\vec{a}$ e (b) $\vec{r}\times\vec{a}$?

•61 Quando uma grande estrela se torna uma *supernova*, o núcleo da estrela pode ser tão comprimido que ela se transforma em uma *estrela de nêutrons*, com um raio de cerca de 20 km. Se uma estrela de nêutrons completa uma revolução a cada segundo, (a) qual é o módulo da velocidade de uma partícula situada no equador da estrela e (b) qual é o módulo da aceleração centrípeta da partícula? (c) Se a estrela de nêutrons gira mais depressa, as respostas dos itens (a) e (b) aumentam, diminuem ou permanecem as mesmas?

•62 Qual é o módulo da aceleração de um velocista que corre a 10 m/s ao fazer uma curva com 25 m de raio?

••63 Em $t_1 = 2{,}00$ s, a aceleração de uma partícula em movimento circular no sentido anti-horário é $(6{,}00\ \text{m/s}^2)\hat{i} + (4{,}00\ \text{m/s}^2)\hat{j}$. A partícula se move com velocidade escalar constante. Em $t_2 = 5{,}00$ s, a aceleração é $(4{,}00\ \text{m/s}^2)\hat{i} + (-6{,}00\ \text{m/s})\hat{j}$. Qual é o raio da trajetória da partícula se a diferença $t_2 - t_1$ é menor que um período de rotação?

••64 Uma partícula descreve um movimento circular uniforme em um plano horizontal xy. Em um certo instante, a partícula passa pelo ponto de coordenadas (4,00 m, 4,00 m) com uma velocidade de $-5{,}00\hat{i}$ m/s e uma aceleração de $+12{,}5\hat{j}$ m/s. Quais são as coordenadas (a) x e (b) y do centro da trajetória circular?

••65 Uma bolsa a 2,00 m do centro e uma carteira a 3,00 m do centro descrevem um movimento circular uniforme no piso de um carrossel. Os dois objetos estão na mesma linha radial. Em um certo instante, a aceleração da bolsa é $(2{,}00\ \text{m/s}^2)\hat{i} + (4{,}00\ \text{m/s}^2)\hat{j}$. Qual é a aceleração da carteira nesse instante, em termos dos vetores unitários?

••66 Uma partícula se move em uma trajetória circular em um sistema de coordenadas xy horizontal, com velocidade escalar constante. No instante $t_1 = 4{,}00$ s, a partícula se encontra no ponto (5,00 m, 6,00 m) com velocidade $(3{,}00\ \text{m/s})\hat{j}$ e aceleração no sentido positivo de x. No instante $t_2 = 10{,}0$ s, tem uma velocidade $(-3{,}00\ \text{m/s})\hat{i}$ e uma aceleração no sentido positivo de y. Quais são as coordenadas (a) x e (b) y do centro da trajetória circular se a diferença $t_2 - t_1$ é menor que um período de rotação?

•••67 Um menino faz uma pedra descrever uma circunferência horizontal com 1,5 m de raio e uma altura de 2,0 m acima do chão. A corda arrebenta e a pedra é arremessada horizontalmente, chegando ao solo depois de percorrer uma distância horizontal de 10 m. Qual era o módulo da aceleração centrípeta da pedra durante o movimento circular?

•••68 Um gato pula em um carrossel que está descrevendo um movimento circular uniforme. No instante $t_1 = 2{,}00$ s, a velocidade do gato é $\vec{v}_1 = (3{,}00 \text{ m/s})\hat{i} + (4{,}00 \text{ m/s})\hat{j}$, medida em um sistema de coordenadas horizontal xy. No instante $t_2 = 5{,}00$ s, a velocidade é $\vec{v}_2 = (-3{,}00 \text{ m/s})\hat{i} + (-4{,}00 \text{ m/s})\hat{j}$. Quais são (a) o módulo da aceleração centrípeta do gato e (b) a aceleração média do gato no intervalo de tempo $t_2 - t_1$, que é menor que um período de rotação?

Seção 4-8 Movimento Relativo em Uma Dimensão

•69 Um cinegrafista se encontra em uma picape que se move para oeste a 20 km/h enquanto filma um guepardo que também está se movendo para oeste 30 km/h mais depressa que a picape. De repente, o guepardo para, dá meia volta e passa a correr a 45 km/h para leste, de acordo com a estimativa de um membro da equipe, agora nervoso, que está na margem da estrada, no caminho do guepardo. A mudança de velocidade do animal leva 2,0 s. Quais são (a) o módulo e (b) a orientação da aceleração do animal em relação ao cinegrafista e (c) o módulo e (d) a orientação da aceleração do animal em relação ao membro nervoso da equipe?

•70 Um barco está navegando rio acima, no sentido positivo de um eixo x, a 14 km/h em relação à água do rio. A água do rio está correndo a 9,0 km/h em relação à margem. Quais são (a) o módulo e (b) a orientação da velocidade do barco em relação à margem? Uma criança que está no barco caminha da popa para a proa a 6,0 km/h em relação ao barco. Quais são (c) o módulo e (d) a orientação da velocidade da criança em relação à margem?

••71 Um homem de aparência suspeita corre o mais depressa que pode por uma esteira rolante, levando 2,5 s para ir de uma extremidade à outra. Os seguranças aparecem e o homem volta ao ponto de partida, correndo o mais depressa que pode e levando 10,0 s. Qual é a razão entre a velocidade do homem e a velocidade da esteira?

Seção 4-9 Movimento Relativo em Duas Dimensões

•72 Um jogador de rúgbi corre com a bola em direção à meta do adversário, no sentido positivo de um eixo x. De acordo com as regras do jogo, pode passar a bola a um companheiro de equipe desde que a velocidade da bola em relação ao campo não possua uma componente x positiva. Suponha que o jogador esteja correndo com uma velocidade de 4,0 m/s em relação ao campo quando passa a bola com uma velocidade $\vec{v}_{BJ}$ em relação a ele mesmo. Se o módulo de $\vec{v}_{BJ}$ é 6,0 m/s, qual é o menor ângulo que a bola deve fazer com a direção x para que o passe seja válido?

••73 Duas rodovias se cruzam, como mostra a Fig. 4-46. No instante indicado, um carro de polícia P está a uma distância $d_P = 800$ m do cruzamento, movendo-se com uma velocidade escalar $v_P = 80$ km/h. O motorista M está a uma distância $d_M = 600$ m do cruzamento, movendo-se com uma velocidade escalar $v_M = 60$ km/h. (a) Qual é a velocidade do motorista em relação ao carro da polícia na notação de vetores unitários? (b) No instante mostrado na Fig. 4-46, qual é o ângulo entre a velocidade calculada no item (a) e a reta que liga os dois carros? (c) Se os carros mantêm a velocidade, as respostas dos itens (a) e (b) mudam quando os carros se aproximam da interseção?

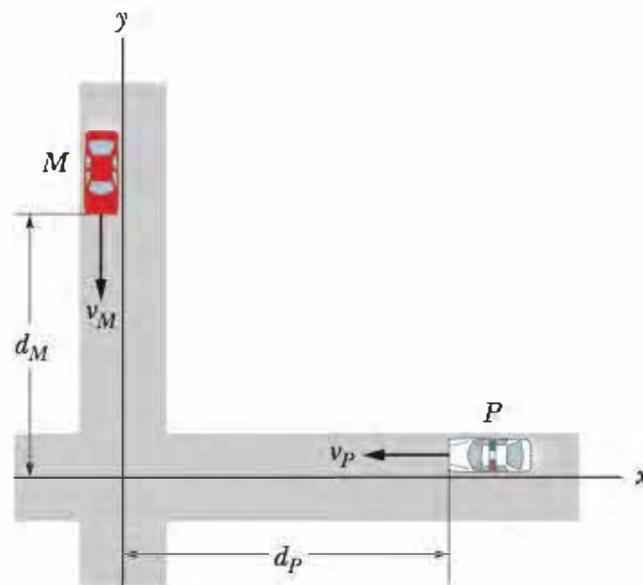



Figura 4-46 Problema 73.

••74 Depois de voar por 15 min em um vento de 42 km/h a um ângulo de 20° ao sul do leste, o piloto de um avião sobrevoa uma cidade que está a 55 km ao norte do ponto de partida. Qual é a velocidade escalar do avião em relação ao ar?

••75 Um trem viaja para o sul a 30 m/s (em relação ao solo) em meio a uma chuva que é soprada para o sul pelo vento. As trajetórias das gotas de chuva fazem um ângulo de 70° com a vertical quando medidas por um observador estacionário no solo. Um observador no trem, entretanto, vê as gotas caírem exatamente na vertical. Determine a velocidade escalar das gotas de chuva em relação ao solo.

••76 Um avião pequeno atinge uma velocidade do ar de 500 km/h. O piloto pretende chegar a um ponto 800 km ao norte, mas descobre que deve direcionar o avião 20,0° a leste do norte para atingir o destino. O avião chega em 2,00 h. Quais eram (a) o módulo e (b) a orientação da velocidade do vento?

••77 A neve está caindo verticalmente com uma velocidade constante de 8,0 m/s. Com que ângulo, em relação à vertical, os flocos de neve parecem estar caindo do ponto de vista do motorista de um carro que viaja em uma estrada plana e retilínea a uma velocidade de 50 km/h?

••78 Na vista superior da Fig. 4-47, os jipes P e B se movem em linha reta em um terreno plano e passam por um guarda de fronteira estacionário A. Em relação ao guarda, o jipe B se move com uma velocidade escalar constante de 20,0 m/s e um ângulo $\theta_2 = 30{,}0°$. Também em relação ao guarda, P acelerou a partir do repouso a uma taxa constante de 0,400 m/s² com um ângulo $\theta_1 = 60{,}0°$. Em um certo instante durante a aceleração, P possui uma velocidade escalar de 40,0 m/s. Nesse instante, quais são (a) o módulo e (b) a orientação da velocidade de P em relação a B e (c) o módulo e (d) a orientação da aceleração de P em relação a B?

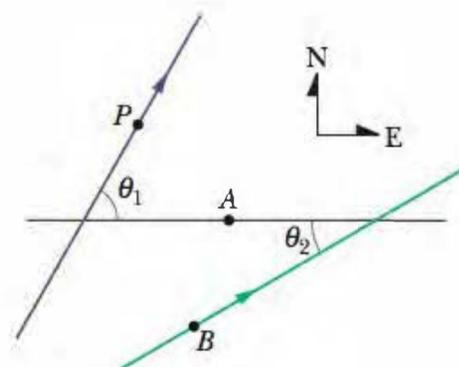



Figura 4-47 Problema 78.

••79 Dois navios, A e B, deixam o porto ao mesmo tempo. O navio A navega para noroeste a 24 nós e o navio B navega a 28 nós em uma direção 40° a oeste do sul. (1 nó = 1 milha marítima por hora; veja o Apêndice D.) Quais são (a) o módulo e (b) a orientação da velocidade do navio A em relação ao navio B? (c) Após quanto tempo os navios estarão separados por 160 milhas marítimas? (d) Qual será o curso de B (orientação do vetor posição de B) em relação a A nesse instante?

••80 Um rio de 200 m de largura corre para leste com uma velocidade constante de 2,0 m/s. Um barco com uma velocidade de 8,0 m/s em relação à água parte da margem sul em uma direção 30° a oeste do norte. Determine (a) o módulo e (b) a orientação da velocidade do barco em relação à margem. (c) Quanto tempo o barco leva para atravessar o rio?

•••81 O navio A está 4,0 km ao norte e 2,5 km a leste do navio B. O navio A está viajando com uma velocidade de 22 km/h na direção sul; o navio B, com uma velocidade de 40,0 km/h em uma direção 37° ao norte do leste. (a) Qual é a velocidade de A em relação a B em termos dos vetores unitários, com $\hat{i}$ apontando para o leste? (b) Escreva uma expressão (em termos de $\hat{i}$ e $\hat{j}$) para a posição de A em relação a B em função do tempo t, tomando $t = 0$ como o instante em que os dois navios estão nas posições antes descritas. (c) Em que instante a separação entre os navios é mínima? (d) Qual é a separação mínima?

•••82 Um rio de 200 m de largura corre com velocidade constante de 1,1 m/s em uma floresta, na direção leste. Um explorador deseja sair de uma pequena clareira na margem sul e atravessar o rio em um barco a motor que se move com uma velocidade escalar constante de 4,0 m/s em relação à água. Existe outra clareira na margem norte, 82 m rio acima do ponto de vista de um local da margem sul exatamente em frente à segunda clareira. (a) Em que direção o barco deve ser apontado para viajar em linha reta e chegar à clareira da margem norte? (b) Quanto tempo o barco leva para atravessar o rio e chegar à clareira?

Problemas Adicionais

83 Uma mulher que é capaz de remar um barco a 6,4 km/h em águas paradas se prepara para atravessar um rio retilíneo com 6,4 km de largura e uma correnteza de 3,2 km/h. Tome $\hat{i}$ perpendicular ao rio e $\hat{j}$ apontando rio abaixo. Se a mulher pretende remar até um ponto na outra margem exatamente em frente ao ponto de partida, (a) para que ângulo em relação a $\hat{i}$ deve apontar o barco e (b) quanto tempo leva para fazer a travessia? (c) Quanto tempo gastaria se, permanecendo na mesma margem, remasse 3,2 km *rio abaixo* e depois remasse de volta ao ponto de partida? (d) Quanto tempo gastaria se, permanecendo na mesma margem, remasse 3,2 km *rio acima* e depois remasse de volta ao ponto de partida? (e) Para que ângulo deveria direcionar o barco para atravessar o rio no menor tempo possível? (f) Qual seria esse tempo?

84 Na Fig. 4-48a, um trenó se move no sentido negativo do eixo x com uma velocidade escalar constante v_t quando uma bola de gelo é atirada do trenó com uma velocidade $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$ em relação ao trenó. Quando a bola chega ao solo, o deslocamento horizontal Δx_{bs} em relação ao solo (da posição inicial à posição final) é medido. A Fig. 4-48b mostra a variação de Δx_{bs} com v_t. Suponha que a bola chegue ao solo na altura aproximada em que foi lançada. Quais são os valores (a) de v_{0x} e (b) de v_{0y}? O deslocamento da bola em relação ao trenó, Δx_{bt}, também pode ser medido. Suponha que a velocidade do trenó não mude depois que a bola foi atirada. Quanto é Δx_{bt} para v_t igual a (c) 5,0 m/s e (d) 15 m/s?

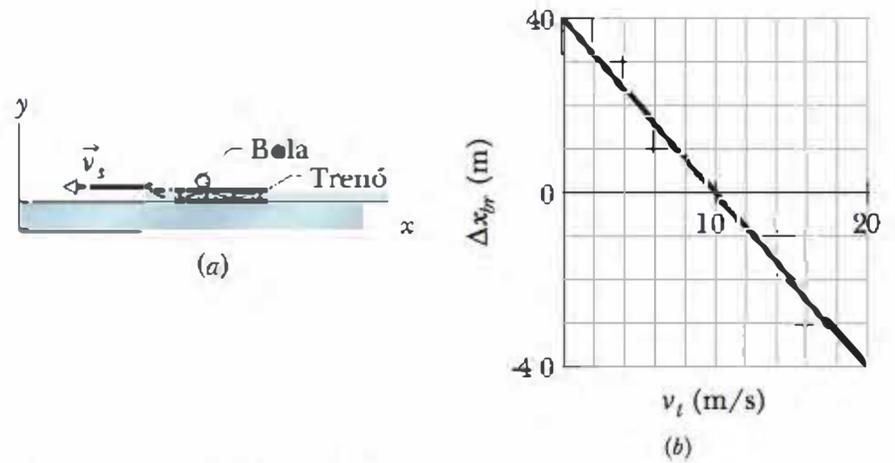



Figura 4-48 Problema 84.

85 Você foi sequestrado por estudantes de ciência política (que estão aborrecidos porque você declarou que ciência política não é ciência de verdade). Embora esteja vendado, você pode estimar a velocidade do carro dos sequestradores (pelo ronco do motor), o tempo de viagem (contando mentalmente os segundos) e a orientação da viagem (pelas curvas que o carro fez). A partir dessas pistas, você sabe que foi conduzido ao longo do seguinte percurso: 50 km/h por 2,0 min, curva de 90° para a direita, 20 km/h por 4,0 min, curva de 90° para a direita, 20 km/h por 60 s, curva de 90° para a esquerda, 50 km/h por 60 s, curva 90° para a direita, 20,0 km/h por 2,0 min, curva de 90° para a esquerda, 50 km/h por 30 s. Nesse ponto, (a) a que distância você se encontra do ponto de partida e (b) em que direção em relação à direção inicial você está?

86 Na Fig. 4-49, uma estação de radar detecta um avião que se aproxima, vindo do leste. Quando é observado pela primeira vez, o avião está a uma distância $d_1 = 360$ m da estação e $\theta_1 = 40°$ acima do horizonte. O avião é rastreado durante uma variação angular $\Delta\theta = 123°$ no plano vertical leste-oeste; a distância no final desta variação é $d_2 = 790$ m. Determine (a) o módulo e (b) a orientação do deslocamento do avião durante este período.

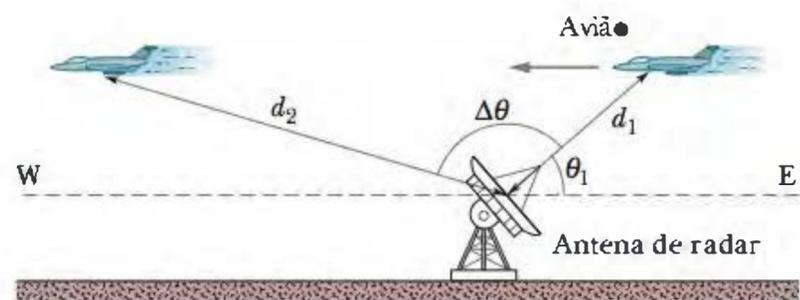



Figura 4-49 Problema 86.

87 Uma bola de beisebol é golpeada junto ao chão. A bola atinge a altura máxima 3,0 s após ter sido golpeada. Em seguida, 2,5 s após ter atingido a altura máxima, a bola passa rente a um alambrado que está a 97,5 m do ponto onde foi golpeada. Suponha que o solo é plano. (a) Qual é a altura máxima atingida pela bola? (b) Qual é a altura do alambrado? (c) A que distância do alambrado a bola atinge o chão?

88 Voos longos em latitudes médias no Hemisfério Norte encontram a chamada corrente de jato, um fluxo de ar para leste que pode afetar a velocidade do avião em relação à superfície da Terra. Se o piloto mantém uma certa velocidade em relação ao ar (a chamada *velocidade do ar*), a velocidade em relação ao solo é maior quando o voo é na direção da corrente de jato e menor quando o voo é na direção oposta. Suponha que um voo de ida e volta esteja previsto entre duas cidades separadas por 4000 km, com o voo de ida no

sentido da corrente de jato e o voo de volta no sentido oposto. O computador da empresa aérea recomenda uma velocidade do ar de 1000 km/h, para a qual a diferença entre as durações dos voos de ida e de volta é 70,0 min. Qual foi a velocidade da corrente de jato usada nos cálculos?

89 Uma partícula parte da origem no instante $t = 0$ com uma velocidade de $8{,}0\hat{j}$ m/s e se move no plano xy com uma aceleração constante igual a $(4{,}0\hat{i} + 2{,}0\hat{j})$ m/s². Quando a coordenada x da partícula é 29 m, quais são (a) a coordenada y e (b) a velocidade escalar?

90 Com que velocidade inicial o jogador de basquetebol da Fig. 4-50 deve arremessar a bola, com um ângulo $\theta_0 = 55°$ acima da horizontal, para converter o lance livre? As distâncias horizontais são $d_1 = 1{,}0$ ft e $d_2 = 14$ ft e as alturas são $h_1 = 7{,}0$ ft e $h_2 = 10$ ft.

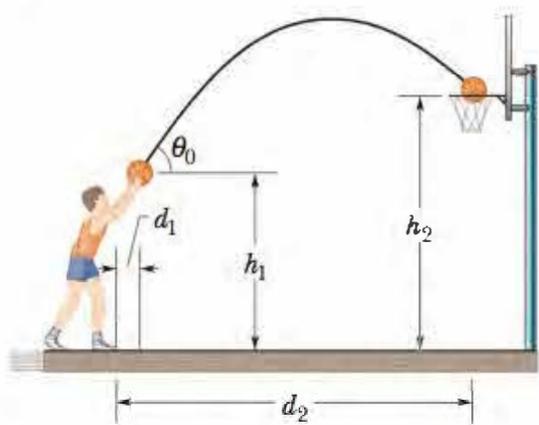



Figura 4-50 Problema 90.

91 Durante as erupções vulcânicas, grandes pedaços de pedra podem ser lançados para fora do vulcão; esses projéteis são conhecidos como *bombas vulcânicas*. A Fig. 4-51 mostra uma seção transversal do monte Fuji, no Japão. (a) Com que velocidade inicial uma bomba vulcânica teria que ser lançada, com um ângulo $\theta_0 = 35°$ em relação à horizontal, a partir da cratera A, para cair no ponto B, a uma distância vertical $h = 3{,}30$ km e uma distância horizontal $d = 9{,}40$ km? Ignore o efeito do ar sobre o movimento do projétil. (b) Qual seria o tempo de percurso? (c) O efeito do ar aumentaria ou diminuiria o valor da velocidade calculada no item (a)?

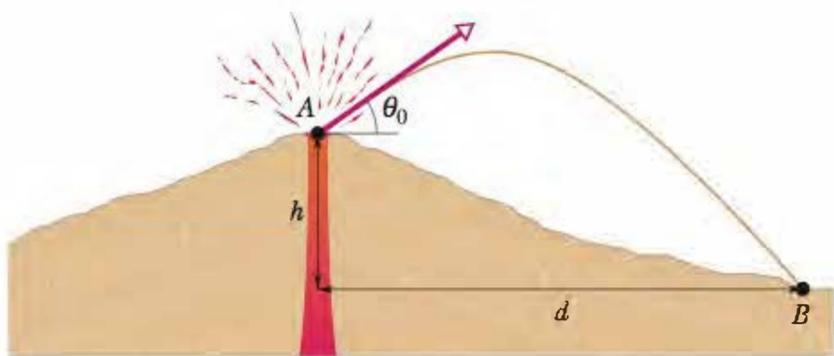



Figura 4-51 Problema 91.

92 Um astronauta é posto em rotação em uma centrífuga horizontal com um raio de 5,0 m. (a) Qual é a velocidade escalar do astronauta se a aceleração centrípeta tem um módulo de $7{,}0g$? (b) Quantas revoluções por minuto são necessárias para produzir essa aceleração? (c) Qual é o período do movimento?

93 O oásis A está 90 km a oeste do oásis B. Um camelo parte de A e leva 50 h para caminhar 75 km na direção 37° ao norte do leste. Em seguida, leva 35 h para caminhar 65 km para o sul e descansa por 5,0 h. Quais são (a) o módulo e (b) o sentido do deslocamento do camelo em relação a A até o ponto em que para para descansar? Do instante em que o camelo parte do ponto A até o final do período de descanso, quais são (c) o módulo e (d) o sentido da velocidade média do camelo e (e) a velocidade escalar média do camelo? A última vez que o camelo bebeu água foi em A; o animal deve chegar a B não mais do que 120 h após a partida para beber água novamente. Para que chegue a B no último momento, quais devem ser (f) o módulo e (g) o sentido da velocidade média após o período de descanso?

94 *Cortina da morte*. Um grande asteroide metálico colide com a Terra e abre uma cratera no material rochoso abaixo do solo, lançando pedras para o alto. A tabela a seguir mostra cinco pares de velocidades e ângulos (em relação à horizontal) para essas pedras, com base em um modelo de formação de crateras. (Outras pedras, com velocidades e ângulos intermediários, também são lançadas.) Suponha que você está em $x = 20$ km quando o asteroide chega ao solo no instante $t = 0$ e na posição $x = 0$ (Fig. 4-52). (a) Em $t = 20$ s, quais são as coordenadas x e y das pedras, de A a E, que foram lançadas em sua direção? (b) Plote essas coordenadas em um gráfico e desenhe uma curva passando pelos pontos para incluir pedras com velocidades e ângulos intermediários. A curva deve dar uma ideia do que você veria ao olhar na direção das pedras e do que os dinossauros devem ter visto durante as colisões de asteroides com a Terra, no passado remoto.

Pedra	Velocidade (m/s)	Ângulo (graus)
A	520	14,0
B	630	16,0
C	750	18,0
D	870	20,0
E	1000	22,0

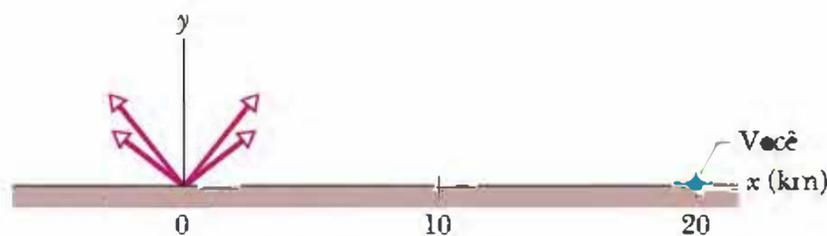



Figura 4-52 Problema 94.

95 A Fig. 4-53 mostra a trajetória retilínea de uma partícula em um sistema de coordenadas xy quando a partícula é acelerada a partir do repouso em um intervalo de tempo Δt_1. A aceleração é constante. As coordenadas do ponto A são (4,00 m, 6,00 m) e as do ponto B são (12,0 m, 18,0 m). (a) Qual é a razão a_y/a_x entre as componentes da aceleração? (b) Quais são as coordenadas da partícula se o movimento continua durante outro intervalo igual a Δt_1?

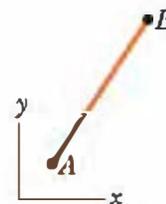



Figura 4-53 Problema 95.

96 No voleibol feminino, o alto da rede está 2,24 m acima do piso e a quadra mede 9,0 m por 9,0 m de cada lado da rede. Ao dar um saque viagem, uma jogadora bate na bola quando está 3,0 m acima do piso e a uma distância horizontal de 8,0 m da rede. Se a velocidade inicial da bola é horizontal, determine (a) a menor velocidade

escalar que a bola deve ter para ultrapassar a rede e (b) a máxima velocidade que pode ter para atingir o piso dentro dos limites da quadra do outro lado da rede.

97 Um rifle é apontado horizontalmente para um alvo a 30 m de distância. A bala atinge o alvo 1,9 cm abaixo do ponto para onde o rifle foi apontado. Determine (a) o tempo de percurso da bala e (b) a velocidade escalar da bala ao sair do rifle.

98 Uma partícula descreve um movimento circular uniforme em torno da origem de um sistema de coordenadas xy, movendo-se no sentido horário com um período de 7,00 s. Em um certo instante, o vetor posição da partícula (em relação à origem) é $\vec{r} = (2{,}00\ \text{m})\hat{i} - (3{,}00\ \text{m})\hat{j}$. Qual é a velocidade da partícula nesse instante, em termos dos vetores unitários?

99 Na Fig. 4-54, uma bola de massa de modelar descreve um movimento circular uniforme, com um raio de 20,0 cm, na borda de uma roda que está girando no sentido anti-horário com um período de 5,00 ms. A bola se desprende na posição correspondente a 5 horas (como se estivesse no mostrador de um relógio) e deixa a roda a uma altura h = 1,20 m acima do chão e a uma distância d = 2,50 m de uma parede. Em que altura a bola bate na parede?

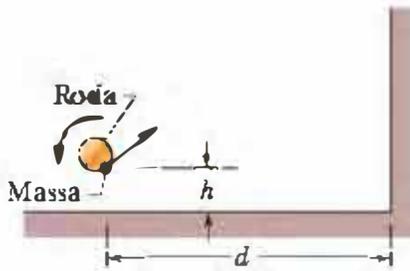



Figura 4-54 Problema 99.

100 Um trenó a vela atravessa um lago gelado com uma aceleração constante produzida pelo vento. Em um certo instante, a velocidade do trenó é $(6{,}30\hat{i} - 8{,}42\hat{j})$ m/s. Três segundos depois, uma mudança de direção do vento faz o trenó parar momentaneamente. Qual é a aceleração média do trenó neste intervalo de 3,00 s?

101 Na Fig. 4-55, uma bola é lançada verticalmente para cima, a partir do solo, com uma velocidade inicial v_0 = 7,00 m/s. Ao mesmo tempo, um elevador de serviço começa a subir, a partir do solo, com uma velocidade constante v_c = 3,00 m/s. Qual é a altura máxima atingida pela bola (a) em relação ao solo e (b) em relação ao piso do elevador? Qual é a taxa de variação da velocidade da bola (c) em relação ao solo e (d) em relação ao piso do elevador?

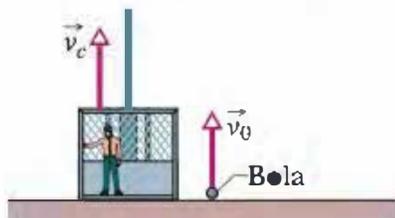



Figura 4-55 Problema 101.

102 Um campo magnético pode forçar uma partícula a descrever uma trajetória circular. Suponha que um elétron que está descrevendo uma circunferência sofra uma aceleração radial de módulo $3{,}0 \times 10^{14}$ m/s^2 sob o efeito de um campo magnético. (a) Qual é o módulo da velocidade do elétron se o raio da trajetória circular é 15 cm? (b) Qual é o período do movimento?

103 Em 3,50 h, um balão se desloca 21,5 km para o norte, 9,70 km para leste e 2,88 km para cima em relação ao ponto de lançamento. Determine (a) o módulo da velocidade média do balão e (b) o ângulo que a velocidade média faz com a horizontal.

104 Uma bola é lançada horizontalmente de uma altura de 20 m e chega ao solo com uma velocidade três vezes maior que a inicial. Determine a velocidade inicial.

105 Um projétil é lançado com uma velocidade inicial de 30 m/s e um ângulo de 60° acima da horizontal. Determine (a) o módulo e (b) o ângulo da velocidade 2,0 s após o lançamento. (c) O ângulo do item (b) é acima ou abaixo da horizontal? Determine (d) o módulo e (e) o ângulo da velocidade 5,0 s após o lançamento. (f) O ângulo do item (e) é acima ou abaixo da horizontal?

106 O vetor posição de um próton é inicialmente $\vec{r} = 5{,}0\hat{i} - 6{,}0\hat{j} + 2{,}0\hat{k}$ e depois se torna $\vec{r} = -2{,}0\hat{i} + 6{,}0\hat{j} + 2{,}0\hat{k}$, com todos os valores em metros. (a) Qual é o vetor deslocamento do próton? (b) Esse vetor é paralelo a que plano?

107 Uma partícula P se move com velocidade escalar constante sobre uma circunferência de raio r = 3,00 m (Fig. 4-56) e completa uma revolução a cada 20,0 s. A partícula passa pelo ponto O no instante t = 0. Os vetores pedidos a seguir devem ser expressos na notação módulo-ângulo (ângulo em relação ao sentido positivo de x). Determine o vetor posição da partícula, em relação a O, nos instantes (a) t = 5,00 s, (b) t = 7,50 s e (c) t = 10,0 s.

(d) Determine o deslocamento da partícula no intervalo de 5,00 s entre o fim do quinto segundo e o fim do décimo segundo. Para esse mesmo intervalo, determine (e) a velocidade média e a velocidade (f) no início e (g) no fim do intervalo. Finalmente, determine a aceleração (h) no início e (i) no fim do intervalo.

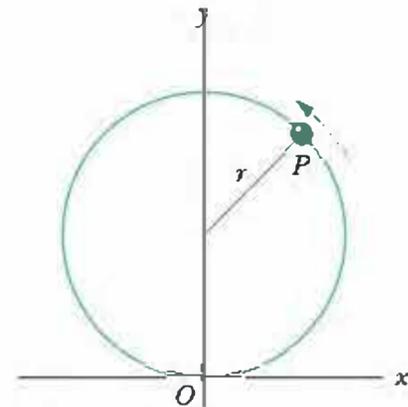



Figura 4-56 Problema 107.

108 Um trem francês de alta velocidade, conhecido como TGV (*Train à Grande Vitesse*), viaja a uma velocidade média de 216 km/h. (a) Se o trem faz uma curva a essa velocidade e o módulo da aceleração sentida pelos passageiros pode ser no máximo 0,050g, qual é o menor raio de curvatura dos trilhos que pode ser tolerado? (b) Com que velocidade o trem deve fazer uma curva com 1,00 km de raio para que a aceleração esteja no limite permitido?

109 (a) Se um elétron é lançado horizontalmente com uma velocidade de $3{,}0 \times 10^6$ m/s, quantos metros cai o elétron ao percorrer uma distância horizontal de 1,0 m? (b) A distância calculada no item (a) aumenta, diminui ou permanece a mesma quando a velocidade inicial aumenta?

110 Uma pessoa sobe uma escada rolante enguiçada, de 15 m de comprimento, em 90 s. Ficando parada na mesma escada rolante, depois de consertada, a pessoa sobe em 60 s. Quanto tempo a pessoa leva se subir com a escada em movimento? A resposta depende do comprimento da escada?

111 (a) Qual é o módulo da aceleração centrípeta de um objeto no equador da Terra devido à rotação de nosso planeta? (b) Qual deveria ser o período de rotação da Terra para que um objeto no equador tivesse uma aceleração centrípeta com um módulo de 9,8 m/s^2?

112 O alcance de um projétil depende, não só de v_0 e θ_0, mas também do valor g da aceleração em queda livre, que varia de lugar para lugar. Em 1936, Jesse Owens estabeleceu o recorde mundial de salto em distância de 8,09 m nos Jogos Olímpicos de Berlim, onde $g = 9{,}8128$ m/s². Supondo os mesmos valores de v_0 e θ_0, que distância o atleta teria pulado em 1956, nos Jogos Olímpicos de Melbourne, onde $g = 9{,}7999$ m/s²?

113 A Fig. 4-61 mostra a trajetória seguida por um gambá bêbado em um terreno plano, de um ponto inicial i até um ponto final f. Os ângulos são $\theta_1 = 30{,}0°$, $\theta_2 = 50{,}0°$ e $\theta_3 = 80{,}0°$; as distâncias são $d_1 = 5{,}00$ m, $d_2 = 8{,}00$ m e $d_3 = 12{,}0$ m. Quais são (a) o módulo e (b) o ângulo do deslocamento do bêbado de i até f?

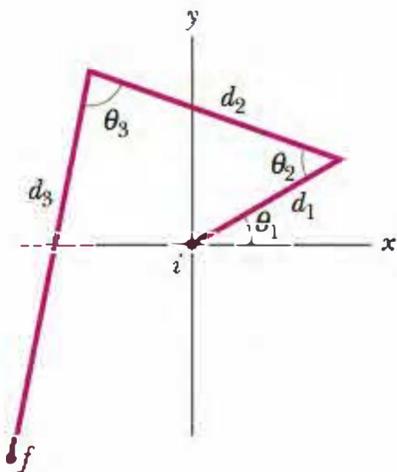



Figura 4-57 Problema 113.

114 A posição $\vec{r}$ de uma partícula que se move no plano xy é dada por $\vec{r} = 2t\hat{i} + 2\,\text{sen}[(\pi/4\ \text{rad/s})t]\hat{j}$, onde $\vec{r}$ está em metros e t em segundos. (a) Calcule os valores das componentes x e y da posição da partícula para $t = 0$; 1,0; 2,0; 3,0 e 4,0 s e plote a trajetória da partícula no plano xy para o intervalo $0 \leq t \leq 4{,}0$. (b) Calcule os valores das componentes da velocidade da partícula para $t = 1{,}0$; 2,0 e 3,0 s. Mostre que a velocidade é tangente à trajetória da partícula e tem o mesmo sentido que o movimento da partícula em todos esses instantes traçando os vetores velocidade no gráfico da trajetória da partícula, plotado no item (a). (c) Calcule as componentes da aceleração da partícula nos instantes $t = 1{,}0$; 2,0 e 3,0 s.

115 Um elétron com uma velocidade horizontal inicial de módulo $1{,}00 \times 10^9$ cm/s penetra na região entre duas placas de metal horizontais eletricamente carregadas. Nessa região, o elétron percorre uma distância horizontal de 2,00 cm e sofre uma aceleração constante para baixo de módulo $1{,}00 \times 10^{17}$ cm/s² devido às placas carregadas. Determine (a) o tempo que o elétron leva para percorrer os 2,00 cm; (b) a distância vertical que o elétron percorre durante esse tempo; o módulo da componente (c) horizontal e (d) vertical da velocidade quando o elétron sai da região entre as placas.

116 Um elevador sem teto está subindo com uma velocidade constante de 10 m/s. Um menino que está no elevador arremessa uma bola para cima, na vertical, de uma altura 2,0 m acima do piso do elevador, no instante em que o piso do elevador se encontra 28 m acima do solo. A velocidade inicial da bola em relação ao elevador é 20 m/s. (a) Qual é a altura máxima acima do solo atingida pela bola? (b) Quanto tempo a bola leva para cair de volta no piso do elevador?

117 Um jogador de futebol americano chuta uma bola de tal forma que a bola passa 4,5 s no ar e chega ao solo a 46 m de distância. Se a bola deixou o pé do jogador 150 cm acima do solo, determine (a) o módulo e (b) o ângulo (em relação à horizontal) da velocidade inicial da bola.

118 Um aeroporto dispõe de uma esteira rolante para ajudar os passageiros a atravessarem um longo corredor. Lauro não usa a esteira rolante e leva 150 s para atravessar o corredor. Cora, que fica parada na esteira rolante, cobre a mesma distância em 70 s. Marta prefere andar na esteira rolante. Quanto tempo leva Marta para atravessar o corredor? Suponha que Lauro e Marta caminham com a mesma velocidade.

119 Um vagão de madeira está se movendo em uma linha férrea retilínea com velocidade v_1. Um franco-atirador dispara uma bala (com velocidade inicial v_2) contra o vagão, usando um rifle de alta potência. A bala atravessa as duas paredes laterais e os furos de entrada e saída ficam à mesma distância das extremidades do vagão. De que direção, em relação à linha férrea, a bala foi disparada? Suponha que a bala não foi desviada ao penetrar no vagão, mas a velocidade diminuiu 20%. Suponha ainda que $v_1 = 85$ km/h e $v_2 = 650$ m/s. (Por que não é preciso conhecer a largura do vagão?)

CAPÍTULO 5

FORÇA E MOVIMENTO – I

5-1 O QUE É FÍSICA?

Vimos que a física envolve o estudo do movimento dos objetos, incluindo a aceleração, que é uma variação de velocidade. A física também envolve o estudo da *causa* da aceleração. A causa é sempre uma **força**, que pode ser definida, em termos coloquiais, como um empurrão ou um puxão exercido sobre um objeto. Dizemos que a força *age* sobre o objeto, mudando a velocidade. Por exemplo: na largada de uma prova de Fórmula 1, uma força exercida pela pista sobre os pneus traseiros provoca a aceleração dos veículos. Quando um zagueiro segura o centroavante do time adversário, uma força exercida pelo defensor provoca a desaceleração do atacante. Quando um carro colide com um poste, uma força exercida pelo poste faz com que o carro pare bruscamente. As revistas de ciência, engenharia, direito e medicina estão repletas de artigos sobre as forças a que estão sujeitos os objetos, entre os quais podem ser incluídos os seres humanos.

5-2 Mecânica Newtoniana

A relação que existe entre uma força e aceleração produzida por essa força foi descoberta por Isaac Newton (1642–1727) e é o assunto deste capítulo. O estudo da relação, da forma como foi apresentada por Newton, é chamado de *mecânica newtoniana*. Vamos nos concentrar inicialmente nas três leis básicas de movimento da mecânica newtoniana.

A mecânica newtoniana não pode ser aplicada a todas as situações. Se as velocidades dos corpos envolvidos são muito elevadas, comparáveis à velocidade da luz, a mecânica newtoniana deve ser substituída pela teoria da relatividade restrita de Einstein, que é válida para qualquer velocidade. Se os corpos envolvidos são muito pequenos, de dimensões atômicas ou subatômicas (como, por exemplo, os elétrons de um átomo), a mecânica newtoniana deve ser substituída pela mecânica quântica. Atualmente, os físicos consideram a mecânica newtoniana um caso especial dessas duas teorias mais abrangentes. Ainda assim, trata-se de um caso especial muito importante, já que pode ser aplicado ao estudo do movimento dos mais diversos objetos, desde corpos muito pequenos (quase de dimensões atômicas) até corpos muito grandes (galáxias e aglomerados de galáxias).

5-3 A Primeira Lei de Newton

Antes de Newton formular sua mecânica, pensava-se que uma influência, uma "força", era necessária para manter um corpo em movimento com velocidade constante e que um corpo estava em seu "estado natural" apenas quando se encontrava em repouso. Para que um corpo se movesse com velocidade constante, tinha que ser impulsionado de alguma forma, puxado ou empurrado; se não fosse assim, pararia "naturalmente".

Essas ideias pareciam razoáveis. Se você faz um disco de metal deslizar em uma superfície de madeira, o disco realmente diminui de velocidade até parar. Para que

continue a deslizar indefinidamente com velocidade constante, deve ser empurrado ou puxado continuamente.

Por outro lado, se o disco for lançado em um rinque de patinação, percorrerá uma distância bem maior antes de parar. É possível imaginar superfícies mais escorregadias, nas quais o disco percorreria distâncias ainda maiores. No limite, podemos pensar em uma superfície extremamente escorregadia (conhecida como **superfície sem atrito**), na qual o disco não diminuiria de velocidade. (Podemos, de fato, chegar muito perto dessa situação fazendo o disco deslizar em uma mesa de ar, na qual é sustentado por uma corrente de ar.)

A partir dessas observações, podemos concluir que um corpo manterá seu estado de movimento com velocidade constante se nenhuma força agir sobre ele. Isso nos leva à primeira das três leis de Newton.

Primeira Lei de Newton Se nenhuma força atua sobre um corpo, sua velocidade não pode mudar, ou seja, o corpo não pode sofrer uma aceleração.

Em outras palavras, se o corpo está em repouso, permanece em repouso; se está em movimento, continua com a mesma velocidade (mesmo módulo *e* mesma orientação).

5-4 Força

Vamos agora definir a unidade de força. Sabemos que uma força pode causar a aceleração de um corpo. Assim, definimos a unidade de força em termos da aceleração que uma força imprime a um corpo de referência, que tomamos como sendo o quilograma-padrão da Fig. 1-3. A esse corpo foi atribuída, exatamente e por definição, uma massa de 1 kg.

Colocamos o corpo-padrão sobre uma mesa horizontal sem atrito e o puxamos para a direita (Fig. 5-1) até que, por tentativa e erro, adquira uma aceleração de 1 m/s^2. Declaramos então, a título de definição, que a força que estamos exercendo sobre o corpo-padrão tem um módulo de 1 newton (1 N).

Figura 5-1 Uma força $\vec{F}$ aplicada ao quilograma-padrão provoca uma aceleração $\vec{a}$.

Podemos exercer uma força de 2 N sobre nosso corpo-padrão puxando-o até a aceleração medida de 2 m/s^2, e assim por diante. No caso geral, se nosso corpo-padrão de massa igual a 1 kg tem uma aceleração de módulo a, sabemos que uma força F está agindo sobre o corpo e que o módulo da força (em newtons) é igual ao módulo da aceleração (em metros por segundo quadrado).

Uma força é medida, portanto, pela aceleração que produz. Entretanto, a aceleração é uma grandeza vetorial, pois possui um módulo e uma orientação. A força também é uma grandeza vetorial? Podemos facilmente atribuir uma orientação a uma força (basta atribuir-lhe a orientação da aceleração), mas isso não é suficiente. Devemos provar experimentalmente que as forças são grandezas vetoriais. Na realidade, isso foi feito há muito tempo. As forças são realmente grandezas vetoriais: possuem um módulo e uma orientação e se combinam de acordo com as regras vetoriais do Capítulo 3.

Isso significa que, quando duas ou mais forças atuam sobre um corpo, podemos calcular a **força total**, ou **força resultante**, somando vetorialmente as forças. Uma única força com o módulo e a orientação da força resultante tem o mesmo efeito sobre um corpo que todas as forças agindo simultaneamente. Este fato é chamado de **princípio de superposição para forças**. O mundo seria muito estranho se, por exemplo, você e outra pessoa puxassem o corpo-padrão na mesma orientação, cada um com uma força de 1 N, e a força resultante fosse 14 N.

Neste livro, as forças são quase sempre representadas por um símbolo como $\vec{F}$ e as força resultantes por um símbolo como $\vec{F}_{res}$. Assim como acontece com outros vetores, uma força ou uma força resultante pode ter componentes em relação a um

sistema de coordenadas. Quando as forças atuam apenas em uma direção, possuem apenas uma componente. Nesse caso, podemos dispensar a seta sobre os símbolos das forças e usar apenas sinais para indicar o sentido das forças ao longo do único eixo.

Um enunciado mais rigoroso da Primeira Lei de Newton da Seção 5-3, baseado na ideia de força resultante, é o seguinte:

Primeira Lei de Newton Se nenhuma força *resultante* atua sobre um corpo ($\vec{F}_{res} = 0$), a velocidade não pode mudar, ou seja, o corpo não pode sofrer uma aceleração.

Isso significa que mesmo que um corpo esteja submetido a várias forças, se a resultante dessas forças for zero, o corpo não sofrerá uma aceleração.

Referenciais Inerciais

A primeira lei de Newton não se aplica a todos os referenciais, mas podemos sempre encontrar referenciais nos quais essa lei (na verdade, toda a mecânica newtoniana) é verdadeira. Esses referenciais são chamados de **referenciais inerciais**.

Referencial inercial é um referencial para o qual as leis de Newton são válidas.

Por exemplo: podemos supor que o solo é um referencial inercial, desde que possamos desprezar os movimentos astronômicos da Terra (como a rotação e a translação).

Esta hipótese é válida se, digamos, fazemos deslizar um disco metálico em uma pista *curta* de gelo (supondo que a resistência que o gelo oferece ao movimento seja tão pequena que pode ser desprezada); descobrimos que o movimento do disco obedece às leis de Newton. Suponha, porém, que o disco deslize sobre uma *longa* pista de gelo a partir do polo norte (Fig. 5-2*a*). Se observamos o disco a partir de um referencial estacionário no espaço, constataremos que o disco se move para o sul ao longo de uma trajetória retilínea, já que a rotação da Terra em torno do polo norte simplesmente faz o gelo escorregar por baixo do disco. Entretanto, se observamos o disco de um ponto do solo, que acompanha a rotação da Terra, a trajetória do disco não é uma reta. Como a velocidade do solo sob o disco, dirigida para leste, aumenta com a distância entre o disco e o polo, do nosso ponto de observação fixo no solo o disco parece sofrer um desvio para oeste (Fig. 5-2*b*). Essa deflexão aparente não é causada por uma força, como exigem as leis de Newton, mas pelo fato de que observamos o disco a partir de um referencial em rotação. Nessa situação, o solo é um **referencial não inercial**.

Neste livro, supomos quase sempre que o solo é um referencial inercial e que as forças e acelerações são medidas neste referencial. Quando as medidas são executadas em um referencial não inercial, como, por exemplo, um elevador acelerado em relação ao solo, os resultados podem ser surpreendentes.

N
W E
S
(*a*) (*b*)
A rotação da Terra causa um desvio aparente.

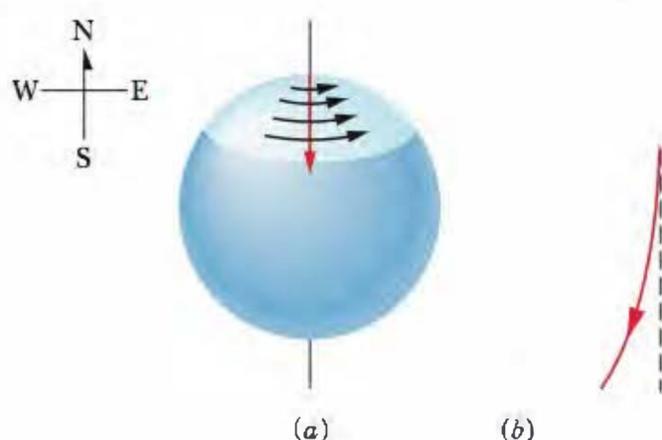
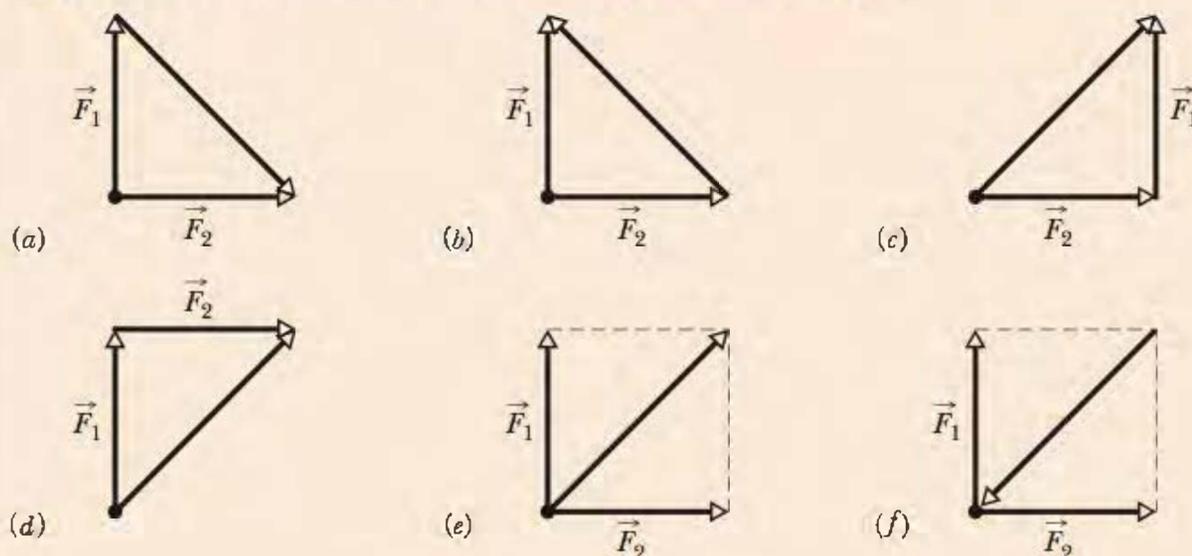



Figura 5-2 (*a*) A trajetória de um disco que escorrega a partir do polo norte, do ponto de vista de um observador estacionário no espaço. A Terra gira para leste. (*b*) A trajetória do disco do ponto de vista de um observador no solo.

TESTE 1

Quais dos seis arranjos da figura mostram corretamente a soma vetorial das forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ para obter um terceiro vetor, que representa a força resultante $\vec{F}_{res}$?

5-5 Massa

A experiência nos diz que uma dada força produz acelerações de módulos diferentes em corpos diferentes. Coloque no chão uma bola de futebol e uma bola de boliche e chute as duas. Mesmo que você não faça isso de verdade, sabe qual será o resultado: a bola de futebol receberá uma aceleração muito maior que a bola de boliche. As duas acelerações são diferentes porque a massa da bola de futebol é diferente da massa da bola de boliche; mas o que, exatamente, é a massa?

Podemos explicar como medir a massa imaginando uma série de experimentos em um referencial inercial. No primeiro experimento, exercemos uma força sobre um corpo padrão, cuja massa m_0 é definida com 1,0 kg. Suponha que o corpo padrão sofra uma aceleração de 1,0 m/s^2. Podemos dizer então que a força que atua sobre esse corpo é 1,0 N.

Em seguida, aplicamos a mesma força (precisaríamos nos certificar, de alguma forma, de que a força é a mesma) a um segundo corpo, o corpo X, cuja massa não é conhecida. Suponha que descobrimos que esse corpo sofre uma aceleração de 0,25 m/s^2. Sabemos que uma bola de futebol, que possui uma *massa menor*, adquire uma *aceleração maior* que uma bola de boliche, quando a mesma força (chute) é aplicada a ambas. Vamos fazer a seguinte conjectura: a razão entre as massas de dois corpos é igual ao inverso da razão entre as acelerações que adquirem quando são submetidos à mesma força. Para o corpo X e o corpo padrão, isso significa que

$$\frac{m_X}{m_0} = \frac{a_0}{a_X}.$$

Explicitando m_X, obtemos

$$m_X = m_0 \frac{a_0}{a_X} = (1{,}0\ \text{kg}) \frac{1{,}0\ \text{m/s}^2}{0{,}25\ \text{m/s}^2} = 4{,}0\ \text{kg}.$$

Nossa conjectura será útil, evidentemente, apenas se continuar a ser válida quando a força aplicada assumir outros valores. Por exemplo: quando aplicamos uma força de 8,0 N a um corpo padrão, obtemos uma aceleração de 8,0 m/s^2. Quando a força de 8,0 N é aplicada ao corpo X, obtemos uma aceleração de 2,0 m/s^2. Nossa conjectura nos dá, portanto,

$$m_X = m_0 \frac{a_0}{a_X} = (1{,}0\ \text{kg}) \frac{8{,}0\ \text{m/s}^2}{2{,}0\ \text{m/s}^2} = 4{,}0\ \text{kg},$$

o que é compatível com o primeiro experimento. Muitos experimentos que forne-

cem resultados semelhantes indicam que nossa conjectura é uma forma confiável de atribuir uma massa a um dado corpo.

Nossos experimentos indicam que massa é uma propriedade *intrínseca* de um corpo, ou seja, uma característica que resulta automaticamente da existência do corpo. Indicam também que a massa é uma grandeza escalar. Contudo, uma pergunta intrigante permanece sem resposta: o que, exatamente, é massa?

Como a palavra *massa* é usada na vida cotidiana, devemos ter uma noção intuitiva de massa, talvez algo que podemos sentir fisicamente. Seria o tamanho, o peso ou a densidade do corpo? A resposta é negativa, embora algumas vezes essas características sejam confundidas com a massa. Podemos apenas dizer que *a massa de um corpo é a propriedade que relaciona uma força que age sobre o corpo à aceleração resultante.* A massa não tem uma definição mais coloquial; você pode ter uma sensação física da massa apenas quando tenta acelerar um corpo, como ao chutar uma bola de futebol ou uma bola de boliche.

5-6 A Segunda Lei de Newton

Todas as definições, experimentos e observações que discutimos até aqui podem ser resumidos em uma única sentença:

Segunda Lei de Newton A força resultante que age sobre um corpo é igual ao produto da massa do corpo pela aceleração.

Em termos matemáticos,

$$\vec{F}_{res} = m\vec{a} \quad \text{(segunda lei de Newton).} \tag{5-1}$$

Esta equação é simples, mas devemos usá-la com cautela. Primeiro, devemos escolher o corpo ao qual vamos aplicá-la; $\vec{F}_{res}$ deve ser a soma vetorial de *todas* as forças que atuam sobre *esse* corpo. Apenas as forças que atuam sobre *esse* corpo devem ser incluídas na soma vetorial, não as forças que agem sobre outros corpos envolvidos na mesma situação. Por exemplo: se você disputa a bola com vários adversários em um jogo de futebol, a força resultante que age sobre *você* é a soma vetorial de todos os empurrões e puxões que *você* recebe. Ela não inclui um empurrão ou puxão que você dá em outro jogador. Toda vez que resolvemos um problema que envolve forças, o primeiro passo é definir claramente a que corpo vamos aplicar a segunda lei de Newton.

Como outras equações vetoriais, a Eq. 5-1 é equivalente a três equações para as componentes, uma para cada eixo de um sistema de coordenadas *xyz*:

$$F_{res,x} = ma_x, \quad F_{res,y} = ma_y, \quad \text{e} \quad F_{res,z} = ma_z. \tag{5-2}$$

Cada uma dessas equações relaciona a componente da força resultante em relação a um eixo à aceleração ao longo do mesmo eixo. Por exemplo: a primeira equação nos diz que a soma de todas as componentes das forças em relação ao eixo x produz a componente a_x da aceleração do corpo, mas não produz uma aceleração nas direções y e z. Sendo assim, a componente a_x da aceleração é causada apenas pelas componentes das forças em relação ao eixo x. Generalizando,

A componente da aceleração em relação a um dado eixo é causada *apenas* pela soma das componentes das forças em relação a *esse* eixo e não por componentes de forças em relação a qualquer outro eixo.

A Equação 5-1 nos diz que se a força resultante que age sobre um corpo é nula, a aceleração do corpo $\vec{a} = 0$. Se o corpo está em repouso, permanece em repouso;

se está em movimento, continua a se mover com velocidade constante. Em tais casos, as forças que agem sobre o corpo se *compensam* e dizemos que o corpo está em *equilíbrio*. Frequentemente, dizemos que as forças se *cancelam*, mas o termo "cancelar" pode ser mal interpretado. Ele *não* significa que as forças deixaram de existir (cancelar forças não é como cancelar uma reserva em um restaurante). As forças continuam a agir sobre o corpo.

Em unidades do SI, a Eq. 5-1 nos diz que

$$1\ \text{N} = (1\ \text{kg})(1\ \text{m/s}^2) = 1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2. \tag{5-3}$$

Algumas unidades de força em outros sistemas de unidades aparecem na Tabela 5-1 e no Apêndice D.

Tabela 5-1

Unidades da Segunda Lei de Newton (Eqs. 5-1 e 5-2)

Sistema	Força	Massa	Aceleração
SI	newton (N)	quilograma (kg)	m/s^2
CGS[a]	dina	grama (g)	cm/s^2
Britânico[b]	libra (lb)	slug	ft/s^2

[a] 1 dina = $1\ g\cdot cm/s^2$.
[b] 1 libra = $1\ slug\cdot ft/s^2$.

Muitas vezes, para resolver problemas que envolvem a segunda lei de Newton, desenhamos um **diagrama de corpo livre** no qual o único corpo mostrado é aquele para o qual estamos somando as forças. Um esboço do próprio corpo é preferido por alguns professores, mas, para poupar espaço nestes capítulos, representaremos quase sempre o corpo por um ponto. Além disso, as forças que agem sobre o corpo serão representadas por setas com a origem no ponto. Um sistema de coordenadas é normalmente incluído e a aceleração do corpo é algumas vezes mostrada através de outra seta (acompanhada por um símbolo adequado para mostrar que se trata de uma aceleração).

Um **sistema** é formado por um ou mais corpos; qualquer força exercida sobre os corpos do sistema por corpos que não pertencem ao sistema é chamada de **força externa**. Se os corpos de um sistema estão rigidamente ligados uns aos outros, podemos tratar o sistema como um único corpo e a força resultante $\vec{F}_{res}$ a que está submetido esse corpo é a soma vetorial das forças externas. (Não incluímos as **forças internas**, ou seja, as forças entre dois corpos pertencentes ao sistema.) Assim, por exemplo, uma locomotiva e um vagão formam um sistema. Se, digamos, um reboque puxa a locomotiva, a força exercida pelo reboque age sobre o sistema locomotiva–vagão. Como acontece no caso de um só corpo, podemos relacionar a força resultante externa que age sobre um sistema à aceleração do sistema através da segunda lei de Newton, $\vec{F}_{res} = m\vec{a}$, onde m é a massa total do sistema.

TESTE 2

A figura mostra duas forças horizontais atuando em um bloco apoiado em um piso sem atrito. Se uma terceira força horizontal $\vec{F}_3$ também age sobre o bloco, determine o módulo e a orientação de $\vec{F}_3$ se o bloco está (a) em repouso e (b) se movendo para a esquerda com uma velocidade constante de 5 m/s.

Exemplo

Forças alinhadas: disco metálico

Nas partes A, B e C da Fig. 5-3, uma ou duas forças agem sobre um disco metálico que se move sobre o gelo sem atrito ao longo do eixo x, em um movimento unidimensional. A massa do disco é $m = 0{,}20$ kg. As forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ atuam ao longo do eixo x e têm módulos $F_1 = 4{,}0$ N e $F_2 = 2{,}0$ N. A força $\vec{F}_3$ faz um ângulo $\theta = 30°$ com o eixo x e tem um módulo $F_3 = 1{,}0$ N. Qual é a aceleração do disco em cada situação?

IDEIA-CHAVE

Em todas as situações, podemos relacionar a aceleração $\vec{a}$ à força resultante $\vec{F}_{res}$ que age sobre o disco através da segunda lei de Newton, $\vec{F}_{res} = m\vec{a}$. Entretanto, como o movimento ocorre apenas ao longo do eixo x, podemos simplificar as situações escrevendo a segunda lei apenas para as componentes x:

$$F_{res,x} = ma_x. \qquad (5\text{-}4)$$

A

A força horizontal produz uma aceleração horizontal.

(a)

Este é um diagrama de corpo livre.

(b)

B

Estas duas forças se opõem; a força resultante produz uma aceleração horizontal.

(c)

Este é um diagrama de corpo livre.

(d)

C

Apenas a componente horizontal de $\vec{F}_3$ se opõe a $\vec{F}_2$.

(e)

Este é um diagrama de corpo livre.

(f)

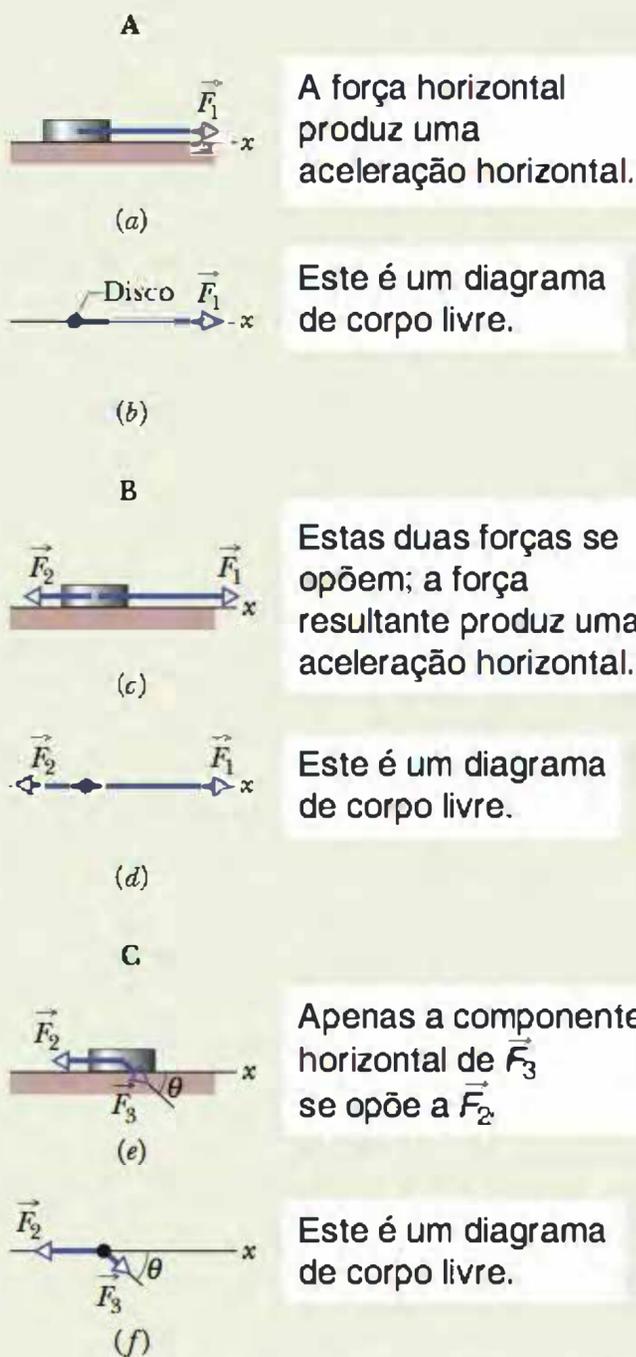



Figura 5-3 Em três situações, forças atuam sobre um disco que se move ao longo do eixo x. A figura mostra também diagramas de corpo livre.

Os diagramas de corpo livre para as três situações são também mostrados na Fig. 5-3, com o disco representado por um ponto.

Situação A Para a situação da Fig. 5-3*b*, em que existe apenas uma força horizontal, temos, de acordo com a Eq. 5-4,

$$F_1 = ma_x,$$

o que, para os dados do problema, nos dá

$$a_x = \frac{F_1}{m} = \frac{4{,}0\text{ N}}{0{,}20\text{ kg}} = 20\text{ m/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

A resposta positiva indica que a aceleração ocorre no sentido positivo do eixo x.

Situação B Na Fig. 5-3*d*, duas forças horizontais agem sobre o disco: $\vec{F}_1$, no sentido positivo do eixo x, e $\vec{F}_2$, no sentido negativo. De acordo com a Eq. 5-4,

$$F_1 - F_2 = ma_x,$$

o que, para os dados do problema, nos dá

$$a_x = \frac{F_1 - F_2}{m} = \frac{4{,}0\text{ N} - 2{,}0\text{ N}}{0{,}20\text{ kg}} = 10\text{ m/s}^2.$$

(Resposta)

Assim, a força resultante acelera o disco no sentido positivo do eixo x.

Situação C Na Fig. 5-3*f*, não é a força $\vec{F}_3$ que tem a direção da aceleração do disco, mas sim a componente $F_{3,x}$. (A força $\vec{F}_3$ não está alinhada com a força $\vec{F}_2$ nem com a direção do movimento*.) Assim, a Eq. 5-4 assume a forma

$$F_{3,x} - F_2 = ma_x. \qquad (5\text{-}5)$$

De acordo com a figura, $F_{3,x} = F_3 \cos\theta$. Explicitando a aceleração e substituindo $F_{3,x}$ por seu valor, temos:

$$a_x = \frac{F_{3,x} - F_2}{m} = \frac{F_3\cos\theta - F_2}{m}$$

$$= \frac{(1{,}0\text{ N})(\cos 30°) - 2{,}0\text{ N}}{0{,}20\text{ kg}} = -5{,}7\text{ m/s}^2.$$

(Resposta)

Assim, a força resultante acelera o disco no sentido negativo do eixo x.

* O disco não é acelerado na direção y porque a componente y da força $\vec{F}_3$ é equilibrada pela força normal, que será discutida na Seção 5-7. (N.T.)

Exemplo

Forças não alinhadas: lata de biscoitos

Na vista superior da Fig. 5-4*a*, uma lata de biscoitos de 2,0 kg é acelerada a $3{,}0\ m/s^2$, na orientação definida por $\vec{a}$, em uma superfície horizontal sem atrito. A aceleração é causada por três forças horizontais, das quais apenas duas são mostradas: $\vec{F}_1$, de módulo 10 N, e $\vec{F}_2$, de módulo 20 N. Qual é a terceira força, $\vec{F}_3$, em termos dos vetores unitários e na notação módulo–ângulo?

IDEIA-CHAVE

A força resultante $\vec{F}_{res}$ que age sobre a lata é a soma das três forças e está relacionada à aceleração $\vec{a}$ pela segunda lei de Newton ($\vec{F}_{res} = m\vec{a}$), Assim,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = m\vec{a}, \tag{5-6}$$

o que nos dá

$$\vec{F}_3 = m\vec{a} - \vec{F}_1 - \vec{F}_2. \tag{5-7}$$

Cálculos Como as forças não estão alinhadas, *não podemos* determinar $\vec{F}_3$ simplesmente substituindo os módulos das forças no lado direito da Eq. 5-7. O correto é somar vetorialmente $m\vec{a}$, $-\vec{F}_1$ e $-\vec{F}_2$, como mostra a Fig. 5-4*b*. A soma poderia ser feita com o auxílio de uma calculadora, já que conhecemos tanto o módulo como o ângulo dos três vetores. Entretanto, optamos por calcular o lado direito da Eq. 5-7 em termos das componentes, primeiro para o eixo *x* e depois para o eixo *y*.

Componentes x Para o eixo *x*, temos:

$$\begin{aligned} F_{3,x} &= ma_x - F_{1,x} - F_{2,x} \\ &= m(a\cos 50^\circ) - F_1\cos(-150^\circ) - F_2\cos 90^\circ. \end{aligned}$$

Substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$\begin{aligned} F_{3,x} &= (2{,}0\ \text{kg})(3{,}0\ \text{m/s}^2)\cos 50^\circ - (10\ \text{N})\cos(-150^\circ) \\ &\quad - (20\ \text{N})\cos 90^\circ \\ &= 12{,}5\ \text{N}. \end{aligned}$$

Componentes y Para o eixo *y*, temos:

$$\begin{aligned} F_{3,y} &= ma_y - F_{1,y} - F_{2,y} \\ &= m(a\,\text{sen}\,50^\circ) - F_1\,\text{sen}(-150^\circ) - F_2\,\text{sen}\,90^\circ \\ &= (2{,}0\ \text{kg})(3{,}0\ \text{m/s}^2)\,\text{sen}\,50^\circ - (10\ \text{N})\,\text{sen}(-150^\circ) \\ &\quad - (20\ \text{N})\,\text{sen}\,90^\circ \\ &= -10{,}4\ \text{N}. \end{aligned}$$

Vetor Em termos dos vetores unitários, temos:

$$\begin{aligned} \vec{F}_3 &= F_{3,x}\hat{\text{i}} + F_{3,y}\hat{\text{j}} = (12{,}5\ \text{N})\hat{\text{i}} - (10{,}4\ \text{N})\hat{\text{j}} \\ &\approx (13\ \text{N})\hat{\text{i}} - (10\ \text{N})\hat{\text{j}}. \end{aligned} \qquad \text{(Resposta)}$$

Podemos agora usar uma calculadora para determinar o módulo e o ângulo de $\vec{F}_3$. Também podemos usar a Eq. 3-6 para obter o módulo e o ângulo (em relação ao semieixo *x* positivo):

$$F_3 = \sqrt{F_{3,x}^2 + F_{3,y}^2} = 16\ \text{N}$$

e

$$\theta = \tan^{-1}\frac{F_{3,y}}{F_{3,x}} = -40^\circ. \qquad \text{(Resposta)}$$

Estes são os vetores que representam duas das três forças horizontais envolvidas.

Este é o vetor que representa a aceleração produzida pela força resultante.

Desenhamos o produto da massa pela aceleração como um vetor.

Podemos então somar os três vetores para obter o vetor que representa a terceira força.

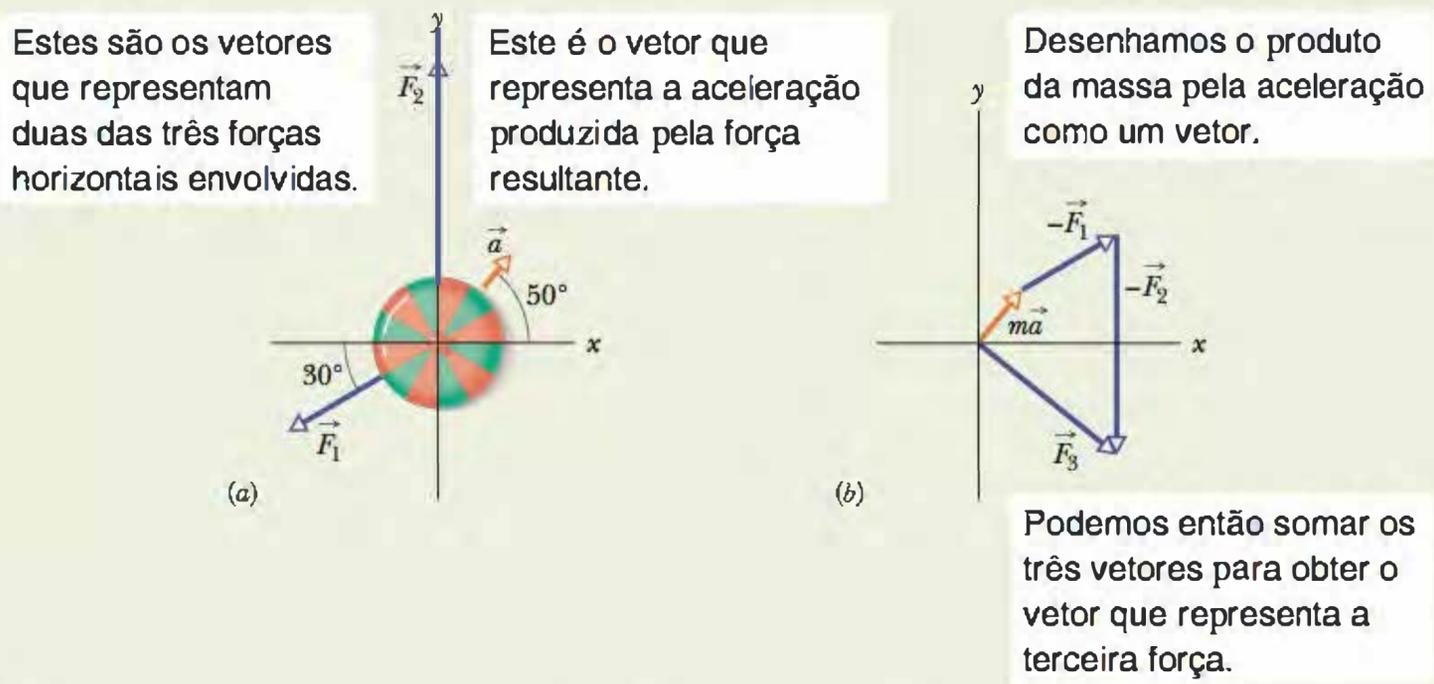



Figura 5-4 (*a*) Vista superior de duas das três forças que agem sobre uma lata de biscoitos, produzindo uma aceleração $\vec{a}$. $\vec{F}_3$ não é mostrada. (*b*) Um arranjo de vetores $m\vec{a}$, $-\vec{F}_1$ e $-\vec{F}_2$ para determinar a força $\vec{F}_3$.

5-7 Algumas Forças Especiais

Força Gravitacional

A **força gravitacional** $\vec{F}_g$ exercida sobre um corpo é um tipo especial de atração que um segundo corpo exerce sobre o primeiro. Nestes capítulos iniciais, não discutimos a natureza dessa força e consideramos apenas situações nas quais o segundo corpo é a Terra. Assim, quando falamos da força gravitacional $\vec{F}_g$ que age sobre um corpo, estamos nos referindo à força que o atrai na direção do centro da Terra, ou seja, verticalmente para baixo. Vamos supor que o solo é um referencial inercial.

Considere um corpo de massa m em queda livre, submetido, portanto, a uma aceleração de módulo g. Nesse caso, se desprezarmos os efeitos do ar, a única força que age sobre o corpo é a força gravitacional $\vec{F}_g$. Podemos relacionar essa força à aceleração correspondente através da segunda lei de Newton, $\vec{F}_{res} = m\vec{a}$. Colocamos um eixo y vertical ao longo da trajetória do corpo, com o sentido positivo para cima. Para este eixo, a segunda lei de Newton pode ser escrita na forma $F_{res,y} = ma_y$, que, em nossa situação, se torna

$$-F_g = m(-g)$$

ou

$$F_g = mg. \tag{5-8}$$

Em palavras, o módulo da força gravitacional é igual ao produto mg.

Esta mesma força gravitacional, com o mesmo módulo, atua sobre o corpo mesmo quando não está em queda livre, mas se encontra, por exemplo, em repouso sobre uma mesa de sinuca ou movendo-se sobre a mesa. (Para que a força gravitacional desaparecesse, a Terra teria que desaparecer.)

Podemos escrever a segunda lei de Newton para a força gravitacional nas seguintes formas vetoriais:

$$\vec{F}_g = -F_g\hat{j} = -mg\hat{j} = m\vec{g}, \tag{5-9}$$

onde $\hat{j}$ é o vetor unitário que aponta para cima ao longo do eixo y, perpendicularmente ao solo, e $\vec{g}$ é a aceleração de queda livre (escrita como um vetor), dirigida para baixo.

Peso

O **peso** P de um corpo é o módulo da força necessária para impedir que o corpo caia livremente, medida em relação ao solo. Assim, por exemplo, para manter uma bola em repouso em sua mão enquanto você está parado de pé, você deve aplicar uma força para cima para equilibrar a força gravitacional que a Terra exerce sobre a bola. Suponha que o módulo da força gravitacional é 2,0 N. Nesse caso, o módulo da força para cima deve ser 2,0 N e, portanto, o *peso* P da bola é 2,0 N. Também dizemos que a bola *pesa* 2,0 N.

Uma bola com um peso de 3,0 N exigiria uma força maior (3,0 N) para permanecer em equilíbrio. A razão é que a força gravitacional a ser equilibrada tem um módulo maior (3,0 N). Dizemos que esta segunda bola é *mais pesada* que a primeira.

Vamos generalizar a situação. Considere um corpo que tem uma aceleração $\vec{a}$ nula em relação ao solo, considerado mais uma vez como referencial inercial. Duas forças atuam sobre o corpo: uma força gravitacional $\vec{F}_g$, dirigida para baixo, e uma força para cima, de módulo P, que a equilibra. Podemos escrever a segunda lei de Newton para um eixo y vertical, com o sentido positivo para cima, na forma

$$F_{res,y} = ma_y.$$

Em nossa situação, esta equação se torna

$$P - F_g = m(0) \tag{5-10}$$

ou $$P = F_g \quad \text{(peso, com o solo como referencial inercial).} \tag{5-11}$$

De acordo com a Eq. 5-11 (supondo que o solo é um referencial inercial),

> O peso P de um corpo é igual ao módulo F_g da força gravitacional que age sobre o corpo.

Substituindo F_g por mg, obtemos a equação

$$P = mg \quad \text{(peso).} \tag{5-12}$$

que relaciona o peso à massa do corpo.

Pesar um corpo significa medir o peso do corpo. Uma forma de fazer isso é colocar o corpo em um dos pratos de uma balança de braços iguais (Fig. 5-5) e colocar corpos de referência (cujas massas sejam conhecidas) no outro prato até que se estabeleça o equilíbrio, ou seja, até que as forças gravitacionais dos dois lados sejam iguais. Como, nessa situação, as massas nos dois pratos são iguais, ficamos conhecendo a massa do corpo. Se conhecemos o valor de g no local onde está situada a balança, também podemos calcular o peso do corpo com o auxílio da Eq. 5-12.

Também podemos pesar um corpo em uma balança de mola (Fig. 5-6). O corpo distende uma mola, movendo um ponteiro ao longo de uma escala que foi calibrada e marcada em unidades de massa ou de força. (Quase todas as balanças de banheiro são deste tipo.) Se a escala estiver em unidades de massa, fornecerá valores precisos apenas nos lugares onde o valor de g for o mesmo da localidade onde a balança foi calibrada.

Para que o peso de um corpo seja medido corretamente, não deve possuir uma aceleração *vertical*. Assim, por exemplo, se você se pesar no banheiro de casa ou a bordo de um trem em movimento, o resultado será o mesmo. Caso, porém, repita a medição em um elevador acelerado, obterá uma leitura diferente por causa da aceleração. Um peso medido desta forma é chamado de *peso aparente*.

Atenção: o peso de um corpo não é a mesma coisa que a massa. O peso é o módulo de uma força e está relacionado à massa através da Eq. 5-12. Se você mover um corpo para um local onde o valor de g é diferente, a massa do corpo (uma propriedade intrínseca) continuará a mesma, mas o peso mudará. Por exemplo: o peso de uma bola de boliche de massa igual a 7,2 kg é 71 N na Terra, mas apenas 12 N na Lua. Isso se deve ao fato de que, enquanto a massa é a mesma na Terra e na Lua, a aceleração de queda livre na Lua é apenas 1,6 m/s^2, muito menor, portanto, que a aceleração de queda livre na Terra, que é da ordem de 9,8 m/s^2.

Figura 5-5 Uma balança de braços iguais. Quando a balança está equilibrada, a força gravitacional $\vec{F}_{gE}$ a que está submetido o corpo que se deseja pesar (no prato da esquerda) e a força gravitacional total $\vec{F}_{gD}$ a que estão submetidas as massas de referência (no prato da direita) são iguais. Assim, a massa m_E do corpo que está sendo pesado é igual à massa total m_D das massas de referência.

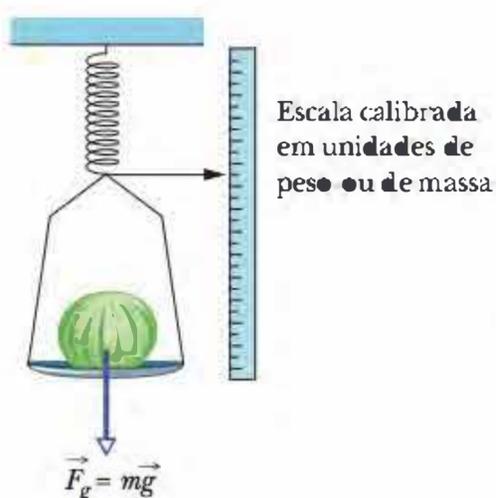



Figura 5-6 Uma balança de mola. A leitura é proporcional ao *peso* do objeto colocado no prato e a escala fornece o valor do peso se estiver calibrada em unidades de força. Se, em vez disso, estiver calibrada em unidades de massa, a leitura será igual ao peso do objeto apenas se o valor de g no lugar onde a balança está sendo usada for igual ao valor de g no lugar onde a balança foi calibrada.

Força Normal

Se você fica em pé em colchão, a Terra o puxa para baixo, mas você permanece em repouso. Isso acontece porque o colchão se deforma sob o seu peso e empurra você para cima. Da mesma forma, se você está sobre um piso, ele se deforma (ainda que imperceptivelmente) e o empurra para cima. Mesmo um piso de concreto aparentemente rígido faz o mesmo (se não estiver apoiado diretamente no solo, um número suficientemente grande de pessoas sobre o mesmo pode quebrá-lo).

O empurrão exercido pelo colchão ou pelo piso é uma **força normal** $\vec{F}_N$. O nome vem do termo matemático *normal*, que significa perpendicular. A força que o piso exerce sobre você é perpendicular ao piso.

> Quando um corpo exerce uma força sobre uma superfície, a superfície (ainda que aparentemente rígida) se deforma e empurra o corpo com uma força normal $\vec{F}_N$ que é perpendicular à superfície.

A Figura 5-7*a* mostra um exemplo. Um bloco de massa m pressiona uma mesa para baixo, deformando-a por causa da força gravitacional $\vec{F}_g$ a que o bloco está sujei-

A força normal é a força que a mesa exerce sobre o bloco.

A força gravitacional é a força que a Terra exerce sobre o bloco.

As forças se cancelam.

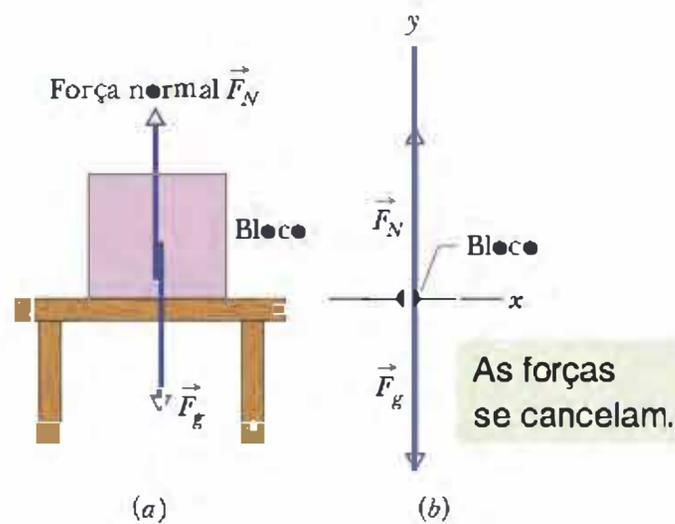



Figura 5-7 (*a*) Um bloco que repousa sobre uma mesa experimenta uma força normal $\vec{F}_N$ perpendicular à superfície da mesa. (*b*) Diagrama de corpo livre do bloco.

to. A mesa empurra o bloco para cima com uma força normal $\vec{F}_N$. A Fig. 5-7*b* mostra o diagrama de corpo livre do bloco. As forças $\vec{F}_g$ e $\vec{F}_N$ são as únicas forças que atuam sobre o bloco e ambas são verticais. Assim, a segunda lei de Newton para o bloco, tomando um eixo *y* com o sentido positivo para cima ($F_{res,y} = ma_y$), assume a forma

$$F_N - F_g = ma_y.$$

Substituindo F_g por mg (Eq. 5-8), obtemos

$$F_N - mg = ma_y.$$

O módulo da força normal é, portanto,

$$F_N = mg + ma_y = m(g + a_y) \qquad (5\text{-}13)$$

para qualquer aceleração vertical a_y da mesa e do bloco (que poderiam estar, por exemplo, em um elevador acelerado). Se a mesa e o bloco não estão acelerados em relação ao solo, $a_y = 0$ e a Eq. 5-13 nos dá

$$F_N = mg. \qquad (5\text{-}14)$$

TESTE 3

Na Fig. 5-7, o módulo da força normal $\vec{F}_N$ é maior, menor ou igual a mg se o bloco e a mesa estão em um elevador que se move para cima (a) com velocidade constante; (b) com velocidade crescente?

Atrito

Quando empurramos ou tentamos empurrar um corpo sobre uma superfície, a interação dos átomos do corpo com os átomos da superfície faz com que haja uma resistência ao movimento. (Essa interação será discutida no próximo capítulo.) A resistência é considerada como uma única força $\vec{f}$, que recebe o nome de **força de atrito** ou simplesmente **atrito**. Essa força é paralela à superfície e aponta no sentido oposto ao do movimento ou tendência ao movimento (Fig. 5-8). Em algumas situações, para simplificar os cálculos, desprezamos as forças de atrito.

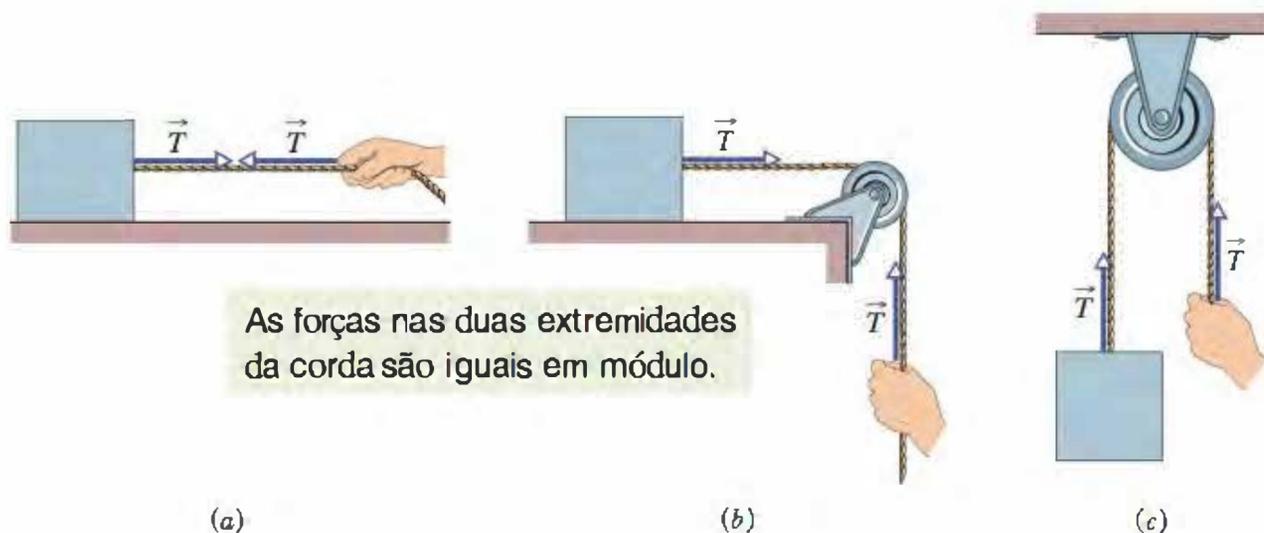
Direção do movimento

Figura 5-8 Uma força de atrito $\vec{f}$ se opõe ao movimento de um corpo sobre uma superfície.

Tração

Quando uma corda (ou um fio, cabo ou outro objeto do mesmo tipo) é presa a um corpo e esticada, aplica ao corpo uma força $\vec{T}$ orientada ao longo da corda (Fig. 5-9*a*). Essa força é chamada de *força de tração* porque a corda está sendo tracionada (puxada). A *tensão da corda* é o módulo T da força exercida sobre o corpo. Assim, por exemplo, se a força exercida pela corda sobre o corpo tem um módulo T = 50 N, a tensão da corda é 50 N.

Uma corda é frequentemente considerada *sem massa* (o que significa que a massa da corda é desprezível em comparação com a massa do corpo ao qual está presa) e

Figura 5-9 (*a*) A corda esticada está sob tensão. Se a massa da corda é desprezível, a corda puxa o corpo e a mão com uma força $\vec{T}$, mesmo que passe por uma polia sem massa e sem atrito, como em (*b*) e (*c*).

inextensível (o que significa que o comprimento da corda não muda quando é submetida a uma força de tração). Nessas circunstâncias, a corda existe apenas como uma ligação entre dois corpos: exerce sobre os dois corpos forças de mesmo módulo T, mesmo que os dois corpos e a corda estejam acelerando e mesmo que a corda passe por uma polia *sem massa e sem atrito* (Figs. 5-9*b* e *c*), ou seja, uma polia cuja massa é desprezível em comparação com as massas dos corpos e cujo atrito no eixo de rotação pode ser desprezado. Se a corda dá meia volta em torno da polia, como na Fig. 5-9*c*, a força resultante da corda sobre a polia é $2T$.

TESTE 4

O corpo suspenso da Fig. 5-9*c* pesa 75 N. A tensão T é igual, maior ou menor que 75 N quando o corpo se move para cima (a) com velocidade constante, (b) com velocidade crescente e (c) com velocidade decrescente?

5-8 A Terceira Lei de Newton

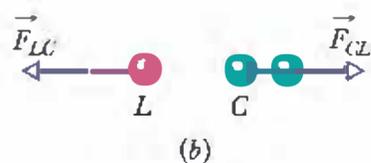
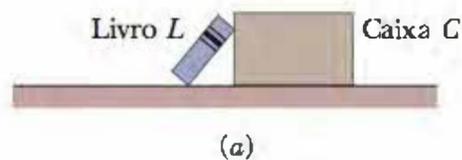
Dizemos que dois corpos *interagem* quando empurram ou puxam um ao outro, ou seja, quando cada corpo exerce uma força sobre o outro. Suponha, por exemplo, que você apoie um livro L em uma caixa C (Fig. 5-10*a*). Nesse caso, o livro e a caixa interagem: a caixa exerce uma força horizontal $\vec{F}_{LC}$ sobre o livro e o livro exerce uma força horizontal $\vec{F}_{CL}$ sobre a caixa. Este par de forças é mostrado na Fig. 5-10*b*. A terceira lei de Newton afirma o seguinte:

Terceira Lei de Newton Quando dois corpos interagem, as forças que cada corpo exerce sobre o outro são iguais em módulo e têm sentidos opostos.

Figura 5-10 (*a*) O livro L está apoiado na caixa C. (*b*) As forças $\vec{F}_{LC}$ (força da caixa sobre o livro) e $\vec{F}_{CL}$ (força do livro sobre a caixa) têm o mesmo módulo e sentidos opostos.

No caso do livro e da caixa, podemos escrever esta lei como a relação escalar

$$F_{LC} = F_{CL} \quad \text{(módulos iguais)}$$

ou como a relação vetorial

$$\vec{F}_{LC} = -\vec{F}_{CL} \quad \text{(módulos iguais e sentidos opostos)} \tag{5-15}$$

onde o sinal negativo significa que as duas forças têm sentidos opostos. Podemos chamar as forças entre dois corpos que interagem de **par de forças da terceira lei**. Sempre que dois corpos interagem, um par de forças da terceira lei está presente. O livro e a caixa da Fig. 5-10*a* estão em repouso, mas a terceira lei seria válida mesmo que estivessem em movimento uniforme ou acelerado.

Como outro exemplo, vamos examinar os pares de forças da terceira lei que existem no sistema da Fig. 5-11*a*, constituído por uma laranja, uma mesa e a Terra.

Laranja *L*

Mesa *M*

Terra *T*

(*a*)

Estas forças se cancelam.

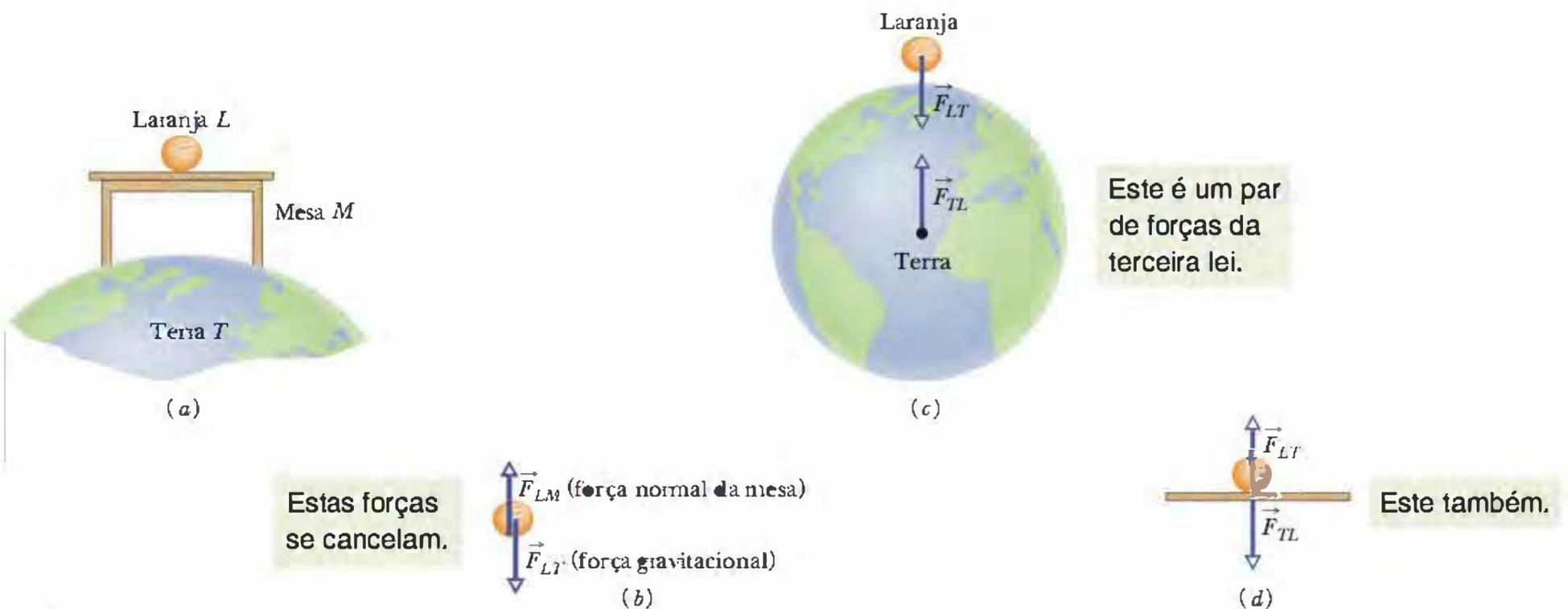
$\vec{F}_{LM}$ (força normal da mesa)

$\vec{F}_{LT}$ (força gravitacional)

(*b*)

Laranja

$\vec{F}_{LT}$

$\vec{F}_{TL}$

Terra

Este é um par de forças da terceira lei.

(*c*)

$\vec{F}_{LT}$

$\vec{F}_{TL}$

Este também.

(*d*)

Figura 5-11 (*a*) Uma laranja em repouso sobre uma mesa na superfície da Terra. (*b*) As forças que agem *sobre a laranja* são $\vec{F}_{LM}$ e $\vec{F}_{LT}$. (*c*) Par de forças da terceira lei para a interação abóbora–Terra. (*d*) Par de forças da terceira lei para a interação abóbora–mesa.

A laranja interage com a mesa e esta com a Terra (desta vez, existem três corpos cujas interações devemos estudar).

Vamos inicialmente nos concentrar nas forças que agem sobre a laranja (Fig. 5-11*b*). A força $\vec{F}_{LM}$ é a força normal que a mesa exerce sobre a laranja e a força $\vec{F}_{LT}$ é a força gravitacional que a Terra exerce sobre a laranja. $\vec{F}_{LM}$ e $\vec{F}_{LT}$ formam um par de forças da terceira lei? Não, pois são forças que atuam sobre um mesmo corpo, a laranja, e não sobre dois corpos que interagem.

Para encontrar um par da terceira lei, precisamos nos concentrar, não na laranja, mas na interação entre a laranja e outro corpo. Na interação laranja–Terra (Fig. 5-11*c*), a Terra atrai a laranja com uma força gravitacional $\vec{F}_{LT}$ e a laranja atrai a Terra com uma força gravitacional $\vec{F}_{TL}$. Essas forças formam um par de forças da terceira lei? Sim, porque as forças atuam sobre dois corpos que interagem e a força a que um está submetido é causada pelo outro. Assim, de acordo com a terceira lei de Newton,

$$\vec{F}_{LT} = -\vec{F}_{TL} \qquad \text{(interação laranja–Terra)}$$

Na interação laranja–mesa, a força da mesa sobre a laranja é $\vec{F}_{LM}$ e a força da laranja sobre a mesa é $\vec{F}_{ML}$ (Fig. 5-11*d*). Essas forças também formam um par de forças da terceira lei e, portanto,

$$\vec{F}_{LM} = -\vec{F}_{ML} \qquad \text{(interação laranja–mesa)}$$

TESTE 5

Suponha que a laranja e a mesa da Fig. 5-11 estão em um elevador que começa a acelerar para cima. (a) Os módulos de $\vec{F}_{ML}$ e $\vec{F}_{LM}$ aumentam, diminuem ou permanecem os mesmos? (b) Essas duas forças continuam a ser iguais em módulo, com sentidos opostos? (c) Os módulos de $\vec{F}_{LT}$ e $\vec{F}_{TL}$ aumentam, diminuem, ou permanecem os mesmos? (d) Essas duas forças continuam a ser iguais em módulo, com sentidos opostos?

5-9 Aplicando as Leis de Newton

O resto deste capítulo é composto por exemplos. O leitor deve examiná-los atentamente, observando os métodos usados para resolver cada problema. Especialmente importante é saber traduzir uma dada situação em um diagrama de corpo livre com eixos adequados, para que as leis de Newton possam ser aplicadas.

Exemplo

Bloco deslizante e bloco pendente

A Fig. 5-12 mostra um bloco D (o *bloco deslizante*) de massa $M = 3,3$ kg. O bloco está livre para se mover ao longo de uma superfície horizontal sem atrito e está ligado, por uma corda que passa por uma polia sem atrito, a um segundo bloco P (o *bloco pendente*), de massa $m = 2,1$ kg. As massas da corda e da polia podem ser desprezadas em comparação com a massa dos blocos. Enquanto o bloco pendente P desce, o bloco deslizante D acelera para a direita. Determine (a) a aceleração do bloco D, (b) a aceleração do bloco P e (c) a tensão na corda.

P *De que trata este problema?*

Foram dados dois corpos, o bloco deslizante e o bloco pendente, mas também é preciso levar em conta a *Terra*, que atua sobre os dois corpos. (Se não fosse a Terra, os blocos não se moveriam.) Como mostra a Fig. 5-13, cinco forças agem sobre os blocos:

1. A corda puxa o bloco D para a direita com uma força de módulo T.
2. A corda puxa o bloco P para cima com uma força cujo módulo também é T. Esta força para cima evita que o bloco caia livremente.
3. A Terra puxa o bloco D para baixo com uma força gravitacional $\vec{F}_{gD}$, cujo módulo é Mg.
4. A Terra puxa o bloco P para baixo com uma força gravitacional $\vec{F}_{gP}$, cujo módulo é mg.
5. A mesa empurra o bloco D para cima com uma força normal $\vec{F}_N$.

Existe outra coisa digna de nota. Como estamos supondo que a corda é inextensível, se o bloco P desce 1 mm em um certo intervalo de tempo, o bloco D se move 1 mm para a direita no mesmo intervalo. Isso significa que os blocos se movem em conjunto e as acelerações dos dois blocos têm o mesmo módulo a.

Bloco deslizante D
M
Superfície sem atrito
m
Bloco pendente P

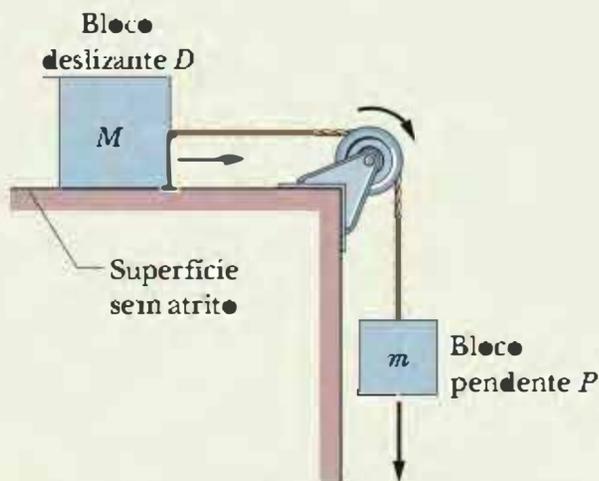



Figura 5-12 Um bloco D de massa M está conectado a um bloco P de massa m por uma corda que passa por uma polia.

$\vec{F}_N$ Bloco D
$\vec{T}$
M
$\vec{F}_{gD}$
$\vec{T}$
m Bloco P
$\vec{F}_{gP}$

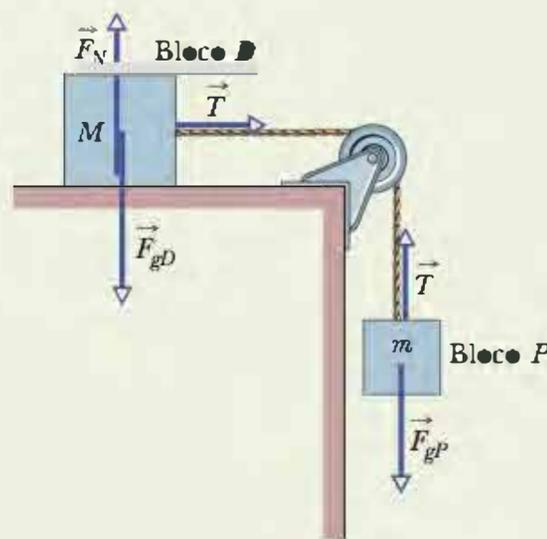



Figura 5-13 As forças que agem sobre os dois blocos da Fig. 5-12.

P *Como classificar esse problema? Ele sugere alguma lei da física em particular?*

Sim. O fato de que as grandezas envolvidas são forças, massas e acelerações sugere a segunda lei de Newton do movimento, $\vec{F}_{res} = m\vec{a}$. Essa é a nossa **ideia-chave** inicial.

P *Se eu aplicar a segunda lei de Newton a esse problema, a que corpo devo aplicá-la?*

Estamos lidando com o movimento de dois corpos, o bloco deslizante e o bloco pendente. Embora se trate de *corpos extensos* (não pontuais), podemos tratá-los como partículas porque todas as partes de cada bloco se movem exatamente da mesma forma. Uma segunda **ideia-chave** é aplicar a segunda lei de Newton separadamente a cada bloco.

P *E a polia?*

A polia não pode ser tratada como uma partícula porque diferentes partes da polia se movem de modo diferente. Quando discutirmos as rotações, examinaremos com detalhes o caso das polias. No momento, evitamos discutir o comportamento da polia supondo que sua massa pode ser desprezada em comparação com as massas dos dois blocos; a única função da polia é mudar a orientação da corda.

P *Está certo, mas como vou aplicar a equação $\vec{F}_{res} = m\vec{a}$ ao bloco deslizante?*

Represente o bloco D como uma partícula de massa M e desenhe todas as forças que atuam *sobre* ele, como na Fig. 5-14*a*. Este é o diagrama de corpo livre do bloco. Em seguida, desenhe um conjunto de eixos. O mais natural é desenhar o eixo x paralelo à mesa, apontando para a direita, no sentido do movimento do bloco D.

P *Obrigado, mas você ainda não me disse como vou aplicar a equação $\vec{F}_{res} = m\vec{a}$ ao bloco deslizante; tudo que fez foi explicar como se desenha um diagrama de corpo livre.*

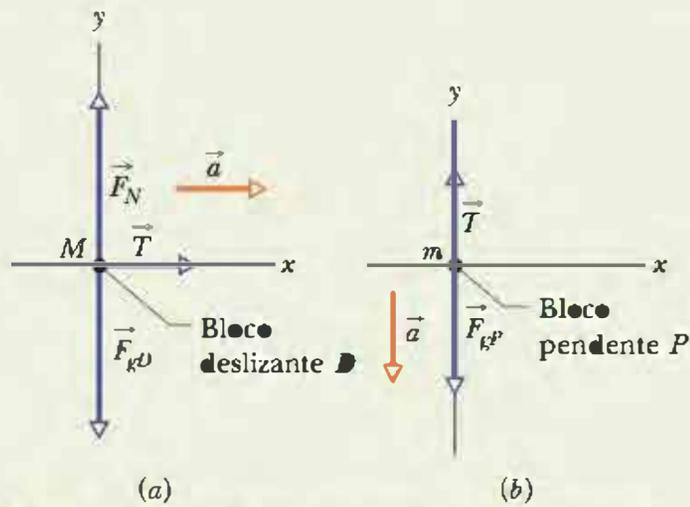



Figura 5-14 (*a*) Diagrama de corpo livre do bloco *D* da Fig. 5-12. (*b*) Diagrama de corpo livre do bloco *P* da Fig. 5-12.

Tem razão. Aqui está a terceira **ideia-chave**: a equação $\vec{F}_{res} = M\vec{a}$ é uma equação vetorial e, portanto, equivale a três equações algébricas, uma para cada componente:

$$F_{res,x} = Ma_x \quad F_{res,y} = Ma_y \quad F_{res,z} = Ma_z \qquad (5\text{-}16)$$

onde $F_{res,x}$, $F_{res,y}$ e $F_{res,z}$ são as componentes da força resultante em relação aos três eixos. Podemos aplicar cada uma dessas equações à direção correspondente. Como o bloco *D* não possui aceleração vertical, $F_{res,y} = Ma_y$ se torna

$$F_N - F_{gD} = 0 \text{ ou } F_N = F_{gD} \qquad (5\text{-}17)$$

Assim, na direção *y*, o módulo da força normal é igual ao módulo da força gravitacional.

Nenhuma força atua na direção *z*, que é perpendicular ao papel.

Na direção *x* existe apenas uma componente de força, que é *T*. Assim, a equação $F_{res,x} = Ma_x$ se torna

$$T = Ma. \qquad (5\text{-}18)$$

Como essa equação contém duas incógnitas, *T* e *a*, ainda não podemos resolvê-la. Lembre-se, porém, de que ainda não dissemos nada a respeito do bloco pendente.

P *De acordo. Como vou aplicar a equação $\vec{F}_{res} = m\vec{a}$ ao bloco pendente?*

Do mesmo modo como aplicou ao bloco *D*: desenhe um diagrama de corpo livre para o bloco *P*, como na Fig. 5-14*b*. Em seguida, aplique a equação $\vec{F}_{res} = m\vec{a}$ na forma de componentes. Desta vez, como a aceleração é ao longo do eixo *y*, use a parte *y* da Eq. 5-16 ($F_{res,y} = ma_y$) para escrever

$$T - F_{gP} = ma_y. \qquad (5\text{-}19)$$

Podemos agora substituir F_{gP} por mg e a_y por $-a$ (o valor é negativo porque o bloco *P* sofre uma aceleração no sentido negativo do eixo *y*). O resultado é

$$T - mg = -ma. \qquad (5\text{-}20)$$

Observe que as Eqs. 5-18 e 5-20 formam um sistema de duas equações com duas incógnitas, *T* e *a*. Subtraindo essas equações, eliminamos *T*. Explicitando *a*, obtemos:

$$a = \frac{m}{M + m}g. \qquad (5\text{-}21)$$

Substituindo este resultado na Eq. 5-18, temos:

$$T = \frac{Mm}{M + m}g. \qquad (5\text{-}22)$$

Substituindo os valores numéricos, temos:

$$a = \frac{m}{M + m}g = \frac{2{,}1 \text{ kg}}{3{,}3 \text{ kg} + 2{,}1 \text{ kg}}(9{,}8 \text{ m/s}^2)$$
$$= 3{,}8 \text{ m/s}^2 \qquad \text{(Resposta)}$$

e
$$T = \frac{Mm}{M + m}g = \frac{(3{,}3 \text{ kg})(2{,}1 \text{ kg})}{3{,}3 \text{ kg} + 2{,}1 \text{ kg}}(9{,}8 \text{ m/s}^2)$$
$$= 13 \text{ N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

P *O problema agora está resolvido, certo?*

Essa é uma pergunta razoável, mas o problema não pode ser considerado resolvido até que você examine os resultados para ver se fazem sentido. (Se você obtivesse esses resultados no trabalho, não faria questão de conferi-los antes de entregá-los ao chefe?)

Examine primeiro a Eq. 5-21. Observe que está dimensionalmente correta e que a aceleração *a* será sempre menor que *g*. Isto faz sentido, pois o bloco pendente não está em queda livre; a corda o puxa para cima.

Examine em seguida a Eq. 5-22, que pode ser escrita na forma

$$T = \frac{M}{M + m}mg. \qquad (5\text{-}23)$$

Nessa forma, fica mais fácil ver que esta equação também está dimensionalmente correta, já que tanto *T* quanto *mg* têm dimensões de força. A Eq. 5-23 também mostra que a tensão na corda é sempre menor que *mg* e, portanto, é sempre menor que a força gravitacional a que está submetido o bloco pendente. Isso é razoável; se *T* fosse *maior* que *mg*, o bloco pendente sofreria uma aceleração para cima.

Podemos também verificar se os resultados estão corretos estudando casos especiais para os quais sabemos de antemão qual é a resposta. Um caso simples é aquele em que $g = 0$, como se o experimento fosse realizado no espaço sideral. Sabemos que, nesse caso, os blocos ficariam imóveis, não existiriam forças nas extremidades da corda e, portanto, não haveria tensão na corda. As fórmulas preveem isso? Sim. Fazendo $g = 0$ nas Eqs. 5-21 e 5-22, encontramos $a = 0$ e $T = 0$. Dois outros casos especiais fáceis de examinar são $M = 0$ e $m \to \infty$.

Exemplo

Corda, bloco e plano inclinado

Na Fig. 5-15*a*, uma corda puxa para cima uma caixa de biscoitos ao longo de um plano inclinado sem atrito cujo ângulo é $\theta = 30°$. A massa da caixa é $m = 5{,}00$ kg e o módulo da força exercida pela corda é $T = 25{,}0$ N. Qual é a componente a da aceleração da caixa na direção do plano inclinado?

IDEIA-CHAVE

De acordo com a segunda lei de Newton (Eq. 5-1), a aceleração na direção do plano inclinado depende apenas das componentes das forças paralelas ao plano (não depende das componentes perpendiculares ao plano).

Cálculo Por conveniência, desenhamos o sistema de coordenadas e o diagrama de corpo livre da Fig. 5-15*b*. O sentido positivo do eixo x é para cima, paralelamente ao plano. A força $\vec{T}$ exercida pela corda é dirigida para cima, paralelamente ao plano, e tem um módulo $T = 25{,}0$ N. A força gravitacional $\vec{F}_g$ é vertical, para baixo, e tem um módulo $mg = (5{,}00 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2) = 49{,}0$ N. A componente dessa força paralela ao plano é dirigida para baixo e tem um módulo $mg \operatorname{sen} \theta$, como mostra a Fig. 5-15*g*. (Para compreender por que essa função trigonométrica está envolvida, observe as Figs. 5-15*c* a 5-15*h*, nas quais são estabelecidas relações entre o ângulo dado e as componentes das forças.) Para indicar o sentido, escrevemos a componente como $-mg \operatorname{sen} \theta$. A força normal $\vec{F}_N$ é perpendicular ao plano (Fig. 5-15*i*) e, portanto, não tem nenhuma influência sobre a aceleração da direção paralela ao plano.

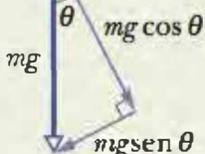
De acordo com a Fig. 5-15*h*, podemos escrever a segunda lei de Newton ($\vec{F}_{res} = m\vec{a}$) para o movimento ao longo do eixo x na forma

$$T - mg \operatorname{sen} \theta = ma. \qquad (5\text{-}24)$$

Substituindo os valores numéricos e explicitando a, obtemos

$$a = 0{,}100 \text{ m/s}^2, \qquad \text{(Resposta)}$$

onde o resultado positivo indica que a caixa se move para cima ao longo do plano.

Figura 5-15 (*a*) Uma caixa sobe um plano inclinado, puxada por uma corda. (b) As três forças que agem sobre a caixa: a força da corda $\vec{T}$, a força gravitacional $\vec{F}_g$ e a força normal $\vec{F}_N$. (*c*)-(*i*) As componentes de $\vec{F}_g$ na direção do plano inclinado e na direção perpendicular.

Exemplo

Força com um ângulo variável

A Fig. 5-16*a* mostra um arranjo no qual duas forças são aplicadas a um bloco de 4,00 kg em um piso sem atrito, mas apenas a força $\vec{F}_1$ está indicada. Essa força tem módulo fixo, mas o ângulo θ com o semieixo x positivo pode variar. A força $\vec{F}_2$ é horizontal e tem módulo constante. A Fig. 5-16*b* mostra a aceleração horizontal a_x do bloco em função de θ no intervalo $0° \leq \theta \leq 90°$. Qual é o valor de a_x para $\theta = 180°$?

Quando $\vec{F}_1$ é horizontal, a aceleração é 3,0 m/s².

Quando $\vec{F}_1$ é vertical, a aceleração é 0,50 m/s².

Figura 5-16 (*a*) Uma das duas forças aplicadas a um bloco. O ângulo θ pode variar. (*b*) Componente a_x da aceleração do bloco em função de θ.

IDEIAS-CHAVE

(1) A aceleração horizontal a_x depende da força horizontal resultante $F_{res,x}$, dada pela segunda lei de Newton. (2) A força horizontal resultante é a soma das componentes horizontais das forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$.

Cálculos Como a força $\vec{F}_2$ é horizontal, a componente x é F_2. A componente x de $\vec{F}_1$ é $F_1 \cos \theta$. Usando essas expressões e uma massa m de 4,00 kg, podemos escrever a segunda lei de Newton ($\vec{F}_{res} = m\vec{a}$) para o movimento ao longo do eixo x na forma

$$F_1 \cos \theta + F_2 = 4{,}00 a_x. \tag{5-25}$$

Essa equação mostra que para $\theta = 90°$, $F_1 \cos \theta$ é zero e $F_2 = 4{,}00 a_x$. De acordo com o gráfico, a aceleração correspondente é 0,50 m/s². Assim, $F_2 = 2{,}00$ N e o sentido de $\vec{F}_2$ é o sentido positivo do eixo x.

Fazendo $\theta = 0°$ na Eq. 5-25, obtemos:

$$F_1 \cos 0° + 2{,}00 = 4{,}00 a_x. \tag{5-26}$$

De acordo com o gráfico, a aceleração correspondente é 3,0 m/s². Substituindo este valor na Eq. 5-26, obtemos $F_1 = 10$ N.

Fazendo $F_1 = 10$ N, $F_2 = 2{,}00$ N e $\theta = 180°$ na Eq. 5-25, temos:

$$a_x = -2{,}00 \text{ m/s}^2. \quad \text{(Resposta)}$$

Exemplo

Forças em um elevador

Na Fig. 5-17*a*, um passageiro de massa $m = 72{,}2$ kg está de pé em uma balança no interior de um elevador. Estamos interessados na leitura da balança quando o elevador está parado e quando está se movendo para cima e para baixo.

(a) Escreva uma equação que expresse a leitura da balança em função da aceleração vertical do elevador.

IDEIAS-CHAVE

(1) A leitura é igual ao módulo da força normal $\vec{F}_N$ que a balança exerce sobre o passageiro. Como mostra o diagrama de corpo livre da Fig. 5-17*b*, a única outra força que age sobre o passageiro é a força gravitacional $\vec{F}_g$. (b) Podemos relacionar as forças que agem sobre o passageiro à aceleração $\vec{a}$ usando a segunda lei de Newton ($\vec{F}_{res} = m\vec{a}$). Lembre-se, porém, de que esta lei só se aplica aos referenciais inerciais. Um elevador acelerado *não é* um referencial inercial. Assim, escolhemos o solo como

Estas forças se opõem. A resultante produz uma aceleração vertical.

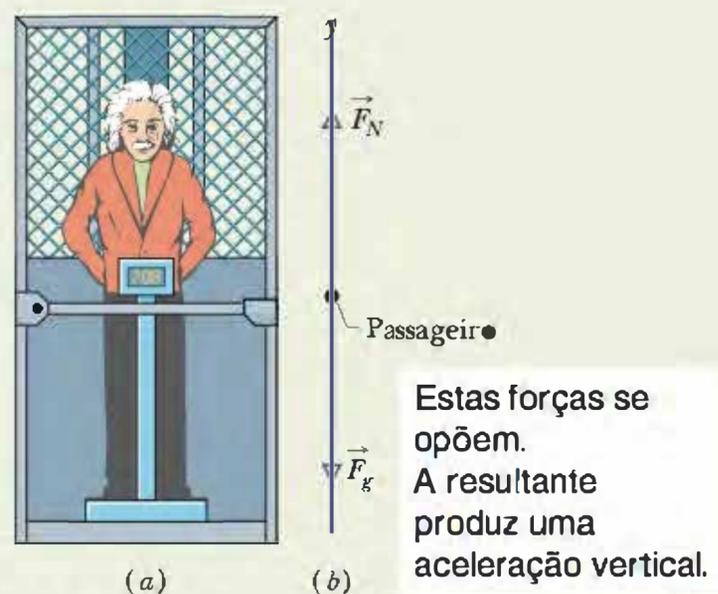



Figura 5-17 (*a*) Um passageiro de pé em uma balança que indica ou o peso ou o peso aparente. (*b*) O diagrama de corpo livre do passageiro, mostrando a força normal $\vec{F}_N$ exercida pela balança e a força gravitacional $\vec{F}_g$.

referencial e analisamos todos os movimentos em relação a este referencial.

Cálculos Como as duas forças e a aceleração a que o passageiro está sujeito são verticais, na direção do eixo y da Fig. 5-17b, podemos usar a segunda lei de Newton para as componentes y ($F_{res,y} = ma_y$) e escrever

$$F_N - F_g = ma$$

ou

$$F_N = F_g + ma. \quad (5\text{-}27)$$

Isso significa que a leitura da balança, que é igual a F_N, depende da aceleração vertical. Substituindo F_g por mg, obtemos

$$F_N = m(g + a) \quad \text{(Resposta)} \quad (5\text{-}28)$$

para qualquer valor da aceleração a.

(b) Qual é a leitura da balança se o elevador está parado ou está se movendo para cima com uma velocidade constante de 0,50 m/s?

IDEIA-CHAVE

Para qualquer velocidade constante (zero ou diferente de zero), a aceleração do passageiro é zero.

Cálculo Substituindo esse e outros valores conhecidos na Eq. 5-28, obtemos

$$F_N = (72{,}2\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2 + 0) = 708\text{ N}. \quad \text{(Resposta)}$$

Esse é o peso do passageiro e é igual o módulo F_g da força gravitacional a que está submetido.

(c) Qual é a leitura da balança se o elevador sofre uma aceleração para cima de 3,20 m/s²? Qual é a leitura se o elevador sofre uma aceleração para baixo de 3,20 m/s²?

Cálculos Para a = 3,20 m/s², a Eq. 5-28 nos dá

$$F_N = (72{,}2\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2 + 3{,}20\text{ m/s}^2) = 939\text{ N}, \quad \text{(Resposta)}$$

e para a = −3,20 m/s², temos

$$F_N = (72{,}2\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2 - 3{,}20\text{ m/s}^2) = 477\text{ N}. \quad \text{(Resposta)}$$

Se a aceleração é para cima (ou seja, se a velocidade de subida do elevador está aumentando ou se a velocidade de descida está diminuindo), a leitura da balança é maior que o peso do passageiro. Essa leitura é uma medida do peso aparente, pois é realizada em um referencial não inercial. Se a aceleração é para baixo (ou seja, se a velocidade de subida do elevador está diminuindo ou a velocidade de descida está aumentando), a leitura da balança é menor que o peso do passageiro.

(d) Durante a aceleração para cima do item (c), qual é o módulo F_{res} da força resultante a que está submetido o passageiro e qual é o módulo $a_{p,el}$ da aceleração do passageiro no referencial do elevador? A equação $\vec{F}_{res} = m\vec{a}_{p,el}$ é obedecida?

Cálculo O módulo F_g da força gravitacional a que está submetido o passageiro não depende da aceleração; assim, de acordo com o item (b), F_g = 708 N. De acordo com o item (c), o módulo F_N da força normal a que está submetido o passageiro durante a aceleração para cima é o valor de 939 N indicado pela balança. Assim, a força resultante a que o passageiro está submetido é

$$F_{res} = F_N - F_g = 939\text{ N} - 708\text{ N} = 231\text{ N}, \quad \text{(Resposta)}$$

durante a aceleração para cima. Entretanto, a aceleração do passageiro em relação ao elevador, $a_{p,el}$, é zero. Assim, no referencial não inercial do elevador acelerado, F_{res} não é igual a $ma_{p,el}$ e a segunda lei de Newton não é obedecida.

Exemplo

Aceleração de um bloco empurrado por outro bloco

Na Fig. 5-18a, uma força horizontal constante $\vec{F}_{ap}$ de módulo 20 N é aplicada a um bloco A de massa m_A = 4,0 kg, que empurra um bloco B de massa m_B = 6,0 kg. O bloco desliza sobre uma superfície sem atrito ao longo de um eixo x.

(a) Qual é a aceleração dos blocos?

Erro Grave Como a força $\vec{F}_{ap}$ é aplicada diretamente ao bloco A, usamos a segunda lei de Newton para relacionar essa força à aceleração $\vec{a}$ do bloco A. Como o movimento é ao longo do eixo x, usamos a lei para as componentes x ($F_{res,x} = ma_x$), escrevendo

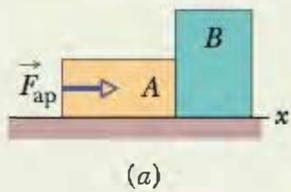
$$F_{ap} = m_A a.$$

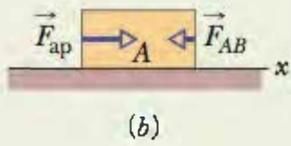
Esse raciocínio está errado porque $\vec{F}_{ap}$ não é a única força horizontal a que o bloco A está sujeito; existe também a força $\vec{F}_{AB}$ exercida pelo bloco B (Fig. 5-18b).

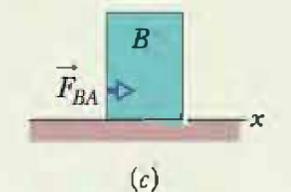
Solução Frustrada Vamos incluir a força $\vec{F}_{AB}$, escrevendo, novamente para o eixo x,

$$F_{ap} - F_{AB} = m_A a.$$

(Usamos o sinal negativo para indicar o sentido de $\vec{F}_{AB}$.) Como $\vec{F}_{AB}$ é uma segunda incógnita, não podemos resolver esta equação para determinar o valor de a.

Solução Correta Por causa do sentido de aplicação da força $\vec{F}_{ap}$, os dois blocos se movem como se fossem um só.

Esta força produz a aceleração do conjunto de dois blocos.

(*a*)

Estas são as duas forças que agem sobre o bloco *A*. A resultante produz a aceleração do bloco *A*.

(*b*)

Esta é a única força responsável pela aceleração do bloco *B*.

(*c*)

Figura 5-18 (*a*) Uma força horizontal constante $\vec{F}_{ap}$ é aplicada ao bloco *A*, que empurra o bloco *B*. (*b*) Duas forças horizontais agem sobre o bloco *A*. (*c*) Apenas uma força horizontal age sobre o bloco *B*.

Podemos usar a segunda lei de Newton para relacionar a força aplicada *ao conjunto dos dois blocos* à aceleração *do conjunto dos dois blocos* através da segunda lei de Newton. Assim, considerando apenas o eixo x, podemos escrever:

$$F_{ap} = (m_A + m_B)a,$$

onde agora a força aplicada, $\vec{F}_{ap}$, está relacionada corretamente à massa total $m_A + m_B$. Explicitando a e substituindo os valores conhecidos, obtemos:

$$a = \frac{F_{ap}}{m_A + m_B} = \frac{20\,\text{N}}{4{,}0\text{ kg} + 6{,}0\text{ kg}} = 2{,}0\text{ m/s}^2.$$

(Resposta)

Assim, a aceleração do sistema (e de cada bloco) é no sentido positivo do eixo x e tem um módulo de 2,0 m/s².

(b) Qual é a força (horizontal) $\vec{F}_{BA}$ exercida pelo bloco *A* sobre o bloco *B* (Fig. 5-18*c*)?

IDEIA-CHAVE

Podemos usar a segunda lei de Newton para relacionar a força exercida sobre o bloco *B* à aceleração do bloco.

Cálculo Nesse caso, considerando apenas o eixo x, podemos escrever:

$$F_{BA} = m_B a,$$

que, substituindo os valores conhecidos, nos dá

$$F_{BA} = (6{,}0\text{ kg})(2{,}0\text{ m/s}^2) = 12\text{ N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, a força $\vec{F}_{BA}$ é orientada no sentido positivo do eixo x e tem um módulo de 12 N.

REVISÃO E RESUMO

Mecânica newtoniana Para que a velocidade de um objeto varie (ou seja, para que o objeto sofra uma aceleração), é preciso que ele seja submetido a uma **força** (empurrão ou puxão) exercida por outro objeto. A *mecânica newtoniana* descreve a relação entre acelerações e forças.

Força A força é uma grandeza vetorial cujo módulo é definido em termos da aceleração que imprimiria a uma massa de um quilograma. Por definição, uma força que produz uma aceleração de 1 m/s² em uma massa de 1 kg tem um módulo de 1 newton (1 N). Uma força tem a mesma orientação que a aceleração produzida pela força. Duas ou mais forças podem ser combinadas segundo as regras da álgebra vetorial. A **força resultante** é a soma de todas as forças que agem sobre um corpo.

Primeira Lei de Newton Quando a força resultante que age sobre um corpo é nula, o corpo permanece em repouso ou se move em linha reta com velocidade escalar constante.

Referenciais Inerciais Os referenciais para os quais as leis de Newton são válidas são chamados de *referenciais inerciais*. Os referenciais para os quais as leis de Newton não são válidas são chamados de *referenciais não inerciais*.

Massa A **massa** de um corpo é a propriedade que relaciona a aceleração do corpo à força responsável pela aceleração. A massa é uma grandeza escalar.

Segunda Lei de Newton A força resultante $\vec{F}_{res}$ que age sobre um corpo de massa m está relacionada à aceleração $\vec{a}$ do corpo através da equação

$$\vec{F}_{res} = m\vec{a}, \qquad (5\text{-}1)$$

que pode ser escrita em termos das componentes:

$$F_{res,x} = ma_x \quad F_{res,y} = ma_y \quad \text{e} \quad F_{res,z} = ma_z. \qquad (5\text{-}2)$$

De acordo com a segunda lei, em unidades do SI,

$$1\text{ N} = 1\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2. \qquad (5\text{-}3)$$

O **diagrama de corpo livre** é um diagrama simplificado no qual apenas *um corpo* é considerado. Esse corpo é representado por um ponto ou por um desenho. As forças externas que agem sobre o corpo são representadas por vetores e um sistema de coordenadas é superposto ao desenho, orientado de modo a simplificar a solução.

Algumas Forças Especiais A **força gravitacional** $\vec{F}_g$ exercida sobre um corpo é um tipo especial de atração que um segundo corpo exerce sobre o primeiro. Na maioria das situações apresentadas neste livro, o segundo corpo é a Terra ou outro astro. No caso da Terra, a força é orientada para baixo, em direção ao solo, que é considerado um referencial inercial. O módulo de $\vec{F}_g$ é

$$F_g = mg, \qquad (5\text{-}8)$$

onde m é a massa do corpo e g é o módulo da aceleração em queda livre.

O **peso** P de um corpo é o módulo da força para cima necessária para equilibrar a força gravitacional a que o corpo está sujeito. O peso de um corpo está relacionado à massa através da equação

$$P = mg. \qquad (5\text{-}12)$$

A **força normal** $\vec{F}_N$ é a força exercida sobre um corpo pela superfície na qual o corpo está apoiado. A força normal é sempre perpendicular à superfície.

A **força de atrito** $\vec{f}$ é a força exercida sobre um corpo quando o corpo desliza ou tenta deslizar sobre uma superfície. A força é sempre paralela à superfície e tem o sentido oposto ao do deslizamento. Em uma *superfície ideal*, a força de atrito é desprezível.

Quando uma corda está sob **tensão**, cada extremidade da corda exerce uma força sobre um corpo. A força é orientada ao longo da corda, para longe do ponto onde a corda está presa ao corpo. No caso de uma *corda sem massa* (uma corda de massa desprezível), as tensões nas duas extremidades da corda têm o mesmo módulo T, mesmo que a corda passe por uma *polia sem massa e sem atrito* (uma polia de massa desprezível cujo eixo tem um atrito desprezível).

Terceira Lei de Newton Se um corpo C aplica a um corpo B uma força $\vec{F}_{BC}$, o corpo B aplica ao corpo C uma força $\vec{F}_{CB}$ tal que

$$\vec{F}_{BC} = -\vec{F}_{CB}.$$

PERGUNTAS

1 A Fig. 5-19 mostra diagramas de corpo livre de quatro situações nas quais um objeto, visto de cima, é puxado por várias forças em um piso sem atrito. Em quais dessas situações a aceleração $\vec{a}$ do objeto possui (a) uma componente x e (b) uma componente y? (c) Em cada situação, indique a orientação de $\vec{a}$ citando um quadrante ou um semieixo. (Isto pode ser feito com alguns cálculos mentais.)

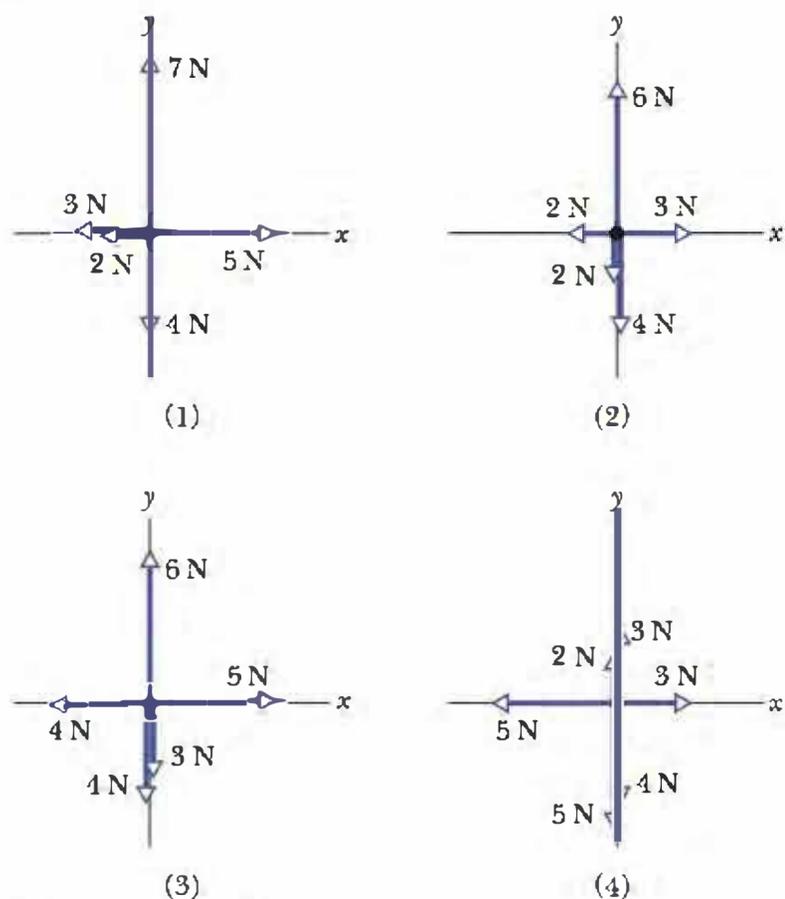



Figura 5-19 Pergunta 1.

2 Duas forças horizontais,

$$\vec{F}_1 = (3\text{ N})\hat{\text{i}} - (4\text{ N})\hat{\text{j}} \quad \text{e} \quad \vec{F}_2 = -(1\text{ N})\hat{\text{i}} - (2\text{ N})\hat{\text{j}}$$

puxam um banana split no balcão sem atrito de uma lanchonete. Determine, sem usar uma calculadora, quais dos vetores do diagrama de corpo livre da Fig. 5-20 representam melhor (a) $\vec{F}_1$ e (b) $\vec{F}_2$. Qual é a componente da força resultante (c) ao longo do eixo x e (d) ao longo do eixo y? Para que quadrante aponta o vetor (e) da força resultante e (f) da aceleração do sorvete?

Figura 5-20 Pergunta 2.

3 Na Fig. 5-21, as forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ são aplicadas a uma caixa que desliza com velocidade constante sobre uma superfície sem atrito. Diminuímos o ângulo θ sem mudar o módulo de $\vec{F}_1$. Para manter a caixa deslizando com velocidade constante, devemos aumentar, diminuir ou manter inalterado o módulo de $\vec{F}_2$?

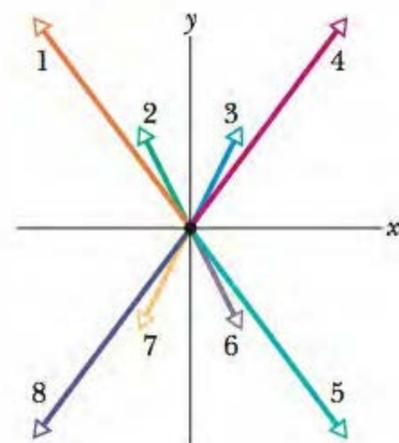
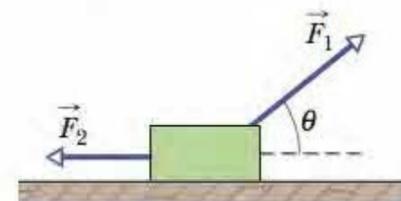



Figura 5-21 Pergunta 3.

4 No instante $t = 0$, uma força $\vec{F}$ constante começa a atuar sobre uma pedra que se move no espaço sideral no sentido positivo do eixo x. (a) Para $t > 0$, quais são as possíveis funções $x(t)$ para a posição da pedra: (1) $x = 4t - 3$, (2) $x = -4t^2 + 6t - 3$, (3) $x = 4t^2 + 6t - 3$? (b) Para que função $\vec{F}$ tem o sentido contrário ao do movimento inicial da pedra?

5 A Fig. 5-22 mostra vistas superiores de quatro situações nas quais forças atuam sobre um bloco que está em um piso sem atrito. Em que situações é possível, para certos valores dos módulos das forças, que o bloco esteja (a) em repouso e (b) se movendo com velocidade constante?

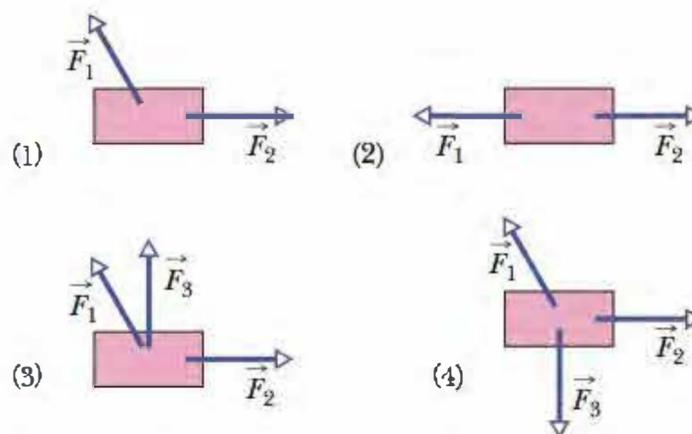



Figura 5-22 Pergunta 5.

6 A Fig. 5-23 mostra uma caixa em quatro situações nas quais forças horizontais são aplicadas. Ordene as situações de acordo com o módulo da aceleração da caixa, começando pelo maior.

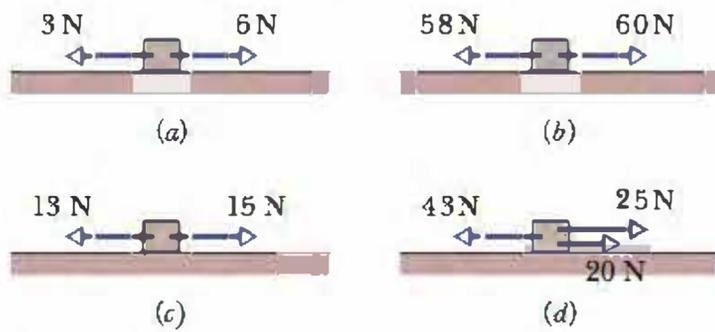



Figura 5-23 Pergunta 6.

7 Kansas City, 17 de julho de 1981: o hotel Hyatt Regency, recém-inaugurado, recebe centenas de pessoas, que escutam e dançam sucessos da década de 1940 ao som de uma banda. Muitos se aglomeram nas passarelas que se estendem como pontes por cima do grande saguão. De repente, duas passarelas cedem, caindo sobre a multidão.

As passarelas eram sustentadas por hastes verticais e mantidas no lugar por porcas atarraxadas nas hastes. No projeto original, seriam usadas apenas duas hastes compridas, presas no teto, que sustentariam as três passarelas (Fig. 5-24*a*). Se cada passarela e as pessoas que se encontram sobre ela têm uma massa total M, qual é a massa total sustentada por duas porcas que estão (a) na passarela de baixo e (b) na passarela de cima?

Como não é possível atarraxar uma porca em uma haste a não ser nas extremidades, o projeto foi modificado. Em vez de duas hastes, foram usadas seis, duas presas ao teto e quatro ligando as passarelas duas a duas (Fig. 5-24*b*). Qual é agora a massa total sustentada por duas porcas que estão (c) na passarela de baixo, (d) no lado de cima da passarela de cima e (e) no lado de baixo da passarela de cima? Foi esta modificação do projeto original que causou a tragédia.

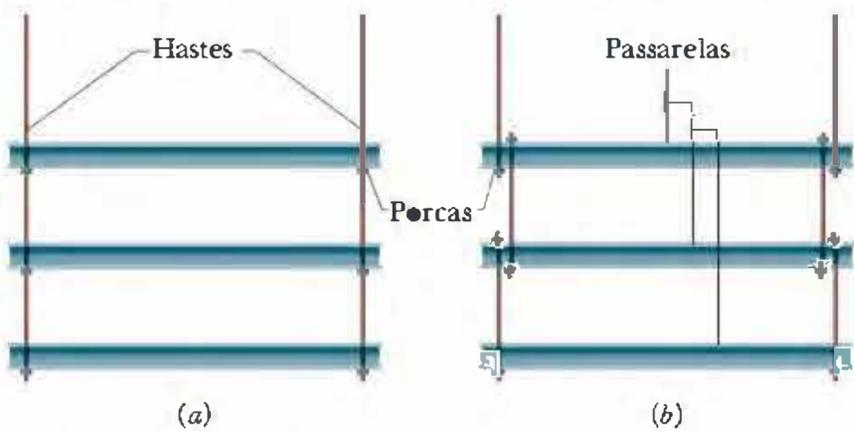



Figura 5-24 Pergunta 7.

8 A Fig. 5-25 mostra três gráficos da componente de uma velocidade $v_x(t)$ e três gráficos da componente $v_y(t)$. Os gráficos não estão em escala. Que gráfico de $v_x(t)$ e que gráfico de $v_y(t)$ correspondem melhor a cada uma das situações da Pergunta 1 (Fig. 5-19)?

9 A Fig. 5-26 mostra um conjunto de quatro blocos sendo puxados por uma força $\vec{F}$ em um piso sem atrito. Que massa total é acelerada para a direita (a) pela força $\vec{F}$, (b) pela corda 3 e (c) pela corda 1? (d) Ordene os blocos de acordo com a aceleração, começando pela maior. (e) Ordene as cordas de acordo com a tensão, começando pela maior.

10 A Fig. 5-27 mostra três blocos sendo empurrados sobre um piso sem atrito por uma força horizontal $\vec{F}$. Que massa total é acelerada para a direita (a) pela força $\vec{F}$, (b) pela força $\vec{F}_{21}$ exercida pelo bloco 1 sobre o bloco 2 e (c) pela força $\vec{F}_{32}$ exercida pelo bloco 2 sobre o bloco 3? (d) Ordene os blocos de acordo com o módulo da aceleração, começando pelo maior. (e) Ordene as forças $\vec{F}$, $\vec{F}_{21}$ e $\vec{F}_{32}$ de acordo com o módulo, começando pelo maior.

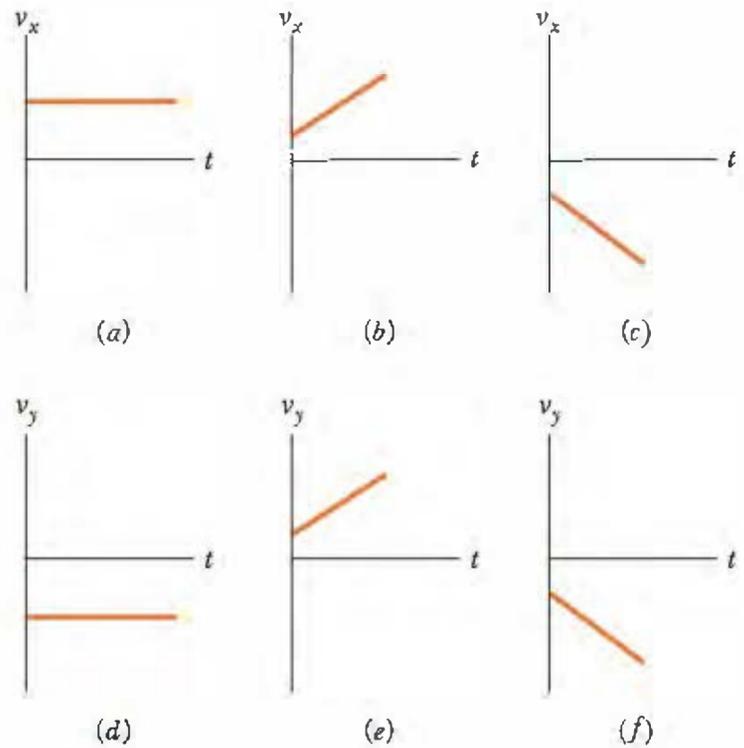
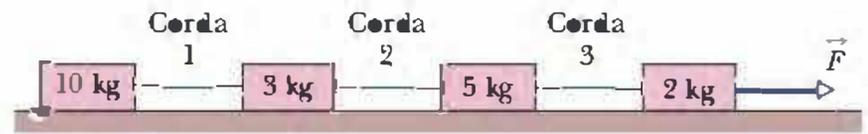



Figura 5-25 Pergunta 8.

Figura 5-26 Pergunta 9.

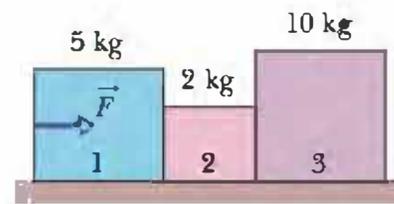



Figura 5-27 Pergunta 10.

11 Uma força vertical $\vec{F}$ é aplicada a um bloco de massa m que está sobre um piso. O que acontece com o módulo da força normal $\vec{F}_N$ que o piso exerce sobre o bloco quando o módulo de $\vec{F}$ aumenta a partir de zero, se a força $\vec{F}$ aponta (a) para baixo e (b) para cima?

12 A Fig. 5-28 mostra quatro opções para a orientação de uma força de módulo F a ser aplicada a um bloco que se encontra sobre um plano inclinado. A força pode ser horizontal ou vertical. (No caso da opção *b*, a força não é suficiente para levantar o bloco, afastando-o da superfície.) Ordene as opções de acordo com o módulo da força normal exercida pelo plano sobre o bloco, começando pela maior.

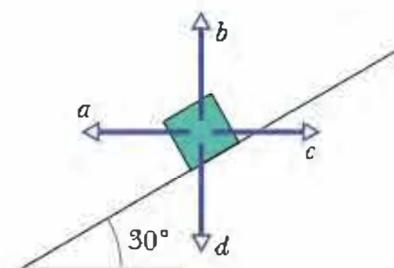



Figura 5-28 Pergunta 12.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física* de Jearl Walker, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

Seção 5-6 A Segunda Lei de Newton

•1 Apenas duas forças horizontais atuam em um corpo de 3,0 kg que pode se mover em um piso sem atrito. Uma força é de 9,0 N e aponta para o leste; a outra é de 8,0 N e atua 62° ao norte do oeste. Qual é o módulo da aceleração do corpo?

•2 Duas forças horizontais agem sobre um bloco de madeira de 2,0 kg que pode deslizar sem atrito em uma bancada de cozinha, situada em um plano xy. Uma das forças é $\vec{F}_1 = (3{,}0\text{ N})\hat{\text{i}} + (4{,}0\text{ N})\hat{\text{j}}$. Determine a aceleração do bloco em termos dos vetores unitários se a outra força é (a) $\vec{F}_2 = (-3{,}0\text{ N})\hat{\text{i}} + (-4{,}0\text{ N})\hat{\text{j}}$, (b) $\vec{F}_2 = (-3{,}0\text{ N})\hat{\text{i}} + (4{,}0\text{ N})\hat{\text{j}}$ e (c) $\vec{F}_2 = (3{,}0\text{ N})\hat{\text{i}} + (-4{,}0\text{ N})\hat{\text{j}}$.

•3 Se um corpo padrão de 1 kg tem uma aceleração de 2,00 m/s² a 20,0° com o semieixo x positivo, quais são (a) a componente x e (b) a componente y da força resultante a que o corpo está submetido e (c) qual é a força resultante em termos dos vetores unitários?

••4 Sob a ação de duas forças, uma partícula se move com velocidade constante $\vec{v} = (3\text{ m/s})\hat{\text{i}} - (4\text{ m/s})\hat{\text{j}}$. Uma das forças é $\vec{F}_1 = (2\text{ N})\hat{\text{i}} + (-6\text{ N})\hat{\text{j}}$. Qual é a outra?

••5 Três astronautas, impulsionados por mochilas a jato, empurram e guiam um asteroide de 120 kg para uma base de manutenção, exercendo as forças mostradas na Fig. 5-29, com $F_1 = 32$ N, $F_2 = 55$ N, $F_3 = 41$ N, $\theta_1 = 30°$ e $\theta_3 = 60°$. Determine a aceleração do asteroide (a) em termos dos vetores unitários e como (b) um módulo e (c) um ângulo em relação ao semieixo x positivo.

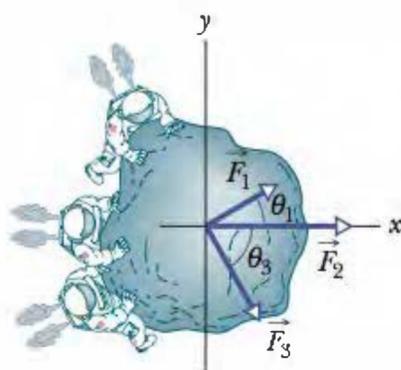



Figura 5-29 Problema 5.

••6 Em um cabo-de-guerra bidimensional, Alexandre, Bárbara e Carlos puxam horizontalmente um pneu de automóvel nas orientações mostradas na vista superior da Fig. 5-30. Apesar dos esforços da trinca, o pneu permanece no mesmo lugar. Alexandre puxa com uma força $\vec{F}_A$ de módulo 220 N e Carlos puxa com uma força $\vec{F}_C$ de módulo 170 N. Observe que a orientação de $\vec{F}_C$ não é dada. Qual é o módulo da força $\vec{F}_B$ exercida por Bárbara?

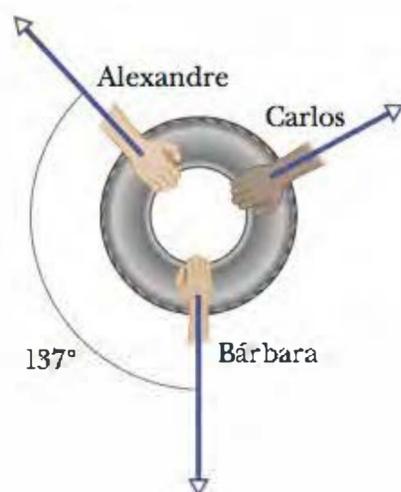



Figura 5-30 Problema 6.

••7 Duas forças agem sobre a caixa de 2,00 kg vista de cima na Fig. 5-31, mas apenas uma é mostrada. Para $F_1 = 20{,}0$ N, $a = 12{,}0$ m/s² e $\theta = 30{,}0°$, determine a segunda força (a) em termos dos vetores unitários e como um (b) módulo e (c) um ângulo em relação ao semieixo x positivo.

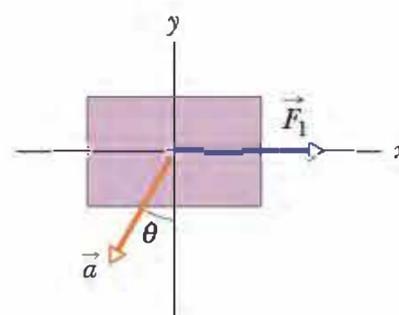



Figura 5-31 Problema 7.

••8 Um objeto de 2,00 kg está sujeito a três forças, que lhe imprimem uma aceleração $\vec{a} = -(8{,}00\text{ m/s}^2)\hat{\text{i}} + (6{,}00\text{ m/s}^2)\hat{\text{j}}$. Se duas das forças são $\vec{F}_1 = (30{,}0\text{ N})\hat{\text{i}} + (16{,}0\text{ N})\hat{\text{j}}$ e $\vec{F}_2 = -(12{,}0\text{ N})\hat{\text{i}} + (8{,}00\text{ N})\hat{\text{j}}$, determine a terceira.

••9 Uma partícula de 0,340 kg se move no plano xy de acordo com as equações $x(t) = -15{,}00 + 2{,}00t - 4{,}00t^3$ e $y(t) = 25{,}00 + 7{,}00t - 9{,}00t^2$, com x e y em metros e t em segundos. No instante $t = 0{,}700$ s, quais são (a) o módulo e (b) o ângulo (em relação ao semieixo x positivo) da força resultante a que está submetida a partícula e (c) qual é o ângulo da direção de movimento da partícula?

••10 Uma partícula de 0,150 kg se move ao longo de um eixo x de acordo com a equação $x(t) = -13{,}00 + 2{,}00t + 4{,}00t^2 - 3{,}00t^3$, com x em metros e t em segundos. Qual é, na notação dos vetores unitários, a força que age sobre a partícula no instante $t = 3{,}40$ s?

••11 Uma partícula de 2,0 kg se move ao longo de um eixo x sob a ação de uma força variável. A posição da partícula é dada por $x = 3{,}0\text{ m} + (4{,}0\text{ m/s})t + ct^2 - (2{,}0\text{ m/s}^3)t^3$, com x em metros e t em segundos. O fator c é constante. No instante $t = 3{,}0$ s, a força que age sobre a partícula tem um módulo de 36 N e aponta no sentido negativo do eixo x. Qual é o valor de c?

•••12 Duas forças horizontais $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ agem sobre um disco de 4,0 kg que desliza sem atrito sobre o gelo, no qual foi desenhado um sistema de coordenadas xy. A força $\vec{F}_1$ aponta no sentido positivo do eixo x e tem um módulo de 7,0 N. A força $\vec{F}_2$ tem um módulo de 9,0 N. A Fig. 5-32 mostra a componente v_x da velocidade do disco em função do tempo t. Qual é o ângulo entre as orientações constantes das forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$?

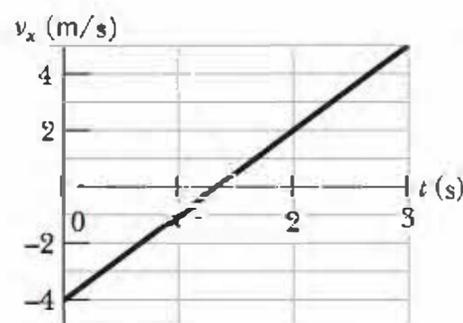



Figura 5-32 Problema 12.

Seção 5-7 Algumas Forças Especiais

•**13** A Fig. 5-33 mostra um arranjo no qual quatro discos estão suspensos por cordas. A corda mais comprida, no alto, passa por uma polia sem atrito e exerce uma força de 98 N sobre a parede à qual está presa. As tensões nas cordas mais curtas são $T_1 = 58,8$ N, $T_2 = 49,0$ N e $T_3 = 9,8$ N. Quais são as massas (a) do disco A, (b) do disco B, (c) do disco C e (d) do disco D?

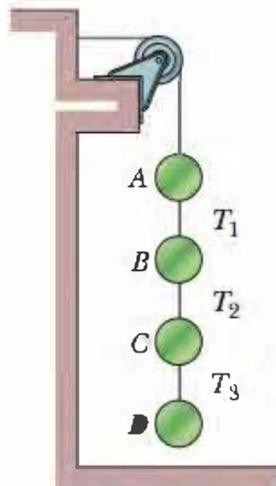



Figura 5-33 Problema 13.

•**14** Um bloco com um peso de 3,0 N está em repouso em uma superfície horizontal. Uma força para cima de 1,0 N é aplicada ao corpo através de uma mola vertical. Quais são (a) o módulo e (b) o sentido da força exercida pelo bloco sobre a superfície horizontal?

•**15** (a) Um salame de 11,0 kg está pendurado por uma corda em uma balança de mola, que está presa ao teto por outra corda (Fig. 5-34a). Qual é a leitura da balança, cuja escala está em unidades de peso? (b) Na Fig. 5-34b o salame está suspenso por uma corda que passa por uma roldana e está presa a uma balança de mola. A extremidade oposta da balança está presa a uma parede por outra corda. Qual é a leitura da balança? (c) Na Fig. 5-34c a parede foi substituída por um segundo salame de 11,0 kg e o sistema está em repouso. Qual é a leitura da balança?

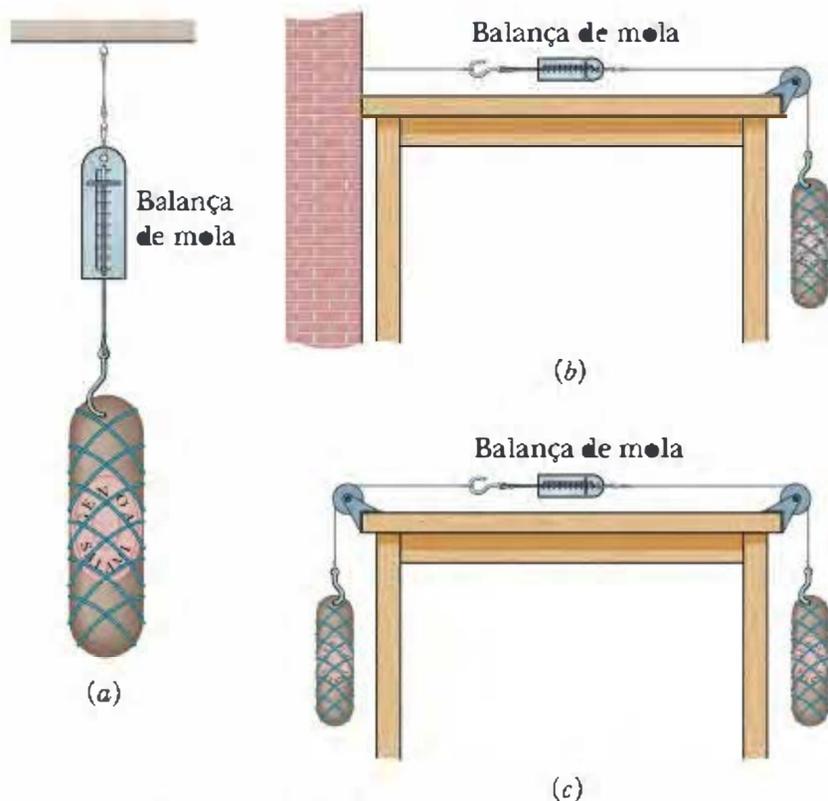



Figura 5-34 Problema 15.

••**16** Alguns insetos podem se deslocar pendurados em gravetos. Suponha que um desses insetos tenha massa m e esteja pendurado em um graveto horizontal, como mostra a Fig. 5-35, com um ângulo $\theta = 40°$. As seis pernas do inseto estão sob a mesma tensão e as seções das pernas mais próximas do corpo são horizontais. (a) Qual é a razão entre a tensão em cada tíbia (extremidade da perna) e o peso do inseto? (b) Se o inseto estica um pouco as pernas, a tensão nas tíbias aumenta, diminui ou continua a mesma?

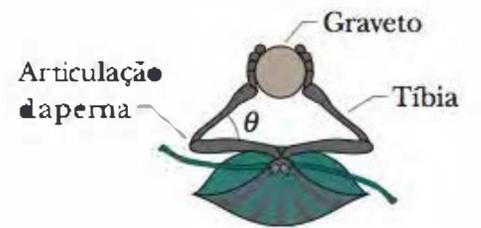



Figura 5-35 Problema 16.

Seção 5-9 Aplicando as Leis de Newton

•**17** Na Fig. 5-36, a massa do bloco é 8,5 kg e o ângulo θ é 30°. Determine (a) a tensão na corda e (b) a força normal que age sobre o bloco. (c) Determine o módulo da aceleração do bloco se a corda for cortada.

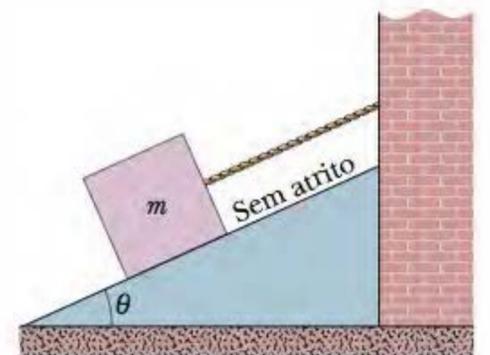



Figura 5-36 Problema 17.

•**18** Em abril de 1974, o belga John Massis conseguiu puxar dois vagões de passageiros mordendo um freio preso por uma corda aos vagões e se inclinando para trás com as pernas apoiadas nos dormentes da ferrovia. Os vagões pesavam 700 kN (cerca de 80 toneladas). Suponha que Massis tenha puxado com uma força constante de módulo 2,5 vezes maior que seu peso e ângulo θ de 30° com a horizontal. Sua massa era 80 kg e ele fez os vagões se deslocarem de 1,0 m. Desprezando as forças de atrito, determine a velocidade dos vagões quando Massis parou de puxar.

•**19** Qual é o módulo da força necessária para acelerar um trenó-foguete de 500 kg até 1600 km/h em 1,8 s, partindo do repouso?

•**20** Um carro a 53 km/h se choca com um pilar de uma ponte. Um passageiro do carro se desloca para a frente de uma distância de 65 cm (em relação à estrada) até ser imobilizado por um *airbag* inflado. Qual é o módulo da força (suposta constante) que atua sobre o tronco do passageiro, que tem uma massa de 41 kg?

•**21** Uma força horizontal constante $\vec{F}_a$ empurra um pacote dos correios de 2,00 kg sobre um piso sem atrito onde um sistema de coordenadas xy foi desenhado. A Fig. 5-37 mostra as componentes x e y da velocidade do pacote em função do tempo t. Quais são (a) o módulo e (b) a orientação de $\vec{F}_a$? Ver Fig. 5-37, adiante.

•**22** Um homem está sentado em um brinquedo de parque de diversões no qual uma cabina é acelerada para baixo, no sentido negativo do eixo y, com uma aceleração cujo módulo é $1,24g$, com $g = 9,80$ m/s^2. Uma moeda de 0,567 g repousa no joelho do homem. Depois que a cabina começa a se mover e em termos dos vetores unitários, qual é a aceleração da moeda (a) em relação ao solo e (b) em relação ao homem? (c) Quanto tempo a moeda leva para chegar ao teto da cabina, 2,20 m acima do joelho? Em termos dos vetores unitários, qual é (d) a força a que está submetida a moeda e (e) a força aparente a que está submetida a moeda do ponto de vista do homem?

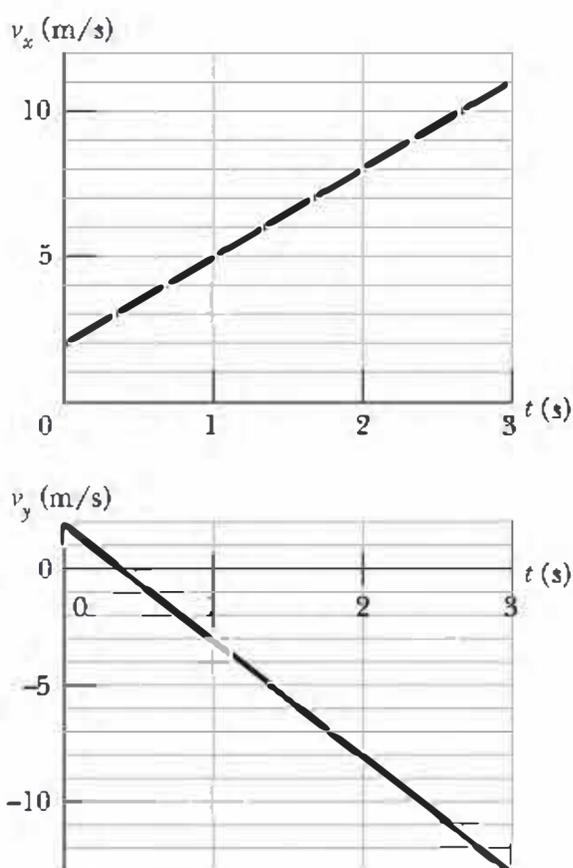



Figura 5-37 Problema 21.

•**23** Tarzan, que pesa 820 N, salta de um rochedo na ponta de um cipó de 20,0 m que está preso ao galho de uma árvore e faz inicialmente um ângulo de 22,0° com a vertical. Suponha que um eixo x é traçado horizontalmente a partir da borda do rochedo e que um eixo y é traçado verticalmente para cima. Imediatamente após Tarzan pular da encosta, a tensão do cipó é 760 N. Nesse instante, quais são (a) a força do cipó sobre Tarzan em termos dos vetores unitários, a força resultante sobre Tarzan (b) em termos dos vetores unitários e como (c) módulo e (d) ângulo em relação ao sentido positivo do eixo x. Quais são (e) o módulo e (f) o ângulo da aceleração de Tarzan nesse instante?

•**24** Existem duas forças horizontais atuando na caixa de 2,0 kg da Fig. 5-39, mas a vista superior mostra apenas uma (de módulo F_1 = 20 N). A caixa se move ao longo do eixo x. Para cada um dos valores da aceleração a_x da caixa, determine a segunda força em termos dos vetores unitários: (a) 10 m/s², (b) 20 m/s², (c) 0, (d) −10 m/s² e (e) −20 m/s².

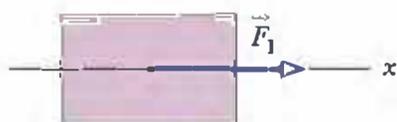



Figura 5-38 Problema 24.

•**25** *Propulsão solar.* Um "iate solar" é uma nave espacial com uma grande vela que é empurrada pela luz do Sol. Embora esse empurrão seja fraco em circunstâncias normais, pode ser suficiente para afastar a nave do Sol em uma viagem gratuita, mas muito lenta. Suponha que a espaçonave tenha uma massa de 900 kg e receba um empurrão de 20 N. (a) Qual é o módulo da aceleração resultante? Se a nave parte do repouso, (b) que distância percorre em um dia e (c) qual é a velocidade no final do dia?

•**26** A tensão para a qual uma linha de pescar arrebenta é chamada de "resistência" da linha. Qual é a resistência mínima necessária para que a linha faça parar um salmão de 85 N de peso em 11 cm se o peixe está inicialmente se deslocando a 2,8 m/s? Considere uma desaceleração constante.

•**27** Um elétron com uma velocidade de $1,2 \times 10^7$ m/s penetra horizontalmente em uma região onde está sujeito a uma força vertical constante de $4,5 \times 10^{-16}$ N. A massa do elétron é $9,11 \times 10^{-31}$ kg. Determine a deflexão vertical sofrida pelo elétron enquanto percorre uma distância horizontal de 30 mm.

•**28** Um carro que pesa $1,30 \times 10^4$ N está se movendo a 40 km/h quando os freios são aplicados, fazendo o carro parar depois de percorrer 15 m. Supondo que a força aplicada pelo freio é constante, determine (a) o módulo da força e (b) o tempo necessário para o carro parar. Se a velocidade inicial é multiplicada por dois e o carro experimenta a mesma força durante a frenagem, por que fatores são multiplicados (c) a distância até o carro parar e (d) o tempo necessário para o carro parar? (Isto poderia ser uma lição sobre o perigo de dirigir em altas velocidades.)

•**29** Um bombeiro que pesa 712 N escorrega por um poste vertical com uma aceleração de 3,00 m/s², dirigida para baixo. Quais são (a) o módulo e (b) o sentido (para cima ou para baixo) da força vertical exercida pelo poste sobre o bombeiro e (c) o módulo e (d) o sentido da força vertical exercida pelo bombeiro sobre o poste?

•**30** Os ventos violentos de um tornado podem fazer com que pequenos objetos fiquem encravados em árvores, paredes de edifícios e até mesmo em placas de sinalização de metal. Em uma simulação em laboratório, um palito comum de madeira foi disparado por um canhão pneumático contra um galho de carvalho. A massa do palito era 0,13 g, a velocidade antes de penetrar no galho era 220 m/s e a profundidade de penetração foi 15 mm. Se o palito sofreu uma desaceleração constante, qual foi o módulo da força exercida pelo galho sobre o palito?

••**31** Um bloco começa a subir um plano inclinado sem atrito com uma velocidade inicial v_0 = 3,50 m/s. O ângulo do plano inclinado é θ = 32,0°. (a) Que distância ao longo do plano inclinado o bloco consegue atingir? (b) Quanto tempo o bloco leva para percorrer essa distância? (c) Qual é a velocidade do bloco ao chegar de volta ao ponto de partida?

••**32** A Fig. 5-39 mostra uma vista superior de um disco de 0,0250 kg sobre uma mesa sem atrito e duas das três forças que agem sobre o disco. A força $\vec{F}_1$ tem um módulo de 6,00 N e um ângulo θ_1 = 30,0°. A força $\vec{F}_2$ tem um módulo de 7,00 N e um ângulo θ_2 = 30,0°. Em termos dos vetores unitários, qual é a terceira força se o disco (a) está em repouso, (b) tem uma velocidade constante $\vec{v} = (13,0\hat{i} - 14,0\hat{j})$ m/s e (c) tem uma velocidade variável $\vec{v} = (13,0t\hat{i} - 14,0t\hat{j})$ m/s², onde t é o tempo?

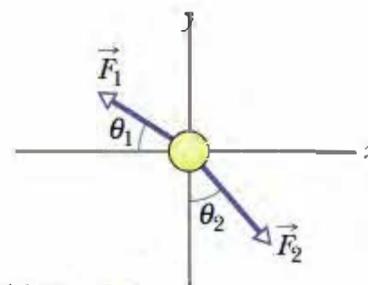



Figura 5-39 Problema 32.

••**33** Um elevador e sua carga têm uma massa total de 1600 kg. Determine a tensão do cabo de sustentação quando o elevador, que estava descendo a 12 m/s, é levado ao repouso com aceleração constante em uma distância de 42 m.

••**34** Na Fig. 5-40, um caixote de massa m = 100 kg é empurrado por uma força horizontal $\vec{F}$ que o faz subir uma rampa sem atrito (θ = 30,0°) com velocidade constante. Quais são os módulos (a) de $\vec{F}$ e (b) da força que a rampa exerce sobre o caixote?

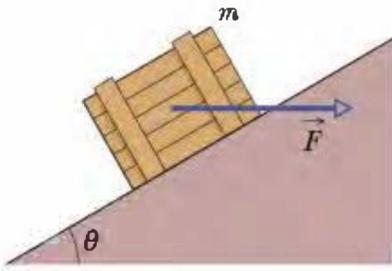



Figura 5-40 Problema 34.

••35 A velocidade de uma partícula de 3,00 kg é dada por $\vec{v} = (8{,}00t\hat{i} + 3{,}00t^2\hat{j})$ m/s, com o tempo t em segundos. No instante em que a força resultante que age sobre a partícula tem um módulo de 35,0 N, quais são as orientações (em relação ao sentido positivo do eixo x) (a) da força resultante e (b) do movimento da partícula?

••36 Um esquiador de 50 kg é puxado para o alto de uma encosta sem atrito segurando um cabo que se move paralelamente à encosta, que faz um ângulo de 8,0° com a horizontal. Qual é o módulo F_{cabo} da força que o cabo exerce sobre o esquiador (a) se o módulo v da velocidade do esquiador é constante e igual a 2,0 m/s e (b) se v aumenta a uma taxa de 0,10 m/s²?

••37 Uma moça de 40 kg e um trenó de 8,4 kg estão sobre a superfície sem atrito de um lago congelado, separados por uma distância de 15 m, mas unidos por uma corda de massa desprezível. A moça exerce uma força horizontal de 5,2 N sobre a corda. Qual é o módulo da aceleração (a) do trenó e (b) da moça? (c) A que distância da posição inicial da moça os dois se tocam?

••38 Um esquiador de 40 kg desce uma rampa sem atrito que faz um ângulo de 10° com a horizontal. Suponha que o esquiador se desloca no sentido negativo de um eixo x orientado ao longo da rampa. O vento exerce uma força sobre o esquiador de componente F_x. Quanto vale F_x se o módulo da velocidade do esquiador (a) é constante, (b) aumenta a uma taxa de 1,0 m/s² e (c) aumenta a uma taxa de 2,0 m/s²?

••39 Uma esfera com uma massa de $3{,}0 \times 10^{-4}$ kg está suspensa por uma corda. Uma brisa horizontal constante empurra a esfera de tal forma que a corda faz um ângulo de 37° com a vertical. Determine (a) a força da brisa sobre a bola e (b) a tensão da corda.

••40 Uma caixa com uma massa de 5,00 kg sobe uma rampa sem atrito que faz um ângulo θ com a horizontal. A Fig. 5-41 mostra, em função do tempo t, a componente v_x da velocidade da caixa ao longo de um eixo x orientado para cima ao longo da rampa. Qual é o módulo da força normal que a rampa exerce sobre a caixa?

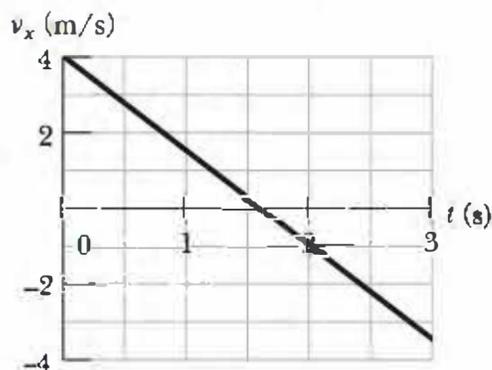



Figura 5-41 Problema 40.

••41 Usando um cabo que arrebentará se a tensão exceder 387 N, você precisa baixar uma caixa de telhas velhas com um peso de 449 N a partir de um ponto a 6,1 m acima do chão. (a) Qual é o módulo da aceleração da caixa que coloca o cabo na iminência de arrebentar? (b) Com essa aceleração, qual é a velocidade da caixa ao atingir o chão?

••42 No passado, cavalos eram usados para puxar barcaças em canais, como mostra a Fig. 5-42. Suponha que o cavalo puxa o cabo com uma força de módulo 7900 N e ângulo $\theta = 18°$ em relação à direção do movimento da barcaça, que se desloca no sentido positivo de um eixo x. A massa da barcaça é 9500 kg e o módulo da aceleração da barcaça é 0,12 m/s². Quais são (a) o módulo e (b) a orientação (em relação ao sentido positivo do eixo x) da força exercida pela água sobre a barcaça?

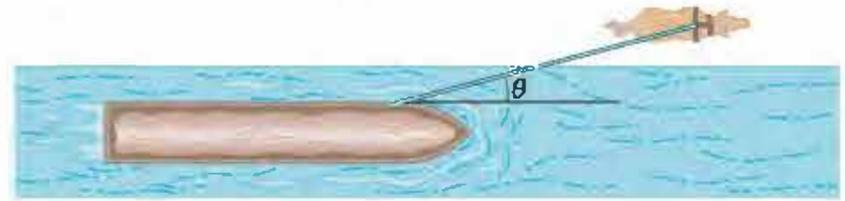



Figura 5-42 Problema 42.

••43 Na Fig. 5-43, uma corrente composta por cinco elos, cada um de massa 0,100 kg, é erguida verticalmente com uma aceleração constante de módulo $a = 2{,}50$ m/s². Determine o módulo (a) da força exercida pelo elo 2 sobre o elo 1, (b) da força exercida pelo elo 3 sobre o elo 2, (c) da força exercida pelo elo 4 sobre o elo 3 e (d) da força exercida pelo elo 5 sobre o elo 4. Determine o módulo (e) da força $\vec{F}$ exercida pela pessoa que está levantando a corrente sobre o elo 5 e (f) a força *resultante* que acelera cada elo.

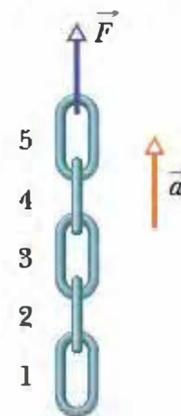



Figura 5-43 Problema 43.

••44 Uma lâmpada está pendurada verticalmente por um fio em um elevador que desce com uma desaceleração de 2,4 m/s². (a) Se a tensão do fio é 89 N, qual é a massa da lâmpada? (b) Qual é a tensão do fio quando o elevador sobe com uma aceleração de 2,4 m/s²?

••45 Um elevador que pesa 27,8 kN move-se para cima. Qual é a tensão do cabo do elevador se a velocidade (a) está aumentando a uma taxa de 1,22 m/s² e (b) está diminuindo a uma taxa de 1,22 m/s²?

••46 Um elevador é puxado para cima por um cabo. O elevador e seu único ocupante têm uma massa total de 2000 kg. Quando o ocupante deixa cair uma moeda, a aceleração da moeda em relação ao elevador é 8,00 m/s² para baixo. Qual é a tensão do cabo?

••47 A família Zacchini ficou famosa pelos números de circo em que um membro da família era disparado de um canhão com a ajuda de elásticos ou ar comprimido. Em uma versão do número, Emanuel Zacchini foi disparado por cima de três rodas gigantes e aterrissou em uma rede, na mesma altura que a boca do canhão, a 69 m de distância. Ele foi impulsionado dentro do cano por uma distância de 5,2 m e lançado com um ângulo de 53°. Se sua massa era 85 kg e ele sofreu uma aceleração constante no interior do cano, qual foi o módulo da força responsável pelo lançamento? (*Sugestão*: trate o lançamento como se acontecesse ao longo de uma rampa de 53°. Despreze a resistência do ar.)

••48 Na Fig. 5-44, os elevadores A e B estão ligados por um cabo e podem ser levantados ou baixados por outro cabo que está acima do

elevador A. A massa do elevador A é 1700 kg; a massa do elevador B é 1300 kg. O piso do elevador A sustenta uma caixa de 12,0 kg. A tensão do cabo que liga os elevadores é $1{,}91 \times 10^4$ N. Qual é o módulo da força normal que o piso do elevador A exerce sobre a caixa?

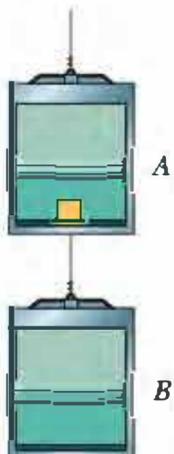



Figura 5-44 Problema 48.

••49 Na Fig. 5-45, um bloco de massa $m = 5{,}00$ kg é puxado ao longo de um piso horizontal sem atrito por uma corda que exerce uma força de módulo $F = 12{,}0$ N e ângulo $\theta = 25{,}0°$. (a) Qual é o módulo da aceleração do bloco? (b) O módulo da força F é aumentado lentamente. Qual é o valor do módulo da força imediatamente antes de o bloco perder contato com o piso? (c) Qual é o módulo da aceleração do bloco na situação do item (b)?

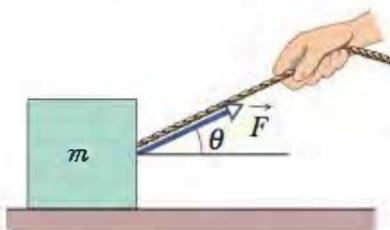



Figura 5-45 Problemas 49 e 60.

••50 Na Fig. 5-46, três caixas são conectadas por cordas, uma das quais passa por uma polia de atrito e massa desprezíveis. As massas das caixas são $m_A = 30{,}0$ kg, $m_B = 40{,}0$ kg e $m_C = 10{,}0$ kg. Quando o conjunto é liberado a partir do repouso, (a) qual é a tensão da corda que liga B a C e (b) que distância A percorre nos primeiros 0,250 s (supondo que não atinja a polia)?

Figura 5-46 Problema 50.

••51 A Fig. 5-47 mostra dois blocos ligados por uma corda (de massa desprezível) que passa por uma polia sem atrito (também de massa desprezível). O conjunto é conhecido como *máquina de Atwood*. Um bloco tem massa $m_1 = 1{,}30$ kg; o outro tem massa $m_2 = 2{,}80$ kg. Quais são (a) o módulo da aceleração dos blocos e (b) a tensão da corda?

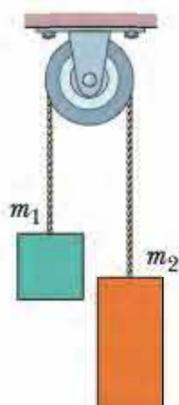



Figura 5-47 Problemas 51 e 65.

••52 Um homem de 85 kg desce de uma altura de 10,0 m em relação ao solo pendurado em uma corda que passa por uma roldana sem atrito e está presa na outra extremidade a um saco de areia de 65 kg. Com que velocidade o homem atinge o solo se partiu do repouso?

••53 Na Fig. 5-48, três blocos conectados são puxados para a direita sobre uma mesa horizontal sem atrito por uma força de módulo $T_3 = 65{,}0$ N. Se $m_1 = 12{,}0$ kg, $m_2 = 24{,}0$ kg e $m_3 = 31{,}0$ kg, calcule (a) o módulo da aceleração do sistema, (b) a tensão T_1 e (c) a tensão T_2.

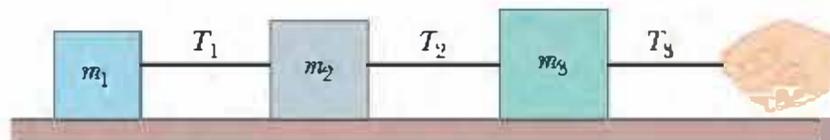



Figura 5-48 Problema 53.

••54 A Fig. 5-49 mostra quatro pinguins que estão sendo puxados sobre gelo muito escorregadio (sem atrito) por um zelador. As massas de três pinguins e as tensões em duas das cordas são $m_1 = 12$ kg, $m_3 = 15$ kg, $m_4 = 20$ kg, $T_2 = 111$ N e $T_4 = 222$ N. Determine a massa do pinguim m_2, que não é dada.

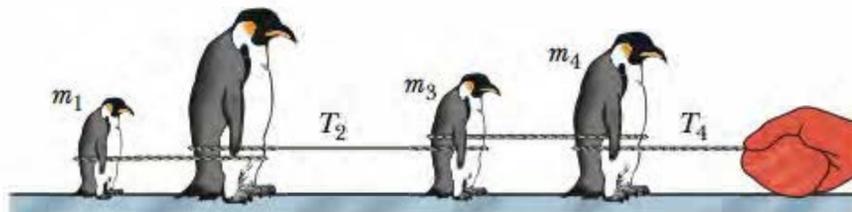



Figura 5-49 Problema 54.

••55 Dois blocos estão em contato em uma mesa sem atrito. Uma força horizontal é aplicada ao bloco maior, como mostra a Fig. 5-50. (a) Se $m_1 = 2{,}3$ kg, $m_2 = 1{,}2$ kg e $F = 3{,}2$ N, determine o módulo da força entre os dois blocos. (b) Mostre que se uma força de mesmo módulo F for aplicada ao menor dos blocos no sentido oposto, o módulo da força entre os blocos será 2,1 N, que não é o mesmo valor calculado no item (a). (c) Explique a razão da diferença.

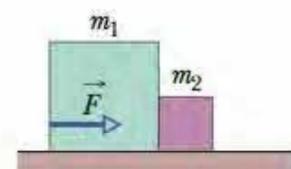



Figura 5-50 Problema 55.

••56 Na Fig. 5-51a, uma força horizontal constante $\vec{F}_a$ é aplicada ao bloco A, que empurra um bloco B com uma força de 20,0 N dirigida horizontalmente para a direita. Na Fig. 5-51b, a mesma força $\vec{F}_a$ é aplicada ao bloco B; desta vez, o bloco A empurra o bloco B com uma força de 10,0 N dirigida horizontalmente para a esquerda. Os blocos têm uma massa total de 12,0 kg. Quais são os módulos (a) da aceleração na Fig. 5-51a e (b) da força $\vec{F}_a$?

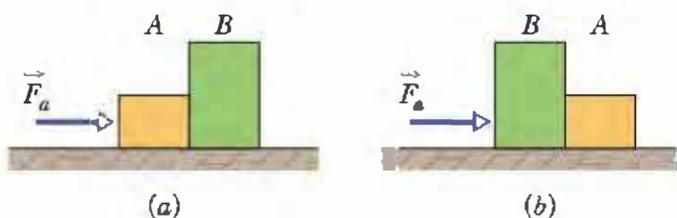



Figura 5-51 Problema 56.

••57 Um bloco de massa $m_1 = 3{,}70$ kg sobre um plano sem atrito inclinado, de ângulo $\theta = 30{,}0°$, está preso por uma corda de massa desprezível, que passa por uma polia de massa e atrito desprezíveis, a um outro bloco de massa $m_2 = 2{,}30$ kg (Fig. 5-52). Quais são (a)

o módulo da aceleração de cada bloco, (b) o sentido da aceleração do bloco que está pendurado e (c) a tensão da corda?

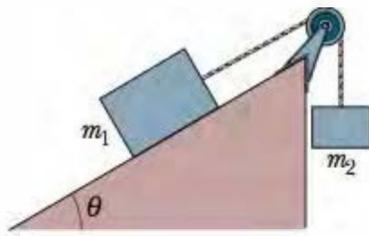



Figura 5-52 Problema 57.

••**58** A Fig. 5-53 mostra um homem sentado em uma cadeira presa a uma corda de massa desprezível que passa por uma roldana de massa e atrito desprezíveis e desce de volta às mãos do homem. A massa total do homem e da cadeira é 95,0 kg. Qual é o módulo da força com a qual o homem deve puxar a corda para que a cadeira suba (a) com velocidade constante e (b) com uma aceleração para cima de 1,30 m/s²? (*Sugestão*: um diagrama de corpo livre pode ajudar bastante.) Se no lado direito a corda se estende até o solo e é puxada por outra pessoa, qual é o módulo da força com a qual essa pessoa deve puxar a corda para que o homem suba (c) com velocidade constante e (d) com uma aceleração para cima de 1,30 m/s²? Qual é o módulo da força que a polia exerce sobre o teto (e) no item a, (f) no item b, (g) no item c e (h) no item d?

Figura 5-53 Problema 58.

••**59** Um macaco de 10 kg sobe em uma árvore por uma corda de massa desprezível que passa por um galho sem atrito e está presa na outra extremidade a um caixote de 15 kg, inicialmente em repouso no solo (Fig. 5-54). (a) Qual é o módulo da menor aceleração que o macaco deve ter para levantar o caixote? Se, após o caixote ter sido erguido, o macaco parar de subir e se agarrar à corda, quais são (b) o módulo e (c) o sentido da aceleração do macaco e (d) a tensão da corda?

Figura 5-54 Problema 59.

••**60** A Fig. 5-45 mostra um bloco de 5,00 kg sendo puxado em um piso sem atrito por uma corda que aplica uma força de módulo constante de 20,0 N e um ângulo $\theta(t)$ que varia com o tempo. Quando o ângulo θ chega a 25°, qual é a taxa de variação da aceleração do bloco se (a) $\theta(t) = (2{,}00 \times 10^{-2}$ graus/s)t e (b) $\theta(t) = -(2{,}00 \times 10^{-2}$ graus/s)t? (*Sugestão:* Transforme os graus em radianos.)

••**61** Um balão de ar quente de massa M desce verticalmente com uma aceleração para baixo de módulo a. Que massa (lastro) deve ser jogada para fora para que o balão tenha uma aceleração para cima de módulo a? Suponha que a força vertical para cima do ar quente sobre o balão não muda com a perda de massa.

•••**62** No arremesso de peso, muitos atletas preferem lançar o peso com um ângulo menor que o ângulo teórico (cerca de 42°) para o qual a distância é máxima para um peso arremessado com a mesma velocidade e da mesma altura. Uma razão tem a ver com a velocidade que o atleta pode imprimir ao peso durante a fase de aceleração. Suponha que um peso de 7.260 kg é acelerado ao longo de uma trajetória reta com 1,650 m de comprimento por uma força constante de módulo 380,0 N, começando com uma velocidade de 2,500 m/s (devido ao movimento preparatório do atleta). Qual é a velocidade do peso no final da fase de aceleração se o ângulo entre a trajetória e a horizontal é (a) 30,00° e (b) 42,00°? (*Sugestão:* trate o movimento como se fosse ao longo de uma rampa com o ângulo dado.) (c) Qual é a redução percentual da velocidade de lançamento se o atleta aumenta o ângulo de 30,00° para 42,00°?

•••**63** A Fig. 5-55 mostra, em função do tempo, a componente F_x da força que age sobre um bloco de gelo de 3,0 kg que pode se deslocar apenas ao longo do eixo x. Em $t = 0$, o bloco está se movendo no sentido positivo do eixo, com uma velocidade de 3,0 m/s. Quais são (a) o módulo da velocidade do bloco e (b) o sentido do movimento do bloco no instante $t = 11$ s?

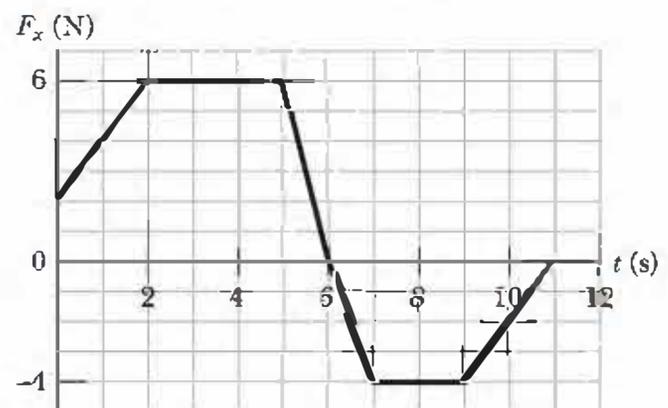



Figura 5-55 Problema 63.

•••**64** A Fig. 5-56 mostra uma caixa de massa $m_2 = 1{,}0$ kg sobre um plano inclinado sem atrito de ângulo $\theta = 30°$. Ela está ligada por uma corda de massa desprezível a uma caixa de massa $m_1 = 3{,}0$ kg sobre uma superfície horizontal sem atrito. A polia não tem atrito e sua massa é desprezível. (a) Se o módulo da força horizontal $\vec{F}$ é 2,3 N, qual é a tensão da corda? (b) Qual é o maior valor que o módulo de $\vec{F}$ pode ter sem que a corda fique frouxa?

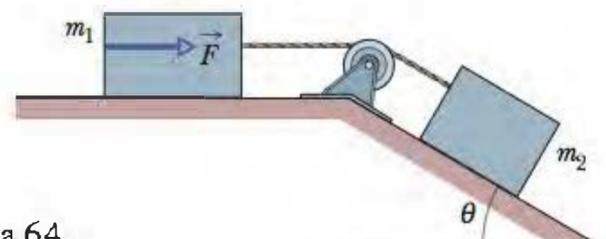



Figura 5-56 Problema 64.

•••**65** A Fig. 5-47 mostra uma *máquina de Atwood*, na qual dois recipientes estão ligados por uma corda (de massa desprezível) que

passa por uma polia sem atrito (também de massa desprezível). No instante $t = 0$, o recipiente 1 tem uma massa de 1,30 kg e o recipiente 2 tem uma massa de 2,80 kg, mas o recipiente 1 está perdendo massa (por causa de um vazamento) a uma taxa constante de 0,200 kg/s. Com que taxa o módulo da aceleração dos recipientes está variando (a) em $t = 0$ e (b) em $t = 3{,}00$ s? (c) Em que instante a aceleração atinge o valor máximo?

•••66 A Fig. 5-57 mostra parte de um teleférico. A massa máxima permitida de cada cabina com passageiros é 2800 kg. As cabinas, que estão penduradas em um cabo de sustentação, são puxadas por um segundo cabo ligado à torre de sustentação de cada cabina. Suponha que os cabos estão esticados e inclinados de um ângulo $\theta = 35°$. Qual é a diferença entre as tensões de trechos contíguos do cabo que puxa as cabinas se elas estão com a máxima massa permitida e estão sendo aceleradas para cima a 0,81 m/s^2?

Figura 5-57 Problema 66.

•••67 A Fig. 5-58 mostra três blocos ligados por cordas que passam por polias sem atrito. O bloco B está sobre uma mesa sem atrito; as massas são $m_A = 6{,}00$ kg, $m_B = 8{,}00$ kg e $m_C = 10{,}0$ kg. Qual é a tensão da corda da direita quando os blocos são liberados?

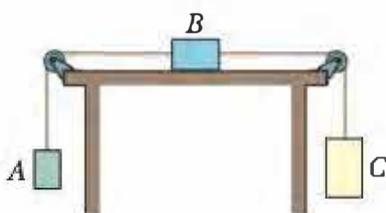



Figura 5-58 Problema 67.

•••68 Um arremessador de peso lança um peso de 7260 kg empurrando-o ao longo de uma linha reta com 1650 m de comprimento e um ângulo de 34,10° com a horizontal, acelerando o peso até a velocidade de lançamento de 2,500 m/s (que se deve ao movimento preparatório do atleta). O peso deixa a mão do arremessador a uma altura de 2,110 m e com um ângulo de 34,10° e percorre uma distância horizontal de 15,90 m. Qual é o módulo da força média que o atleta exerce sobre o peso durante a fase de aceleração? (*Sugestão:* trate o movimento durante a fase de aceleração como se fosse ao longo de uma rampa com o ângulo dado.)

Problemas Adicionais

69 Na Fig. 5-59, o bloco A de 4,0 kg e o bloco B de 6,0 kg estão conectados por uma corda de massa desprezível. A força $\vec{F}_A = (12\text{ N})\hat{\text{i}}$ atua sobre o bloco A; a força $\vec{F}_B = (24\text{ N})\hat{\text{i}}$ atua sobre o bloco B. Qual é a tensão da corda?

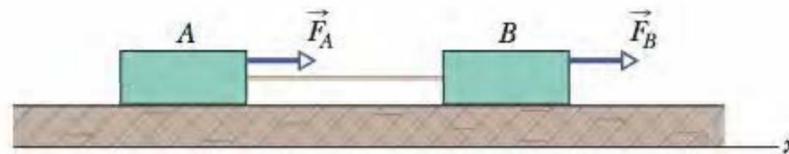



Figura 5-59 Problema 69.

70 Um homem de 80 kg salta para um pátio de concreto de uma janela a 0,50 m de altura. Ele não dobra os joelhos para amortecer o impacto e leva 2,0 cm para parar. (a) Qual é a aceleração média desde o instante em que os pés do homem tocam o solo até o instante em que o corpo se imobiliza? (b) Qual é o módulo da força média que o pátio exerce sobre o homem?

71 A Fig. 5-60 mostra uma caixa de dinheiro sujo (massa $m_1 = 3{,}0$ kg) sobre um plano inclinado sem atrito de ângulo $\theta_1 = 30°$. A caixa está ligada por uma corda de massa desprezível a uma caixa de dinheiro lavado (massa $m_2 = 2{,}0$ kg) situada sobre um plano inclinado sem atrito de ângulo $\theta_2 = 60°$. A polia não tem atrito e a massa é desprezível. Qual é a tensão da corda?

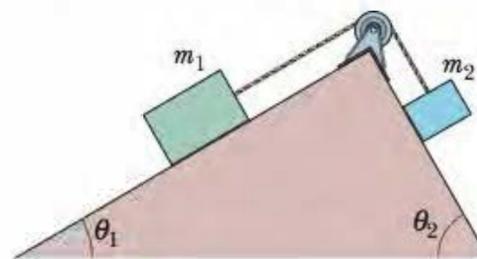



Figura 5-60 Problema 71.

72 Três forças atuam sobre uma partícula que se move com velocidade constante $\vec{v} = (2\text{ m/s})\hat{\text{i}} - (7\text{ m/s})\hat{\text{j}}$. Duas das forças são $\vec{F}_1 = (2\text{ N})\hat{\text{i}} + (3\text{ N})\hat{\text{j}} + (-2\text{ N})\hat{\text{k}}$ e $\vec{F}_2 = (-5\text{ N})\hat{\text{i}} + (8\text{ N})\hat{\text{j}} + (-2\text{ N})\hat{\text{k}}$. Qual é a terceira força?

73 Na Fig. 5-61, uma lata de antioxidantes ($m_1 = 1{,}0$ kg) sobre um plano inclinado sem atrito está ligada a uma lata de apresuntado ($m_2 = 2{,}0$ kg). A polia tem massa e atrito desprezíveis. Uma força vertical para cima de módulo $F = 6{,}0$ N atua sobre a lata de apresuntado, que tem uma aceleração para baixo de 5,5 m/s^2. Determine (a) a tensão da corda e (b) o ângulo β.

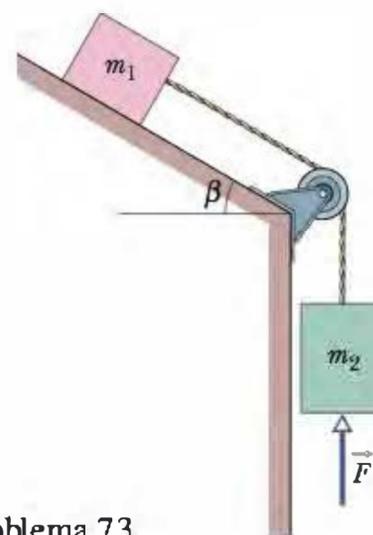



Figura 5-61 Problema 73.

74 As duas únicas forças que agem sobre um corpo têm módulos de 20 N e 35 N e direções que diferem de 80°. A aceleração resultante tem um módulo de 20 m/s^2. Qual é a massa do corpo?

75 A Fig. 5-62 é uma vista superior de um pneu de 12 kg que está sendo puxado por três cordas horizontais. A força de uma das cordas ($F_1 = 50$ N) está indicada. As outras duas forças devem ser orientadas de tal forma que o módulo a da aceleração do pneu seja

o menor possível. Qual é o menor valor de a se (a) $F_2 = 30$ N, $F_3 = 20$ N; (b) $F_2 = 30$ N, $F_3 = 10$ N; (c) $F_2 = F_3 = 30$ N?

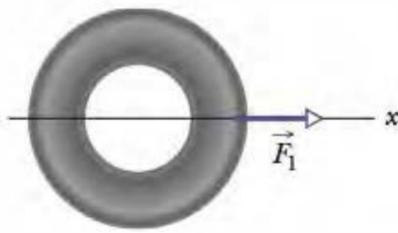



Figura 5-62 Problema 75.

76 Um bloco de massa M é puxado ao longo de uma superfície horizontal sem atrito por uma corda de massa m, como mostra a Fig. 5-63. Uma força horizontal $\vec{F}$ age sobre uma das extremidades da corda. (a) Mostre que a corda *deve* ficar frouxa, mesmo que imperceptivelmente. Supondo que a curvatura da corda seja desprezível, determine (b) a aceleração da corda e do bloco, (c) a força da corda sobre o bloco e (d) a tensão no ponto médio da corda.

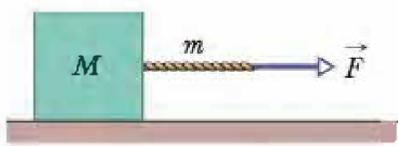



Figura 5-63 Problema 76.

77 Um operário arrasta um caixote no piso de uma fábrica puxando-o por uma corda. O operário exerce uma força de módulo $F = 450$ N sobre a corda, que está inclinada de um ângulo $\theta = 38°$ em relação à horizontal, e o chão exerce uma força horizontal de módulo $f = 125$ N que se opõe ao movimento. Calcule o módulo da aceleração do caixote (a) se a massa do caixote é 310 kg e (b) se o peso do caixote é 310 N.

78 Na Fig. 5-64, uma força $\vec{F}$ de módulo 12 N é aplicada a uma caixa de massa $m_2 = 1{,}0$ kg. A força é dirigida para cima paralelamente a um plano inclinado de ângulo $\theta = 37°$. A caixa está ligada por uma corda a outra caixa de massa $m_1 = 3{,}0$ kg situada sobre o piso. O plano inclinado, o piso e a polia não têm atrito e as massas da polia e da corda são desprezíveis. Qual é a tensão da corda?

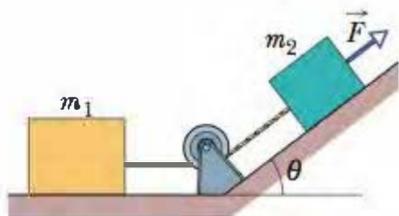



Figura 5-64 Problema 78.

79 Uma certa partícula tem um peso de 22 N em um local onde $g = 9{,}8$ m/s². Quais são (a) o peso e (b) a massa da partícula em um local onde $g = 4{,}9$ m/s²? Quais são (c) o peso e (d) a massa da partícula se a ela é deslocada para um ponto do espaço sideral onde $g = 0$?

80 Uma pessoa de 80 kg salta de paraquedas e experimenta uma aceleração para baixo de 2,5 m/s². A massa do paraquedas é 5,0 kg. (a) Qual é a força para cima que o ar exerce sobre o paraquedas? (b) Qual é a força que a pessoa exerce sobre o paraquedas?

81 Uma espaçonave decola verticalmente da Lua, onde $g = 1{,}6$ m/s². Se a nave tem uma aceleração vertical para cima de 1,0 m/s² no instante da decolagem, qual é o módulo da força exercida pela nave sobre o piloto, que pesa 735 N na Terra?

82 Na vista superior da Fig. 5-65, cinco forças puxam uma caixa de massa $m = 4{,}0$ kg. Os módulos das forças são $F_1 = 11$ N, $F_2 = 17$ N, $F_3 = 3{,}0$ N, $F_4 = 14$ N e $F_5 = 5{,}0$ N; o ângulo θ_4 é 30°. Determine a aceleração da caixa (a) em termos dos vetores unitários e como (b) um módulo e (c) um ângulo em relação ao sentido positivo do eixo x.

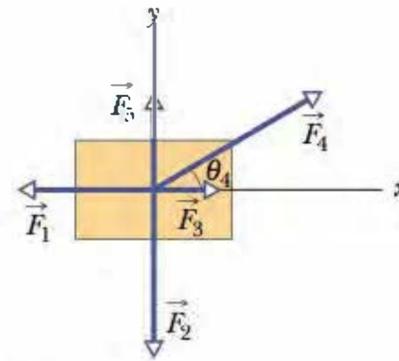



Figura 5-65 Problema 82.

83 Uma certa força imprime a um objeto de massa m_1 uma aceleração de 12,0 m/s² e a um objeto de massa m_2 uma aceleração de 3,30 m/s². Que aceleração essa mesma força imprimiria a um objeto de massa (a) $m_2 - m_1$ e (b) $m_2 + m_1$?

84 Você puxa um pequeno refrigerador com uma força constante $\vec{F}$ em um piso encerado (sem atrito), com $\vec{F}$ na horizontal (caso 1) ou com $\vec{F}$ inclinada para cima de um ângulo θ (caso 2). (a) Qual é a razão entre a velocidade do refrigerador no caso 2 e a velocidade no caso 1 se você puxa o refrigerador por um certo tempo t? (b) Qual é essa razão se você puxa o refrigerador ao longo de uma certa distância d?

85 Um artista de circo de 52 kg deve descer escorregando por uma corda que arrebentará se a tensão exceder 425 N. (a) O que acontece se o artista fica imóvel pendurado na corda? (b) Para que módulo de aceleração a corda está prestes a arrebentar?

86 Calcule o peso de um astronauta de 75 kg (a) na Terra, (b) em Marte, onde $g = 3{,}7$ m/s², e (c) no espaço sideral, onde $g = 0$. (d) Qual é a massa do astronauta em cada um desses lugares?

87 Um objeto está pendurado em uma balança de mola presa ao teto de um elevador. A balança indica 65 N quando o elevador está parado. Qual é a leitura da balança quando o elevador está subindo (a) com uma velocidade constante de 7,6 m/s e (b) com uma velocidade de 7,6 m/s e uma desaceleração de 2,4 m/s²?

88 Imagine uma espaçonave prestes a aterrissar na superfície de Calisto, uma das luas de Júpiter. Se o motor fornece uma força para cima (empuxo) de 3260 N, a espaçonave desce com velocidade constante; se o motor fornece apenas 2200 N, a espaçonave desce com uma aceleração de 0,39 m/s². (a) Qual é o peso da espaçonave nas vizinhanças da superfície de Calisto? (b) Qual é a massa da aeronave? (c) Qual é o módulo da aceleração em queda livre próximo à superfície de Calisto?

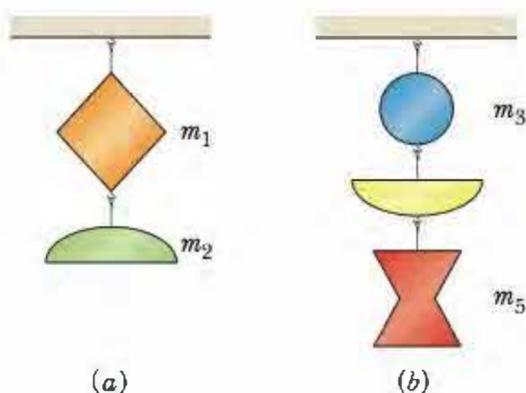
89 Uma turbina a jato de 1400 kg é presa à fuselagem de um avião comercial por apenas três parafusos (esta é a prática comum). Suponha que cada parafuso suporte um terço da carga. (a) Calcule a força a que cada parafuso é submetido enquanto o avião está parado na pista, aguardando permissão para decolar. (b) Durante o voo, o avião encontra uma turbulência que provoca uma aceleração brusca para cima de 2,6 m/s². Calcule a força a que é submetido cada parafuso durante essa aceleração.

90 Uma nave interestelar tem uma massa de $1{,}20 \times 10^6$ kg e está inicialmente em repouso em relação a um sistema estelar. (a) Que aceleração constante é necessária para levar a nave até a velocidade de $0{,}10c$ (onde $c = 3{,}0 \times 10^8$ m/s é a velocidade da luz) em relação ao sistema estelar em 3,0 dias? (b) Qual é o valor dessa aceleração em unidades de g? (c) Que força é necessária para essa aceleração?

(d) Se os motores são desligados quando a velocidade de $0,10c$ é atingida (fazendo com que a velocidade permaneça constante desse momento em diante), quanto tempo leva a nave (a partir do instante inicial) para viajar 5,0 meses-luz, a distância percorrida pela luz em 5,0 meses?

91 Uma motocicleta e seu piloto de 60,0 kg aceleram a 3,0 m/s^2 para subir uma rampa inclinada de 10° em relação à horizontal. Quais são os módulos (a) da força resultante a que é submetido o piloto e (b) da força que a motocicleta exerce sobre o piloto?

92 Calcule a aceleração inicial para cima de um foguete de massa $1,3 \times 10^4$ kg se a força inicial para cima produzida pelos motores (empuxo) é $2,6 \times 10^5$ N. Não despreze a força gravitacional a que o foguete está submetido.

93 A Fig. 5-66*a* mostra um móbile pendurado no teto; ele é composto por duas peças de metal ($m_1 = 3,5$ kg e $m_2 = 4,5$ kg) ligadas por cordas de massa desprezível. Qual é a tensão (a) da corda de baixo e (b) da corda de cima? A Fig. 5-66*b* mostra um móbile composto de três peças metálicas. Duas das massas são $m_3 = 4,8$ kg e $m_5 = 5,5$ kg. A tensão da corda de cima é 199 N. Qual é a tensão (c) da corda de baixo e (d) da corda do meio?

94 Por esporte, um tatu de 12 kg escorrega em um grande lago gelado, plano e sem atrito. A velocidade inicial do tatu é 5,0 m/s no sentido positivo do eixo x. Considere a posição inicial do tatu sobre o gelo como a origem. O animal escorrega sobre o gelo ao mesmo tempo em que é empurrado pelo vento com uma força de 17 N no sentido positivo do eixo y. Em termos dos vetores unitários, quais são (a) o vetor velocidade e (b) o vetor posição do tatu depois de deslizar por 3,0 s?

95 Suponha que na Fig. 5-12 as massas dos blocos sejam 2,0 kg e 4,0 kg. (a) Qual dessas massas deve ser a do bloco pendurado para que a aceleração seja a maior possível? Quais são nesse caso (b) o módulo da aceleração e (c) a tensão da corda?

96 Para capturar um nêutron livre, um núcleo deve fazê-lo parar em uma distância menor que o diâmetro do núcleo através da *interação forte*, a força responsável pela estabilidade dos núcleos atômicos, que é praticamente nula fora do núcleo. Suponha que, para ser capturado por um núcleo com um diâmetro $d = 1,0 \times 10^{-14}$ m, um nêutron livre deva ter uma velocidade inicial menor ou igual a $1,4 \times 10^7$ m/s. Supondo que a força a que está sujeito o nêutron no interior do núcleo é constante, determine o módulo da interação forte. A massa do nêutron é $1,67 \times 10^{-27}$ kg.

m_1 m_2 (*a*)

m_3 m_5 (*b*)

Figura 5-66 Problema 93.

CAPÍTULO

6

FORÇA E MOVIMENTO – II

6-1 O QUE É FÍSICA?

Neste capítulo, concentramos nossa atenção na física de três tipos comuns de força: a força de atrito, a força de arrasto e a força centrípeta. Ao preparar um carro para as 500 milhas de Indianápolis, um mecânico deve levar em conta os três tipos de força. As forças de atrito que agem sobre os pneus são cruciais para a aceleração do carro ao deixar o boxe e ao sair das curvas (se o carro encontra uma mancha de óleo, os pneus perdem aderência e o carro pode sair da pista). As forças de arrasto produzidas pelas correntes de ar devem ser minimizadas, caso contrário o carro consumirá muito combustível e terá que ser reabastecido prematuramente (uma parada adicional de apenas 14 s pode custar a corrida a um piloto). As forças centrípetas são fundamentais nas curvas (se não houver força centrípeta suficiente, o carro não conseguirá fazer a curva). Vamos iniciar nossa discussão com as forças de atrito.

6-2 Atrito

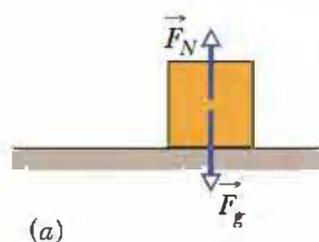
As forças de atrito são inevitáveis na vida diária. Se não fôssemos capazes de vencê-las, fariam parar todos os objetos que estivessem se movendo e todos os eixos que estivessem girando. Cerca de 20% da gasolina consumida por um automóvel são usados para compensar o atrito das peças do motor e da transmissão. Por outro lado, se não houvesse atrito, não poderíamos fazer o automóvel ir a lugar algum nem poderíamos caminhar ou andar de bicicleta. Não poderíamos segurar um lápis, e, mesmo que pudéssemos, não conseguiríamos escrever. Pregos e parafusos seriam inúteis, os tecidos se desmanchariam e os nós se desatariam.

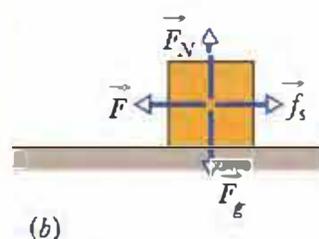
Neste capítulo tratamos de forças de atrito que existem entre duas superfícies sólidas estacionárias ou que se movem uma em relação à outra em baixa velocidade. Considere três experimentos imaginários simples:

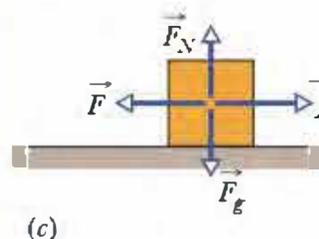
1. Dê um empurrão momentâneo em um livro, fazendo-o deslizar sobre uma mesa. Com o tempo, a velocidade do livro diminui até se anular. Isso significa que o livro sofreu uma aceleração paralela à superfície da mesa, com o sentido oposto ao da velocidade. De acordo com a segunda lei de Newton, deve ter existido uma força, paralela à superfície da mesa, com o sentido oposto ao da velocidade do livro. Essa força é uma força de atrito.
2. Empurre o livro horizontalmente de modo a fazê-lo se deslocar com velocidade constante ao longo da mesa. A força que você está exercendo pode ser a única força horizontal que age sobre o livro? Não, porque, nesse caso, o livro sofreria uma aceleração. De acordo com a segunda lei de Newton, deve existir uma segunda força, de sentido contrário ao da força aplicada por você, mas com o mesmo módulo, que equilibra a primeira força. Essa segunda força é uma força de atrito, paralela à superfície da mesa.
3. Empurre um caixote pesado paralelamente ao chão. O caixote não se move. De acordo com a segunda lei de Newton, uma segunda força deve estar atuando sobre o caixote para se opor à força que você está aplicando. Essa segunda força tem o mesmo módulo que a força que você aplicou, mas atua em sentido contrário, de

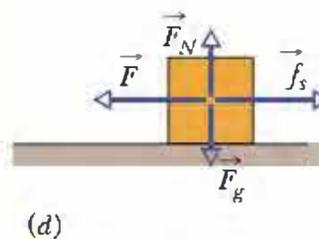
forma que as duas forças se equilibram. Essa segunda força é uma força de atrito. Empurre com mais força. O caixote continua parado. Isso significa que a força de atrito pode aumentar de intensidade para continuar equilibrando a força aplicada. Empurre com mais força ainda. O caixote começa a deslizar. Evidentemente, existe uma intensidade máxima para a força de atrito. Quando você excedeu essa intensidade máxima, o caixote começou a se mover.

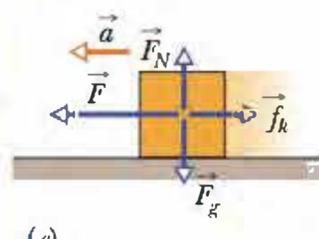
A Fig. 6-1 mostra uma situação semelhante. Na Fig. 6-1*a*, um bloco está em repouso sobre uma mesa, com a força gravitacional $\vec{F}_g$ equilibrada pela força normal

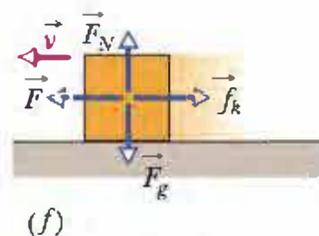
Como não é aplicada nenhuma força horizontal, não há atrito e não há movimento.

(*a*) Força de atrito = 0

A força aplicada $\vec{F}$ é equilibrada pela força de $\vec{f}_s$. Não há movimento.

(*b*) Força de atrito = *F*

A força aplicada é maior, mas continua a ser equilibrada pela força de atrito. Não há movimento.

(*c*) Força de atrito = *F*

A força aplicada é ainda maior, mas continua a ser equilibrada pela força de atrito. Não há movimento.

(*d*) Força de atrito = *F*

Finalmente, a força aplicada supera a força de atrito estático. O bloco começa a se mover e sofre uma aceleração.

(*e*) Força de atrito cinético < *F*

Para manter a velocidade constante, é preciso reduzir a força aplicada, já que a força de atrito agora é menor.

(*f*) A força de atrito cinético não muda

A força de atrito estático aumenta para equilibrar a força aplicada.

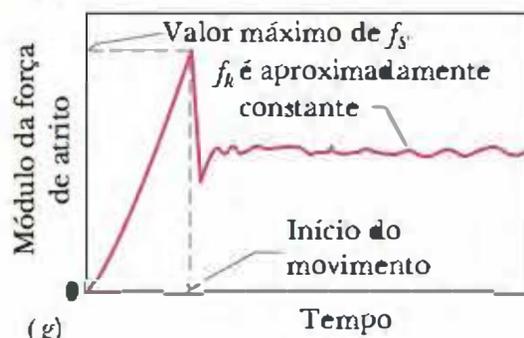
(*g*) Valor máximo de f_s; f_k é aproximadamente constante; Início do movimento; Módulo da força de atrito; Tempo

O valor da força de atrito cinético não depende da força aplicada.

Figura 6-1 (*a*) As forças que agem sobre um bloco estacionário. (*b*–*d*) Uma força externa $\vec{F}$, aplicada ao bloco, é equilibrada por uma força de atrito estático $\vec{f}_s$. Quando $\vec{F}$ aumenta, f_s também aumenta, até atingir um certo valor máximo. (*e*) O bloco então "se desprende", acelerando subitamente na direção de $\vec{F}$. (*f*) Para que o bloco se mova com velocidade constante, é preciso reduzir o valor de *F*. (*g*) Alguns resultados experimentais para a sequência da (*a*) a (*f*).

$\vec{F}_N$. Na Fig. 6-1*b*, você exerce uma força $\vec{F}$ sobre o bloco, tentando puxá-lo para a esquerda. Em resposta, surge uma força de atrito $\vec{f}_s$ para a direita, que equilibra a força que você aplicou. A força $\vec{f}_s$ é chamada de **força de atrito estático**. O bloco permanece imóvel.

As Figs. 6-1*c* e 6-1*d* mostram que, à medida que você aumenta a intensidade da força aplicada, a intensidade da força de atrito estático $\vec{f}_s$ também aumenta e o bloco permanece em repouso. Entretanto, quando a força aplicada atinge uma certa intensidade, o bloco "se desprende" da superfície da mesa e sofre uma aceleração para a esquerda (Fig. 6-1*e*). A força de atrito $\vec{f}_k$ que se opõe ao movimento na nova situação é chamada de **força de atrito cinético**.

Em geral, a intensidade da força de atrito cinético, que age sobre os objetos em movimento, é menor do que a intensidade máxima da força de atrito estático, que age sobre os objetos em repouso. Assim, para que o bloco se mova sobre a superfície com velocidade constante, provavelmente você terá que diminuir a intensidade da força aplicada depois que o bloco começar a se mover, como mostra a Fig. 6-1*f*. A Fig. 6-1*g* mostra o resultado de um experimento no qual a força aplicada a um bloco foi aumentada lentamente até que o bloco começasse a se mover. Observe que a força necessária para manter o bloco em movimento com velocidade constante é menor que a necessária para que o bloco comece a se mover.

A força de atrito é, na verdade, a soma vetorial de muitas forças que agem entre os átomos da superfície de um corpo e os átomos da superfície do outro corpo. Se duas superfícies metálicas polidas e limpas são colocadas em contato em alto vácuo (para que continuem limpas), torna-se impossível fazer uma deslizar em relação à outra. Como as superfícies são lisas, muitos átomos de uma das superfícies entram em contato com muitos átomos da outra e as superfícies se *soldam a frio*, formando uma única peça de metal. Se dois blocos de metal, muito polidos, usados para calibrar tornos, são colocados em contato no ar, existe menos contato entre os átomos, mas, mesmo assim, os blocos aderem firmemente e só podem ser separados por um movimento de torção. Em geral, porém, esse grande número de contatos entre átomos não existe. Mesmo uma superfície metálica altamente polida está longe de ser uma superfície plana em escala atômica. Além disso, a superfície dos objetos comuns possui uma camada de óxidos e outras impurezas que reduzem a soldagem a frio.

Quando duas superfícies comuns são colocadas em contato, somente os pontos mais salientes se tocam. (É como se virássemos os Alpes Suíços de cabeça para baixo e os colocássemos em contato com os Alpes Austríacos.) A área *microscópica* de contato é muito menor que a aparente área de contato *macroscópica*, possivelmente 10^4 vezes menor. Mesmo assim, muitos pontos de contato se soldam a frio. Essas soldas são responsáveis pelo atrito estático que surge quando uma força aplicada tenta fazer uma superfície deslizar em relação à outra.

Se a força aplicada é suficiente para fazer uma das superfícies deslizar, ocorre uma ruptura das soldas (no instante em que começa o movimento) seguida por um processo contínuo de formação e ruptura de novas soldas enquanto ocorre o movimento relativo e novos contatos são formados aleatoriamente (Fig. 6-2). A força de atrito cinético $\vec{f}_k$ que se opõe ao movimento é a soma vetorial das forças produzidas por esses contatos aleatórios.

Se as duas superfícies são pressionadas uma contra a outra com mais força, mais pontos se soldam a frio. Nesse caso, para fazer as superfícies deslizarem uma em relação à outra, é preciso aplicar uma força maior, ou seja, o valor da força de atrito estático $\vec{f}_s$ é maior. Se as superfícies estão deslizando uma em relação à outra, passam a existir mais pontos momentâneos de soldagem a frio, de modo que a força de atrito cinético $\vec{f}_k$ também é maior.

Frequentemente, o movimento de deslizamento de uma superfície em relação à outra ocorre "aos solavancos" porque os processos de soldagem e ruptura se alternam. Esses processos repetitivos de *aderência e deslizamento* podem produzir sons desagradáveis, como o cantar de pneus no asfalto, o barulho de uma unha arranhando

(*a*)

(*b*)

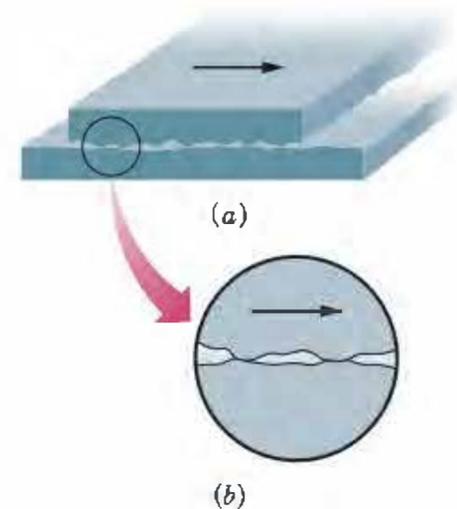



Figura 6-2 Mecanismo responsável pela força de atrito cinético. (*a*) A placa de cima está deslizando para a direita em relação à placa de baixo. (*b*) Nesta vista ampliada são mostrados dois pontos onde ocorreu soldagem a frio. É necessária uma força para romper as soldas e manter o movimento.

um quadro-negro e o rangido de uma dobradiça enferrujada. Podem também produzir sons melodiosos, como o de um violino bem tocado.

6-3 Propriedades do Atrito

A experiência mostra que, quando um corpo seco não lubrificado pressiona uma superfície nas mesmas condições e uma força $\vec{F}$ tenta fazer o corpo deslizar ao longo da superfície, a força de atrito resultante possui três propriedades:

Propriedade 1. Se o corpo não se move, a força de atrito estático $\vec{f}_s$ e a componente de $\vec{F}$ paralela à superfície se equilibram. As duas forças têm módulos iguais e $\vec{f}_s$ tem o sentido oposto ao da componente de $\vec{F}$.

Propriedade 2. O módulo de $\vec{f}_s$ possui um valor máximo $f_{s,\text{máx}}$ que é dado por

$$f_{s,\text{máx}} = \mu_s F_N, \tag{6-1}$$

onde μ_s é o **coeficiente de atrito estático** e F_N é o módulo da força normal que a superfície exerce sobre o corpo. Se o módulo da componente de $\vec{F}$ paralela à superfície excede $f_{s,\text{máx}}$, o corpo começa a deslizar sobre a superfície.

Propriedade 3. Se o corpo começa a deslizar sobre a superfície, o módulo da força de atrito diminui rapidamente para um valor f_k dado por

$$f_k = \mu_k F_N, \tag{6-2}$$

onde μ_k é o **coeficiente de atrito cinético**. Daí em diante, durante o deslizamento, uma força de atrito cinético $\vec{f}_k$ de módulo dado pela Eq. 6-2 se opõe ao movimento.

O módulo F_N da força normal aparece nas propriedades 2 e 3 como uma medida da força com a qual o corpo pressiona a superfície. De acordo com a terceira lei de Newton, se o corpo pressiona com mais força, F_N é maior. As propriedades 1 e 2 foram expressas em termos de uma única força aplicada $\vec{F}$, mas também são válidas para a resultante de várias forças aplicadas ao corpo. As Eqs. 6-1 e 6-2 *não são* equações vetoriais; os vetores $\vec{f}_s$ e $\vec{f}_k$ são sempre paralelos à superfície e têm o sentido oposto ao da tendência de deslizamento; o vetor $\vec{F}_N$ é perpendicular à superfície.

Os coeficientes μ_s e μ_k são adimensionais e devem ser determinados experimentalmente. Seus valores dependem das propriedades tanto do corpo como da superfície; por isso, qualquer menção aos coeficientes de atrito costuma ser seguida pela preposição "entre", como em "o valor de μ_s *entre* um ovo e uma frigideira de Teflon é 0,04, mas o valor *entre* uma bota de alpinista e uma pedra pode chegar a 1,2". Em geral, supomos que o valor de μ_k não depende da velocidade com a qual o corpo desliza ao longo da superfície.

TESTE 1

Um bloco repousa sobre um piso. (a) Qual é o módulo da força de atrito que o piso exerce sobre o bloco? (b) Se uma força horizontal de 5 N é aplicada ao bloco, mas o bloco não se move, qual é o módulo da força de atrito? (c) Se o valor máximo $f_{s,\text{máx}}$ da força de atrito estático que age sobre o bloco é 10 N, o bloco se move quando o módulo da força aplicada horizontalmente é aumentado para 8 N? (d) E se o módulo da força for aumentado para 12 N? (e) Qual é o módulo da força de atrito no item (c)?

Exemplo

Atrito cinético, aceleração constante, rodas bloqueadas

Se as rodas de um carro ficam "bloqueadas" (impedidas de girar) durante uma frenagem de emergência, o carro desliza na pista. Pedaços de borracha arrancados dos pneus e pequenos trechos de asfalto fundido formam as "marcas de derrapagem" que revelam a ocorrência de uma soldagem a frio. O recorde de marcas de derrapagem em via pública

foi estabelecido em 1960 pelo motorista de um Jaguar na rodovia M1, na Inglaterra (Fig. 6-3*a*): as marcas tinham 290 m de comprimento! Supondo que $\mu_k = 0{,}60$ e que a aceleração do carro se manteve constante durante a frenagem, qual era a velocidade do carro quando as rodas ficaram bloqueadas?

IDEIAS-CHAVE

(1) Como estamos supondo que a aceleração é constante, podemos usar as equações da Tabela 2-1 para calcular a velocidade inicial do carro, v_0. (2) Se desprezarmos os efeitos do ar sobre o carro, a aceleração a se deveu apenas a uma força de atrito cinético $\vec{f}_k$ exercida pela estrada sobre o carro, no sentido oposto ao do movimento do carro, que é o sentido positivo do eixo x (Fig. 6-3*b*). Podemos relacionar essa força à aceleração escrevendo a segunda lei de Newton para as componentes x ($F_{res,x} = ma_x$) como

$$-f_k = ma, \tag{6-3}$$

onde m é a massa do carro. O sinal negativo indica o sentido da força de atrito cinético.

Cálculos De acordo com a Eq. 6-2, o módulo da força de atrito é $f_k = \mu_k F_N$, onde F_N é o módulo da força normal que a estrada exerce sobre o carro. Como o carro não está acelerando verticalmente, sabemos pela Fig. 6-3*b* e pela segunda lei de Newton que o módulo de $\vec{F}_N$ é igual ao módulo da força gravitacional $\vec{F}_g$ que age sobre o carro, que é igual a mg. Assim, $F_N = mg$.

Explicitando a na Eq. 6-3 e fazendo $f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg$, temos:

$$a = -\frac{f_k}{m} = -\frac{\mu_k mg}{m} = -\mu_k g, \tag{6-4}$$

onde o sinal negativo indica que a aceleração ocorre no sentido negativo do eixo x, o sentido oposto ao da velocidade. Em seguida, usamos a Eq. 2-16,

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0), \tag{6-5}$$

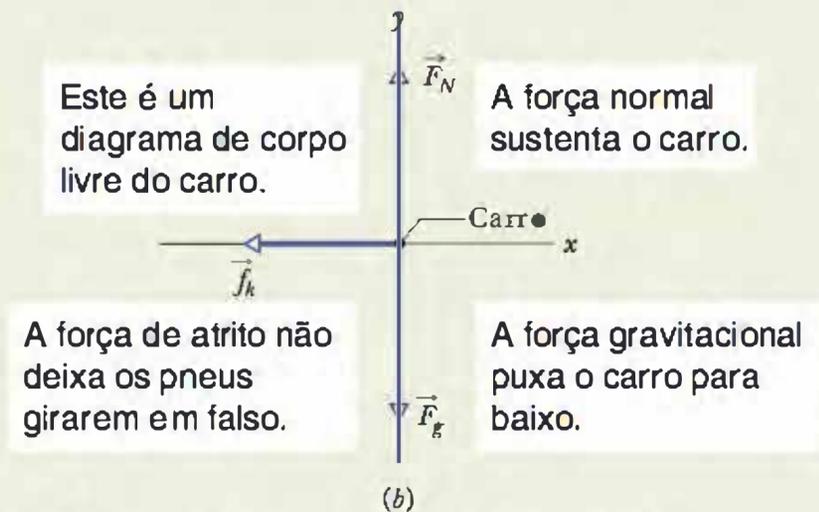
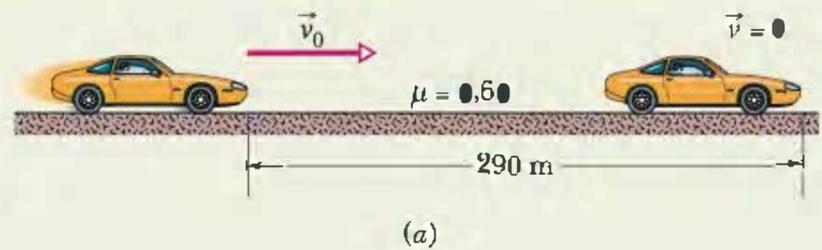



Figura 6-3 (*a*) Um carro deslizando para a direita e finalmente parando após se deslocar 290 m. (*b*) Diagrama de corpo livre do carro.

uma das equações do Capítulo 2 para objetos com aceleração constante. Sabemos que o deslocamento $x - x_0$ foi 290 m e supomos que a velocidade final v foi 0. Substituindo a pelo seu valor, dado pela Eq. 6-4, e explicitando v_0, obtemos

$$v_0 = \sqrt{2\mu_k g(x - x_0)} \tag{6-6}$$
$$= \sqrt{(2)(0{,}60)(9{,}8\ \text{m/s}^2)(290\ \text{m})}$$
$$= 58\ \text{m/s} = 210\ \text{km/h}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Supusemos que $v = 0$ na extremidade das marcas de derrapagem. Na verdade, as marcas terminaram apenas porque o Jaguar saiu da estrada depois de percorrer 290 m com as rodas bloqueadas. Assim, o valor de v_0 era *pelo menos* 210 km/h.

Exemplo

Atrito, força inclinada

Na Fig. 6-4*a*, um bloco de massa $m = 3{,}0$ kg escorrega em um piso enquanto uma força $\vec{F}$ de módulo 12 N, fazendo um ângulo θ para cima com a horizontal, é aplicada ao bloco. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o piso é $\mu_k = 0{,}40$. O ângulo θ pode variar de 0 a 90° (o bloco permanece sobre o piso). Qual é o valor de θ para o qual o módulo a da aceleração do bloco é máximo?

IDEIAS-CHAVE

Como o bloco está em movimento, a força de atrito envolvida é a força de atrito *cinético*. O módulo da força é dado pela Eq. 6-2 ($f_k = \mu_k F_N$, onde F_N é a força normal). O sentido é oposto ao do movimento (o atrito se opõe ao escorregamento).

Cálculo de F_N Como precisamos conhecer o módulo f_k da força de atrito, vamos calcular primeiro o módulo F_N da força normal. A Fig. 6-4*b* é um diagrama de corpo livre que mostra as forças paralelas ao eixo vertical y. A força normal é para cima, a força gravitacional $\vec{F}_g$, de módulo mg, é para baixo e a componente vertical F_y da força aplicada é para cima. Essa componente aparece na Fig. 6-4*c*,

onde podemos ver que $F_y = F \operatorname{sen} \theta$. Podemos escrever a segunda lei de Newton ($\vec{F}_{res} = m\vec{a}$) para essas forças ao longo do eixo y como

$$F_N + F \operatorname{sen} \theta - mg = m(0), \qquad (6\text{-}7)$$

onde tomamos a aceleração ao longo do eixo y como zero (o bloco não se move ao longo deste eixo). Assim,

$$F_N = mg - F \operatorname{sen} \theta. \qquad (6\text{-}8)$$

Cálculo da aceleração a A Fig. 6-4d é um diagrama de corpo livre para o movimento ao longo do eixo x. O sentido da componente horizontal F_x da força aplicada é para a direita; de acordo com a Fig. 6-4c, $F_x = F \cos \theta$. A força de atrito tem módulo f_k ($= \mu_k F_N$) e aponta para a esquerda. Aplicando a segunda lei de Newton ao movimento ao longo do eixo x, temos:

$$F \cos \theta - \mu_k F_N = ma. \qquad (6\text{-}9)$$

Substituindo F_N por seu valor, dado pela Eq. 6-8, e explicitando a, obtemos:

$$a = \frac{F}{m} \cos \theta - \mu_k \left(g - \frac{F}{m} \operatorname{sen} \theta \right). \qquad (6\text{-}10)$$

Cálculo do máximo Para determinar o valor de θ que maximiza a, derivamos a em relação a θ e igualamos o resultado a zero:

$$\frac{da}{d\theta} = -\frac{F}{m} \operatorname{sen} \theta + \mu_k \frac{F}{m} \cos \theta = 0. \qquad (6\text{-}11)$$

Reagrupando os termos e usando a identidade (sen θ)/(cos θ) = tan θ, obtemos

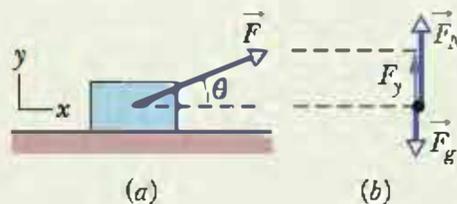
$$\tan \theta = \mu_k. \qquad (6\text{-}12)$$

Explicitando θ e substituindo μ_k pelo seu valor numérico ($\mu_k = 0{,}40$), descobrimos que a aceleração é máxima para

$$\theta = \tan^{-1} \mu_k \qquad (6\text{-}13)$$

$$= 21{,}8^\circ \approx 22^\circ. \qquad \text{(Resposta)}$$

Comentário Quando aumentamos θ a partir de 0, a componente y da força aplicada $\vec{F}$ aumenta, o que diminui a força normal. Esta diminuição da força normal faz diminuir a força de atrito, que se opõe ao movimento do bloco. Assim, a aceleração do bloco tende a aumentar. Ao mesmo tempo, porém, o aumento de θ diminui a componente horizontal de $\vec{F}$, o que diminui a aceleração. Essas tendências opostas fazem com que a aceleração seja máxima para $\theta = 22^\circ$.

A força aplicada acelera o bloco e diminui o peso aparente.

A força aplicada tem essas componentes.

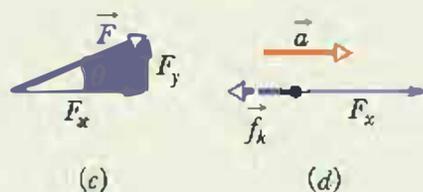
Essas forças verticais se cancelam.

Essas duas forças horizontais determinam a aceleração.

Figura 6-4 (a) Uma força é aplicada a um bloco em movimento. (b) As forças verticais. (c) As componentes da força aplicada. (d) As forças horizontais e a aceleração.

6-4 Força de Arrasto e Velocidade Terminal

Um **fluido** é uma substância, em geral um gás ou um líquido, capaz de escoar. Quando existe uma velocidade relativa entre um fluido e um corpo sólido (seja porque o corpo se move através do fluido, seja porque o fluido passa pelo corpo), o corpo experimenta uma **força de arrasto** $\vec{D}$ que se opõe ao movimento relativo e é paralela à direção do movimento relativo do fluido.

Examinaremos aqui apenas os casos em que o fluido é o ar, o corpo é rombudo (como uma bola) e não fino e pontiagudo (como um dardo) e o movimento relativo é suficientemente rápido para produzir uma turbulência no ar (formação de redemoinhos) atrás do corpo. Nesse caso, o módulo da força de arrasto $\vec{D}$ está relacionado à velocidade escalar v através da equação

$$D = \tfrac{1}{2} C \rho A v^2, \qquad (6\text{-}14)$$

onde C é um parâmetro determinado experimentalmente, conhecido como **coeficiente de arrasto**, ρ é a massa específica do ar (massa por unidade de volume) e A é a **área da seção reta efetiva** do corpo (a área de uma seção reta perpendicular à velocidade $\vec{v}$). O coeficiente de arrasto C (cujos valores típicos variam de 0,4 a 1,0)

Tabela 6-1

Algumas Velocidades Terminais no Ar

Objeto	Velocidade Terminal (m/s)	Distância[a] para 95% (m)
Peso (do arremesso de peso)	145	2500
Paraquedista em queda livre (típico)	60	430
Bola de beisebol	42	210
Bola de tênis	31	115
Bola de basquete	20	47
Bola de pingue-pongue	9	10
Gota de chuva (raio = 1,5 mm)	7	6
Paraquedista (típico)	5	3

[a]Distância da queda necessária para atingir 95% da velocidade terminal.
Fonte: adaptado de Peter J. Brancazio, *Sport Science*, 1984, Simon & Schuster, New York.

Figura 6-5 A esquiadora se agacha na "posição de ovo" para minimizar a área da seção reta efetiva e assim reduzir a força de arrasto. *(Karl-Josef Hildenbrand/dpa/LLC)*

não é constante para um dado corpo, já que depende da velocidade. Aqui, ignoraremos tais complicações.

Os esquiadores sabem muito bem que a força de arrasto depende de A e de v^2. Para alcançar altas velocidades, um esquiador procura reduzir o valor de D, adotando, por exemplo, a "posição de ovo" (Fig. 6-5) para minimizar A.

Quando um corpo rombudo cai a partir do repouso, a força de arrasto $\vec{D}$ produzida pela resistência do ar é dirigida para cima e seu módulo cresce gradualmente, a partir de zero, com o aumento da velocidade do corpo. A força $\vec{D}$ para cima se opõe à força gravitacional $\vec{F}_g$, dirigida para baixo. Podemos relacionar essas forças à aceleração do corpo escrevendo a segunda lei de Newton para um eixo vertical y ($F_{\text{res},y} = ma_y$):

$$D - F_g = ma, \tag{6-15}$$

onde m é a massa do corpo. Como mostra a Fig. 6-6, se o corpo cai por um tempo suficiente, D acaba se tornando igual a F_g. De acordo com a Eq. 6-15, isso significa que $a = 0$ e, portanto, a velocidade do corpo para de aumentar. O corpo passa, então, a cair com uma velocidade constante, a chamada **velocidade terminal** v_t.

Para determinar v_t, fazemos $a = 0$ na Eq. 6-15 e substituímos o valor de D dado pela Eq. 6-14, obtendo

$$\tfrac{1}{2}C\rho A v_t^2 - F_g = 0,$$

donde

$$v_t = \sqrt{\frac{2F_g}{C\rho A}}. \tag{6-16}$$

A Tabela 6-1 mostra os valores de v_t para alguns objetos comuns.

De acordo com cálculos* baseados na Eq. 6-14, um gato precisa cair cerca de seis andares para atingir a velocidade terminal. Até que isso aconteça, $F_g > D$ e o gato sofre uma aceleração para baixo porque a força resultante é diferente de zero. Como vimos no Capítulo 2, nosso corpo é um acelerômetro e não um velocímetro. Como o gato também sente a aceleração, fica assustado e mantém as patas abaixo do corpo, encolhe a cabeça e encurva a espinha para cima, reduzindo a área A, aumentando v_t e provavelmente se ferindo na queda.

Entretanto, se o gato atinge v_t durante uma queda mais longa, a aceleração se anula e o gato relaxa um pouco, esticando as patas e pescoço horizontalmente para fora e endireitando a espinha (o que o faz ficar parecido com um esquilo voador). Isso produz um aumento da área A e, consequentemente, de acordo com a Eq. 6-14,

Quando a velocidade do gato aumenta, a força de arrasto aumenta até equilibrar a força gravitacional.

Gato
$\vec{D}$
$\vec{F}_g$
(a) (b) (c)

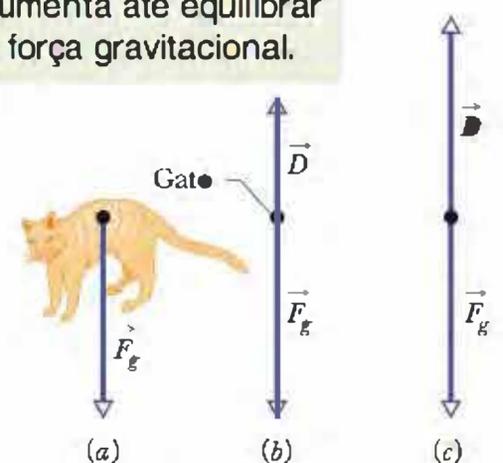



Figura 6-6 Forças a que está submetido um corpo em queda livre no ar. (*a*) O corpo no momento em que começa a cair; a única força presente é a força gravitacional. (*b*) Diagrama de corpo livre durante a queda, incluindo a força de arrasto. (*c*) A força de arrasto aumentou até se tornar igual à força gravitacional. O corpo agora cai com velocidade constante, a chamada velocidade terminal.

* W.O. Whitney e C.J. Mehlhaff, "High-Rise Syndrome in Cats". *The Journal of the American Veterinary Medical Association*, 1987.

Figura 6-7 Paraquedistas na "posição de águia", que maximiza a força de arrasto. *(Steve Fitchett/Taxi/Getty Images)*

um aumento da força de arrasto D. O gato começa a diminuir de velocidade, já que, agora, $D > F_g$ (a força resultante aponta para cima), até que uma velocidade terminal v_t menor seja atingida. A diminuição de v_t reduz a possibilidade de que o gato se machuque na queda. Pouco antes do fim da queda, ao perceber que o chão está próximo, o gato coloca novamente as patas abaixo do corpo, preparando-se para o pouso.

Os seres humanos muitas vezes saltam de grandes alturas apenas pelo prazer de "voar". Em abril de 1987, durante um salto, o paraquedista Gregory Robertson percebeu que a colega Debbie Williams havia desmaiado ao colidir com um terceiro paraquedista e, portanto, não tinha como abrir o paraquedas. Robertson, que estava muito acima de Debbie e ainda não tinha aberto o paraquedas para a descida de 4 mil metros, colocou-se de cabeça para baixo para minimizar A e maximizar a velocidade da queda. Depois de atingir uma velocidade terminal estimada de 320 km/h, alcançou a moça e assumiu a "posição de águia" (como na Fig. 6-7) para aumentar D e conseguir agarrá-la. Abriu o paraquedas da moça e em seguida, após soltá-la, abriu o próprio paraquedas, quando faltavam apenas 10 segundos para o impacto. Williams sofreu várias lesões internas devido à falta de controle na aterrissagem, mas sobreviveu.

Exemplo

Velocidade terminal de uma gota de chuva

Uma gota de chuva de raio $R = 1{,}5$ mm cai de uma nuvem que está a uma altura $h = 1200$ m acima do solo. O coeficiente de arrasto C da gota é 0,60. Suponha que a gota permanece esférica durante toda a queda. A massa específica da água, ρ_a, é 1000 kg/m³ e a massa específica do ar, ρ_{ar}, é 1,2 kg/m³.

(a) De acordo com a Tabela 6-1, a gota atinge a velocidade terminal depois de cair apenas alguns metros. Qual é a velocidade terminal?

IDEIA-CHAVE

A gota atinge a velocidade terminal v_t quando a força gravitacional e a força de arrasto se equilibram, fazendo com que a aceleração seja nula. Poderíamos aplicar a segunda lei de Newton e a equação da força de arrasto para calcular v_t, mas a Eq. 6-16 já faz isso para nós.

Cálculos Para usar a Eq. 6-16, precisamos conhecer a área efetiva da seção reta A e o módulo F_g da força gravitacional. Como a gota é esférica, A é a área de um círculo (πR^2) com o mesmo raio que a esfera. Para determinar F_g, usamos três fatos: (1) $F_g = mg$, onde m é a massa da gota; (2) o volume da gota (esférica) é $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ e (3) a massa específica da água da gota é igual à massa por unidade de volume: $\rho_a = m/V$. Assim, temos;

$$F_g = V\rho_a g = \tfrac{4}{3}\pi R^3 \rho_a g.$$

Em seguida, substituímos esse resultado, a expressão para A e os valores conhecidos na Eq. 6-16. Tomando cuidado para não confundir a massa específica do ar, ρ_{ar}, com a massa específica da água, ρ_a, obtemos:

$$v_t = \sqrt{\frac{2F_g}{C\rho_{ar} A}} = \sqrt{\frac{8\pi R^3 \rho_a g}{3C\rho_{ar}\pi R^2}} = \sqrt{\frac{8R\rho_a g}{3C\rho_{ar}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(8)(1{,}5 \times 10^{-3}\text{ m})(1000\text{ kg/m}^3)(9{,}8\text{ m/s}^2)}{(3)(0{,}60)(1{,}2\text{ kg/m}^3)}}$$

$$= 7{,}4\text{ m/s} \approx 27\text{ km/h}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Note que a altura da nuvem não entra no cálculo.

(b) Qual seria a velocidade da gota imediatamente antes do impacto com o chão se não existisse a força de arrasto?

IDEIA-CHAVE

Na ausência da força de arrasto para reduzir a velocidade da gota durante a queda, a gota cairia com a aceleração constante de queda livre g e, portanto, as equações do movimento com aceleração constante da Tabela 2-1 podem ser usadas.

Cálculo Como sabemos que a aceleração é g, a velocidade inicial v_0 é zero e o deslocamento $x - x_0$ é $-h$, usamos a Eq. 2-16 para calcular v:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{(2)(9{,}8\text{ m/s}^2)(1200\text{ m})}$$

$$= 153\text{ m/s} \approx 550\text{ km/h}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Se Shakespeare soubesse disso, dificilmente teria escrito: "Gota a gota ela cai, tal como a chuva benéfica do céu." Na verdade, esta é a velocidade de uma bala disparada por uma arma de grosso calibre!

6-5 Movimento Circular Uniforme

Como vimos na Seção 4-7, quando um corpo descreve uma circunferência (ou um arco de circunferência) com velocidade escalar constante v, dizemos que se encontra em movimento circular uniforme. Vimos também que o corpo possui uma aceleração centrípeta (dirigida para o centro da circunferência) de módulo constante dado por

$$a = \frac{v^2}{R} \quad \text{(aceleração centrípeta)}, \tag{6-17}$$

onde R é o raio do círculo.

Vamos examinar dois exemplos de movimento circular uniforme:

1. *Fazendo uma curva de carro.* Você está sentado no centro do banco traseiro de um carro que se move em alta velocidade em uma estrada plana. Quando o motorista faz uma curva brusca para a esquerda e o carro descreve um arco de circunferência, você escorrega para a direita sobre o assento e fica comprimido contra a porta do carro durante o resto da curva. O que está acontecendo?

   Enquanto o carro está fazendo a curva, ele se encontra em movimento circular uniforme, ou seja, possui uma aceleração dirigida para o centro da circunferência. De acordo com a segunda lei de Newton, deve haver uma força responsável por essa aceleração. Além disso, a força também deve estar dirigida para o centro da circunferência. Assim, trata-se de uma **força centrípeta**, onde o adjetivo indica a direção da força. Neste exemplo, a força centrípeta é a força de atrito exercida pela estrada sobre os pneus; é graças a essa força que o carro consegue fazer a curva.

   Para você descrever um movimento circular uniforme junto com o carro, também deve existir uma força centrípeta agindo sobre você. Entretanto, aparentemente, a força centrípeta de atrito exercida pelo assento não foi suficiente para fazê-lo acompanhar o movimento circular do carro. Assim, o assento deslizou por baixo de você até a porta direita do carro se chocar com o seu corpo. A partir desse momento, a porta forneceu a força centrípeta necessária para fazê-lo acompanhar o carro no movimento circular uniforme.
2. *Girando em torno da Terra.* Desta vez, você está a bordo do ônibus espacial *Atlantis*. Quando você e o ônibus espacial estão em órbita em torno da Terra, você flutua, como se não tivesse peso. O que está acontecendo?

   Tanto você como o ônibus espacial estão em movimento circular uniforme e possuem uma aceleração dirigida para o centro da circunferência. Novamente, pela segunda lei de Newton, forças centrípetas devem ser a causa dessas acelerações. Desta vez, as forças centrípetas são atrações gravitacionais (a atração sobre você e a atração sobre o ônibus espacial) exercidas pela Terra e dirigidas para o centro da Terra.

Tanto no carro como no ônibus espacial, você está em movimento circular uniforme sob a ação de uma força centrípeta, mas experimenta sensações bem diferentes nas duas situações. No carro, comprimido contra a porta traseira, você tem consciência de que está sendo submetido a uma força. No ônibus espacial, está flutuando e tem a impressão de que não está sujeito a nenhuma força. Qual é a razão desta diferença?

A diferença se deve à natureza das duas forças centrípetas. No carro, a força centrípeta é a compressão a que é submetida a parte do seu corpo que está em contato com a porta do carro. Você pode sentir essa compressão. No ônibus espacial, a força centrípeta é a atração gravitacional da Terra sobre todos os átomos do seu corpo. Assim, nenhuma parte do corpo sofre uma compressão e você não sente nenhuma força. (A sensação é conhecida como "ausência de peso", mas essa descrição é enganosa. A atração exercida pela Terra sobre você certamente não desapareceu e, na verdade, é apenas ligeiramente menor da que existe quando você está na superfície da Terra.)

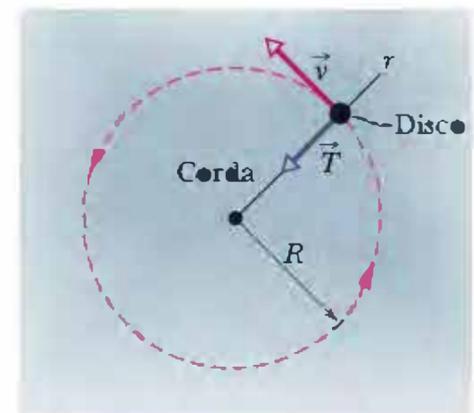
A Fig. 6-8 mostra outro exemplo de força centrípeta. Um disco de metal descreve uma circunferência com velocidade constante v, preso por uma corda a um

O disco só descreve um movimento circular porque existe uma força na direção do centro.

Figura 6-8 Vista de cima de um disco de metal que se move com velocidade constante v em uma trajetória circular de raio R sobre uma superfície horizontal sem atrito. A força centrípeta que age sobre o disco é $\vec{T}$, a tração da corda, dirigida para o centro da circunferência ao longo do eixo radial r que passa pelo disco.

eixo central. Desta vez, a força centrípeta é a tração exercida radialmente pela corda sobre o disco. Sem essa força, o disco se moveria em linha reta em vez de se mover em círculos.

Observe que a força centrípeta não é um novo tipo de força; o nome simplesmente indica a direção da força. A força centrípeta pode ser uma força de atrito, uma força gravitacional, a força exercida pela porta de um carro, a força exercida por uma corda ou qualquer outra força. Em qualquer situação:

> Uma força centrípeta acelera um corpo modificando a direção da velocidade do corpo sem mudar a velocidade escalar.

De acordo com a segunda lei de Newton e a Eq. 6-17 ($a = v^2/R$), podemos escrever o módulo F de uma força centrípeta (ou de uma força centrípeta resultante) como

$$F = m\frac{v^2}{R} \quad \text{(módulo da força centrípeta).} \tag{6-18}$$

Como a velocidade escalar v, neste caso, é constante, os módulos da aceleração centrípeta e da força centrípeta também são constantes.

Por outro lado, as direções da aceleração centrípeta e da força centrípeta não são constantes; variam continuamente de modo a apontar sempre para o centro do círculo. Por essa razão, os vetores força e aceleração são, às vezes, desenhados ao longo de um eixo radial r que se move com o corpo e se estende do centro do círculo até o corpo, como na Fig. 6-8. O sentido positivo do eixo aponta radialmente para fora, mas os vetores aceleração e força apontam para dentro ao longo da direção radial.

TESTE 2

Quando você anda de roda-gigante com velocidade constante, que são as direções da sua aceleração $\vec{a}$ e da força normal $\vec{F}_N$ exercida sobre você pelo assento (que está sempre na vertical) quando você passa (a) pelo ponto mais alto e (b) pelo ponto mais baixo da roda?

Exemplo

Diavolo executa um *loop* vertical

Em 1901, em um espetáculo de circo, Allo "Dare Devil" Diavolo apresentou pela primeira vez um número de acrobacia que consistia em descrever um *loop* vertical pedalando uma bicicleta (Fig. 6-9*a*). Supondo que o *loop* seja um círculo de raio $R = 2{,}7$ m, qual é a menor velocidade v que Diavolo podia ter na parte mais alta do *loop* para permanecer em contato com a pista?

IDEIA-CHAVE

Podemos supor que Diavolo e sua bicicleta passam pela parte mais alta do *loop* como uma única partícula em movimento circular uniforme. Assim, no alto, a aceleração $\vec{a}$ dessa partícula deve ter módulo $a = v^2/R$ dado pela Eq. 6-17 e estar voltada para baixo, em direção ao centro do *loop* circular.

Cálculos As forças que agem sobre a partícula quando está na parte mais alta do *loop* são mostradas no diagrama de corpo livre da Fig. 6-9*b*. A força gravitacional $\vec{F}_g$ aponta para baixo ao longo do eixo y; o mesmo acontece com a força normal $\vec{F}_N$ exercida pelo *loop* sobre a partícula. A segunda lei de Newton para as componentes y ($F_{res,y} = ma_y$) nos dá

$$-F_N - F_g = m(-a)$$

e

$$-F_N - mg = m\left(-\frac{v^2}{R}\right). \tag{6-19}$$

Se a partícula possui a *menor velocidade* v necessária para permanecer em contato com a pista, está na *iminência de perder contato* com o *loop* (cair do *loop*), o que significa que $F_N = 0$ no alto do *loop* (a partícula e o piso se tocam, mas não há força normal). Substituindo F_N por 0 na Eq. 6-19, explicitando v e substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$v = \sqrt{gR} = \sqrt{(9{,}8\ \text{m/s}^2)(2{,}7\ \text{m})}$$
$$= 5{,}1\ \text{m/s}. \quad \text{(Resposta)}$$

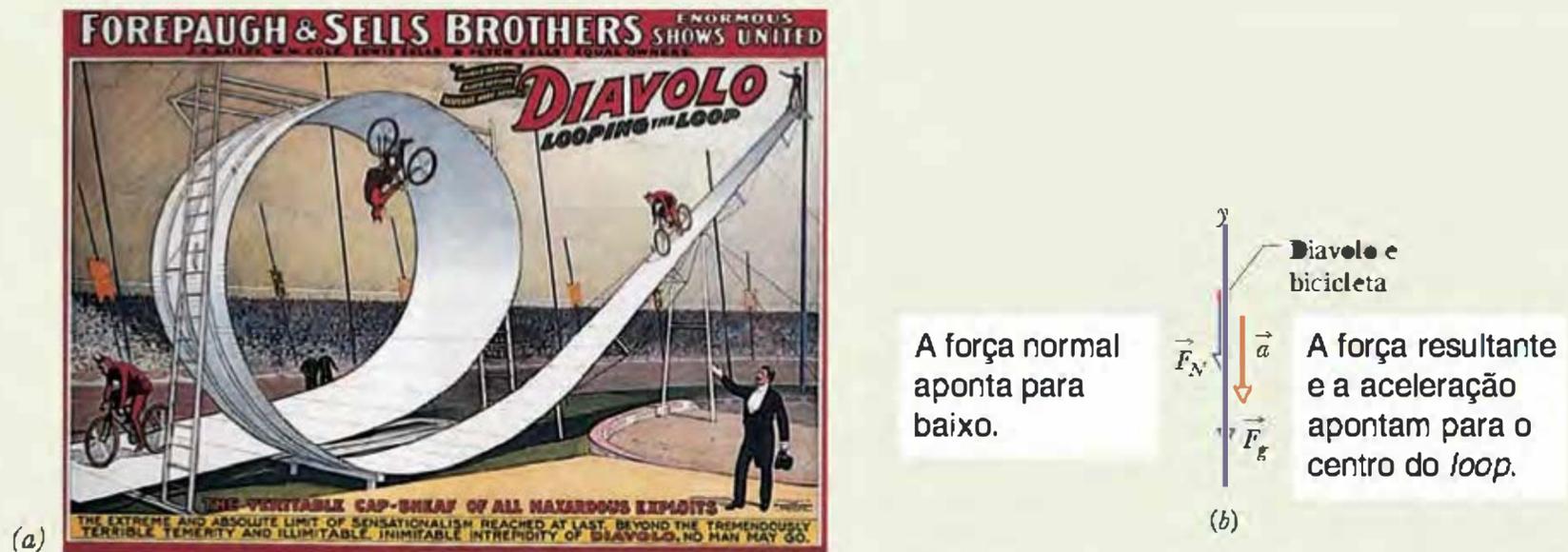



Figura 6-9 (*a*) Cartaz da época anunciando o número de Diavolo e (b) diagrama de corpo livre do artista na parte mais alta do *loop*. *(Fotografia da parte a reproduzida com permissão do Circus World Museum)*

Comentários Diavolo sempre se certificava de que sua velocidade no alto do *loop* era maior do que 5,1 m/s, a velocidade mínima necessária para não perder contato com o *loop* e cair. Note que essa velocidade não depende da massa de Diavolo e sua bicicleta. Mesmo que tivesse se empanturrado antes de se apresentar, a velocidade mínima necessária para não cair do *loop* seria os mesmos 5,1 m/s.

Exemplo

Carro em uma curva não compensada

Correndo de cabeça para baixo Os carros de corrida modernos são projetados de tal forma que o ar em movimento os empurra para baixo, permitindo que façam as curvas em alta velocidade sem derrapar. Esta força para baixo é chamada de *sustentação negativa*. Um carro de corrida pode ter uma sustentação negativa suficiente para andar de cabeça para baixo no teto de uma construção, como fez um carro fictício no filme *MIB – Homens de Preto*?

A Fig. 6-10*a* mostra um carro de corrida de massa $m = 600$ kg se movendo em uma pista plana na forma de um arco de circunferência de raio $R = 100$ m. Devido à forma do carro e aos aerofólios, o ar que passa exerce sobre o carro uma sustentação negativa $\vec{F}_S$ dirigida para baixo. O coeficiente de atrito estático entre os pneus e a pista é 0,75. (Suponha que as forças sobre os quatro pneus são iguais.)

(a) Se o carro se encontra na iminência de derrapar para fora da curva quando a velocidade escalar é 28,6 m/s, qual é o módulo de $\vec{F}_S$?

IDEIAS-CHAVE

1. Como a trajetória do carro é um arco de circunferência, ele está sujeito a uma força centrípeta; essa força aponta para o centro de curvatura do arco (no caso, é uma força horizontal).
2. A única força horizontal a que o carro está sujeito é a força de atrito exercida pela pista sobre os pneus. Assim, a força centrípeta é uma força de atrito.
3. Como o carro não está derrapando, a força de atrito é a força de atrito *estático* $\vec{f}_s$ (Fig. 6-10*a*).
4. Como o carro se encontra na iminência de derrapar, o módulo f_s da força de atrito é igual ao valor máximo $f_{s,\text{máx}} = \mu_s F_N$, onde F_N é o módulo da força normal $\vec{F}_N$ que a pista exerce sobre o carro.

Cálculo para a direção radial A força de atrito $\vec{f}_s$ é mostrada no diagrama de corpo livre da Fig. 6-10*b*. Ela aponta no sentido negativo do eixo radial r que se estende do centro de curvatura até o carro. A força produz uma aceleração centrípeta de módulo v^2/R. Podemos relacionar a força e a aceleração escrevendo a segunda lei de Newton para as componentes ao longo do eixo r ($F_{\text{res},r} = ma_r$) na forma

$$-f_s = m\left(-\frac{v^2}{R}\right). \qquad (6\text{-}20)$$

Substituindo f_s por $f_{s,\text{máx}} = \mu_s F_N$ temos:

$$\mu_s F_N = m\left(\frac{v^2}{R}\right). \qquad (6\text{-}21)$$

Cálculo para a direção vertical Vamos considerar em seguida as forças verticais que agem sobre o carro. A força normal $\vec{F}_N$ aponta para cima, no sentido positivo do eixo y da Fig. 6-10*b*. A força gravitacional $\vec{F}_g = m\vec{g}$ e a sustentação negativa $\vec{F}_S$ apontam para baixo. A aceleração do carro ao longo do eixo y é zero. Assim, podemos escrever a segunda lei de Newton para as componentes ao longo do eixo y ($F_{\text{res},y} = ma_y$) na forma

$$F_N - mg - F_S = 0,$$

ou

$$F_N = mg + F_S. \quad (6\text{-}22)$$

Combinação dos resultados Agora podemos combinar os resultados ao longo dos dois eixos explicitando F_N na Eq. 6-21 e substituindo na Eq. 6-22. Fazendo isso e explicitando F_S, obtemos

$$F_S = m\left(\frac{v^2}{\mu_s R} - g\right)$$

$$= (600\ \text{kg})\left(\frac{(28{,}6\ \text{m/s})^2}{(0{,}75)(100\ \text{m})} - 9{,}8\ \text{m/s}^2\right)$$

$$= 663{,}7\ \text{N} \approx 660\ \text{N}. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Como a força de arrasto (Eq. 6-14), o módulo F_S da sustentação negativa do carro é proporcional a v^2, o quadrado da velocidade do carro. Assim, a sustentação negativa é maior quando o carro está se movendo mais depressa, como acontece quando se desloca em um trecho reto da pista. Qual é o módulo da sustentação negativa para uma velocidade de 90 m/s?

IDEIA-CHAVE

F_S é proporcional a v^2.

Cálculos Podemos escrever a razão entre a sustentação negativa $F_{S,90}$ para v = 90 m/s e o nosso resultado para a sustentação negativa F_S correspondente a v = 28,6 m/s como

$$\frac{F_{S,90}}{F_S} = \frac{(90\ \text{m/s})^2}{(28{,}6\ \text{m/s})^2}.$$

Fazendo F_S = 663,7 N e explicitando $F_{S,90}$, obtemos

$$F_{S,90} = 6572\ \text{N} \approx 6600\ \text{N}. \quad \text{(Resposta)}$$

Correndo de cabeça para baixo A força gravitacional é, naturalmente, a força a ser vencida para que o carro possa correr de cabeça para baixo:

$$F_g = mg = (600\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)$$

$$= 5880\ \text{N}.$$

Com o carro de cabeça para baixo, a sustentação negativa é uma força *para cima* de 6600 N, que excede a força gravitacional para baixo de 5880 N. Assim, um carro de corrida pode se sustentar de cabeça para baixo *contanto* que sua velocidade seja da ordem de 90 m/s (= 324 km/h). Entretanto, como andar nesta velocidade é muito perigoso mesmo em uma pista reta e com o carro na posição normal, não espere ver este truque realizado fora do cinema.

Figura 6-10 (*a*) Um carro de corrida descreve uma curva em uma pista plana com velocidade escalar constante v. A força centrípeta necessária para que o carro faça a curva é a força de atrito $\vec{f}_s$, orientada segundo um eixo radial r. (*b*) Diagrama de corpo livre do carro (fora de escala), em um plano vertical passando por r.

A força centrípeta é a força de atrito
(*a*)
Atrito: aponta para o centro
A força normal sustenta o carro
Centro
Carro
A força gravitacional puxa o carro para baixo
Diagrama de corpo livre do carro
(*b*)
Sustentação negativa: empurra o carro para baixo

Exemplo

Carro em uma curva compensada

As curvas das rodovias costumam ser compensadas (inclinadas) para evitar que os carros derrapem. Quando a estrada está seca, a força de atrito entre os pneus e o piso é suficiente para evitar derrapagens, mesmo sem compensação. Quando a pista está molhada, porém, a força de atrito diminui muito e a compensação se torna essencial. A Fig. 6-11*a* mostra um carro de massa m que se move com uma velocidade escalar constante v de 20 m/s em uma pista circular compensada com R = 190 m de raio. (Trata-se de um carro normal e não de um carro de corrida, o que significa que não existe sustentação negativa.)

Se a força de atrito exercida pelo piso é desprezível, qual é o menor valor do ângulo de elevação θ para o qual o carro não derrapa?

IDEIAS-CHAVE

Ao contrário do que acontece no exemplo anterior, a pista possui uma inclinação para que a força normal $\vec{F}_N$ que age sobre o carro tenha uma componente na direção do centro da curva (Fig. 6-11*b*). Assim, $\vec{F}_N$ possui agora uma componente centrípeta, de módulo F_{Nr}, na direção radial r. Queremos calcular o valor do ângulo de inclinação θ para

que esta componente centrípeta mantenha o carro na pista circular sem necessidade do atrito.

Cálculo na direção radial Como mostra a Fig. 6-11*b* (e o leitor pode verificar), o ângulo que a força $\vec{F}_N$ faz com a vertical é igual ao ângulo de inclinação θ da pista. Assim, a componente radial F_{Nr} é igual a F_N sen θ e a segunda lei de Newton para as componentes ao longo do eixo r ($F_{res,r} = ma_r$) assume a seguinte forma:

$$-F_N \operatorname{sen}\theta = m\left(-\frac{v^2}{R}\right). \tag{6-23}$$

Não podemos obter o valor de θ usando apenas esta equação porque ela também contém as incógnitas F_N e m.

Cálculo na direção vertical Vamos considerar as forças e acelerações ao longo do eixo y da Fig. 6-11*b*. A componente vertical da força normal é $F_{Ny} = F_N \cos\theta$, a força gravitacional $\vec{F}_g$ tem módulo mg e a aceleração do carro ao longo do eixo y é zero. Assim, a segunda lei de Newton para as componentes ao longo do eixo y ($F_{res,y} = ma_y$) assume a seguinte forma:

$$F_N \cos\theta - mg = m(0),$$

donde

$$F_N \cos\theta = mg. \tag{6-24}$$

Combinação dos resultados A Eq. 6-24 também contém as incógnitas F_N e m, mas observe que, dividindo a Eq. 6-23 pela Eq. 6-24, eliminamos as duas incógnitas. Procedendo desta forma, substituindo (sen θ)/(cos θ) por tan θ e explicitando θ, obtemos

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v^2}{gR}$$

$$= \tan^{-1}\frac{(20\ \text{m/s})^2}{(9{,}8\ \text{m/s}^2)(190\ \text{m})} = 12°. \quad \text{(Resposta)}$$

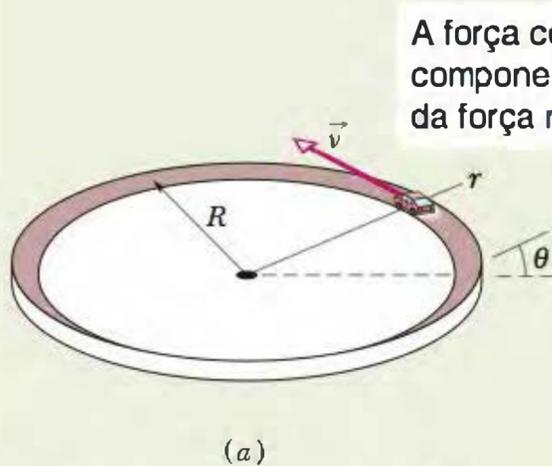
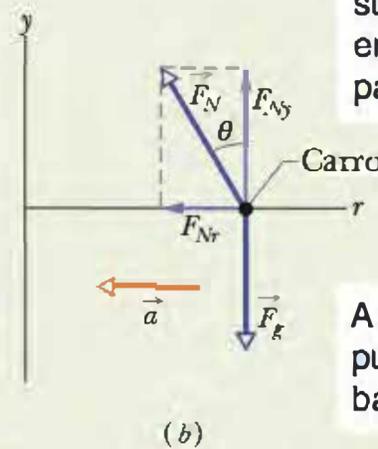



Figura 6-11 (*a*) Um carro faz uma curva compensada com velocidade escalar constante v. O ângulo de inclinação está exagerado para maior clareza. (*b*) Diagrama de corpo livre do carro, supondo que o atrito entre os pneus e a estrada é nulo e que o carro não possui sustentação negativa. A componente radial F_{Nr} da força normal (ao longo do eixo radial r) fornece a força centrípeta e a aceleração radial necessárias.

REVISÃO E RESUMO

Atrito Quando uma força $\vec{F}$ tende a fazer um corpo deslizar em uma superfície, a superfície exerce uma **força de atrito** sobre o corpo. A força de atrito é paralela à superfície e está orientada de modo a se opor ao movimento. Esta força se deve às ligações entre os átomos do corpo e os átomos da superfície.

Se o corpo permanece imóvel, a força de atrito é a **força de atrito estático** $\vec{f}_s$. Se o corpo se move, a força de atrito é a **força de atrito cinético** $\vec{f}_k$.

1. Se um corpo permanece imóvel, a força de atrito estático $\vec{f}_s$ e a componente de $\vec{F}$ paralela à superfície têm módulos iguais e sentidos opostos. Se a componente de $\vec{F}$ aumenta, f_s também aumenta.
2. O módulo de $\vec{f}_s$ tem um valor máximo $f_{s,máx}$ dado por

$$f_{s,máx} = \mu_s F_N, \tag{6-1}$$

onde μ_s é o **coeficiente de atrito estático** e F_N é o módulo da força normal. Se a componente de $\vec{F}$ paralela à superfície excede o valor de $f_{s,máx}$, o corpo começa a se mover.

3. Se o corpo começa a se mover, o módulo da força de atrito diminui rapidamente para um valor constante f_k dado por

$$f_k = \mu_k F_N, \tag{6-2}$$

onde μ_k é o **coeficiente de atrito cinético**.

Força de Arrasto Quando há movimento relativo entre o ar (ou outro fluido qualquer) e um corpo, o corpo sofre a ação de uma **força de arrasto** $\vec{D}$ que se opõe ao movimento relativo e aponta na direção em que o fluido se move em relação ao corpo. O módulo de $\vec{D}$ está relacionado à velocidade relativa v através de um **coeficiente de arrasto** C (determinado experimentalmente) através da equação

$$D = \tfrac{1}{2}C\rho A v^2, \tag{6-14}$$

onde ρ é a massa específica do fluido (massa por unidade de volume) e A é a **área da seção reta efetiva** do corpo (área de uma seção reta perpendicular à velocidade relativa $\vec{v}$).

Velocidade Terminal Quando um objeto rombudo cai por uma distância suficiente no ar, os módulos da força de arrasto $\vec{D}$ e da força gravitacional $\vec{F}_g$ tornam-se iguais. Nesse caso, o corpo passa a cair com uma **velocidade terminal** v_t dada por

$$v_t = \sqrt{\frac{2F_g}{C\rho A}} \tag{6-16}$$

Movimento Circular Uniforme Se uma partícula se move em uma circunferência ou em um arco de circunferência de raio R com uma velocidade escalar constante v, dizemos que a partícula está em **movimento circular uniforme**. Nesse caso, a partícula possui uma **aceleração centrípeta** $\vec{a}$ cujo módulo é dado por

$$a = \frac{v^2}{R}. \tag{6-17}$$

Esta aceleração se deve a uma **força centrípeta** cujo módulo é dado por

$$F = \frac{mv^2}{R}, \tag{6-18}$$

onde m é a massa da partícula. As grandezas vetoriais $\vec{a}$ e $\vec{F}$ apontam para o centro de curvatura da trajetória da partícula.

PERGUNTAS

1 Na Fig. 6-12, se a caixa está parada e o ângulo θ entre a horizontal e a força $\vec{F}$ aumenta, as grandezas a seguir aumentam, diminuem ou permanecem com o mesmo valor: (a) F_x; (b) f_s; (c) F_N; (d) $f_{s,máx}$? (e) Se a caixa está em movimento e θ aumenta, o módulo da força de atrito a que a caixa está submetida aumenta, diminui ou permanece o mesmo?

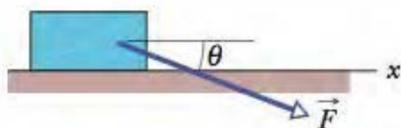



Figura 6-12 Pergunta 1.

2 Repita a Pergunta 1 para o caso de a força $\vec{F}$ estar orientada para cima e não para baixo, como na Fig. 6-12.

3 Na Fig. 6-13, uma força horizontal $\vec{F}_1$ de módulo 10 N é aplicada a uma caixa que está sobre um piso, mas a caixa não se move. Quando o módulo da força vertical $\vec{F}_2$ aumenta a partir de zero, as grandezas a seguir aumentam, diminuem ou permanecem as mesmas: (a) o módulo da força de atrito estático $\vec{f}_s$ a que a caixa está submetida; (b) o módulo da força normal $\vec{F}_N$ exercida pelo piso sobre a caixa; (c) o valor máximo $f_{s,máx}$ do módulo da força de atrito estático a que a caixa está submetida? (d) A caixa acaba escorregando?

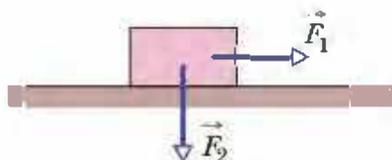



Figura 6-13 Pergunta 3.

4 Em três experimentos, três forças horizontais diferentes são aplicadas ao mesmo bloco que está sobre a mesma bancada. Os módulos das forças são F_1 = 12 N, F_2 = 8 N e F_3 = 4 N. Em cada experimento, o bloco permanece estacionário, mesmo com a aplicação da força. Ordene as forças, em ordem decrescente, de acordo (a) com o módulo f_s da força de atrito estático que a bancada exerce sobre o bloco e (b) com o valor máximo $f_{s,máx}$ dessa força.

5 Se você pressiona um caixote de maçãs contra uma parede com tanta força que o caixote não escorrega parede abaixo, qual é a orientação (a) da força de atrito estático $\vec{f}_s$ que a parede exerce sobre o caixote e (b) da força normal $\vec{F}_N$ que a parede exerce sobre o caixote? Se empurra o caixote com mais força, o que acontece (c) com f_s, (d) com F_N e (e) com $f_{s,máx}$?

6 Na Fig. 6-14, um bloco de massa m é mantido estacionário sobre uma rampa pela força de atrito que a rampa exerce sobre o bloco. Uma força $\vec{F}$, dirigida para cima ao longo da rampa, é aplicada ao bloco e o módulo da força aumentado gradualmente a partir de zero. Durante esse aumento, o que acontece com a direção e o módulo da força de atrito que age sobre o bloco?

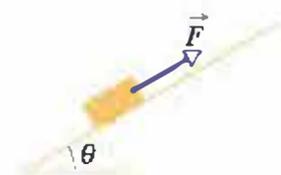



Figura 6-14 Pergunta 6.

7 Responda à Pergunta 6 se a força $\vec{F}$ estiver orientada para baixo ao longo da rampa. Quando o módulo de $\vec{F}$ aumenta a partir de zero, o que acontece com a direção e o módulo da força de atrito que age sobre o bloco?

8 Na Fig. 6-15, uma força horizontal de 100 N vai ser aplicada a uma prancha de 10 kg, que está inicialmente em repouso sobre um piso liso sem atrito, para acelerar a prancha. Um bloco de 10 kg repousa na superfície da prancha; o coeficiente de atrito μ entre o bloco e a prancha não é conhecido e o bloco está solto, podendo escorregar sobre a prancha. (a) Considerando essa possibilidade, qual é o intervalo de valores possíveis para o módulo a_p da aceleração da prancha? (*Sugestão:* não é preciso fazer nenhum cálculo complicado; basta considerar valores extremos de μ.) (b) Qual é o intervalo de valores possíveis para o módulo a_b da aceleração do bloco?

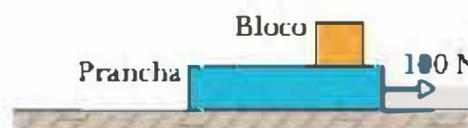



Figura 6.15 Pergunta 8.

9 A Fig. 6-16 mostra a trajetória de um carrinho de parque de diversões que passa, com velocidade escalar constante, por cinco arcos circulares de raios R_0, $2R_0$ e $3R_0$. Ordene os arcos de acordo com o módulo da força centrípeta que age sobre o carrinho ao passar por eles, começando pelo maior.

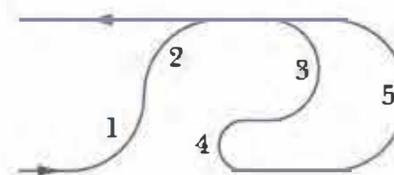



Figura 6.16 Pergunta 9.

10 Em 1987, para comemorar o dia de Halloween, dois paraquedistas trocaram uma abóbora entre si enquanto estavam em queda livre, a oeste de Chicago. A brincadeira foi muito divertida até que o homem que estava com a abóbora abriu o paraquedas. A abóbora foi arrancada de suas mãos, despencou 0,5 km, atravessou o telhado de uma casa, bateu no chão da cozinha e se espalhou por toda a cozinha recém-reformada. O que fez o paraquedista deixar cair a abóbora, do ponto de vista do paraquedista e do ponto de vista da abóbora?

11 Uma pessoa que está andado de roda-gigante passa pelas seguintes posições: (1) o ponto mais alto da roda, (2) o ponto mais baixo da roda; (3) o ponto médio da roda. Se a roda está girando com velocidade angular constante, ordene as três posições, em ordem decrescente, de acordo (a) com o módulo da aceleração centrípeta da pessoa; (b) com o módulo da força centrípeta resultante a que a pessoa está sujeita e (c) com o módulo da força normal a que a pessoa está sujeita.

PROBLEMAS

• – •• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física* de Jearl Walker, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

Seção 6-3 Propriedades do Atrito

•1 O piso de um vagão de trem está carregado de caixas soltas cujo coeficiente de atrito estático com o piso é 0,25. Se o trem está se movendo inicialmente com uma velocidade de 48 km/h, qual é a menor distância na qual o trem pode ser parado com aceleração constante sem que as caixas deslizem no piso?

•2 Em um jogo de *shuffleboard* improvisado, estudantes enlouquecidos pelos exames finais usam uma vassoura para movimentar um livro de cálculo no corredor do dormitório. Se o livro de 3,5 kg adquire uma velocidade de 1,60 m/s ao ser empurrado pela vassoura, a partir do repouso, com uma força horizontal de 25 N, por uma distância de 0,90 m, qual é o coeficiente de atrito cinético entre o livro e o piso?

•3 Uma cômoda com uma massa de 45 kg, incluindo as gavetas e as roupas, está em repouso sobre o piso. (a) Se o coeficiente de atrito estático entre a cômoda e o piso é 0,45, qual é o módulo da menor força horizontal necessária para fazer a cômoda entrar em movimento? (b) Se as gavetas e as roupas, com uma massa total de 17 kg, são removidas antes de empurrar a cômoda, qual é o novo módulo mínimo?

•4 Um porco brincalhão escorrega em uma rampa com uma inclinação de 35° e leva o dobro do tempo que levaria se não houvesse atrito. Qual é o coeficiente de atrito cinético entre o porco e a rampa?

•5 Um bloco de 2,5 kg está inicialmente em repouso em uma superfície horizontal. Uma força horizontal $\vec{F}$ de módulo 6,0 N e uma força vertical $\vec{P}$ são aplicadas ao bloco (Fig. 6-17). Os coeficientes de atrito entre o bloco e a superfície são $\mu_s = 0,40$ e $\mu_k = 0,25$. Determine o módulo da força de atrito que age sobre o bloco se o módulo de $\vec{P}$ é (a) 8,0 N, (b) 10 N e (c) 12 N.

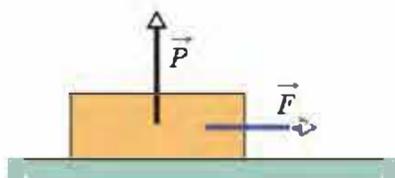



Figura 6-17 Problema 5.

•6 Um jogador de beisebol de massa $m = 79$ kg, deslizando para chegar à segunda base, é retardado por uma força de atrito de módulo 470 N. Qual é o coeficiente de atrito cinético μ_k entre o jogador e o chão?

•7 Uma pessoa empurra horizontalmente um caixote de 55 kg com uma força de 220 N para deslocá-lo em um piso plano. O coeficiente de atrito cinético é 0,35. (a) Qual é o módulo da força de atrito? (b) Qual é o módulo da aceleração do caixote?

•8 *As misteriosas pedras que migram.* Na remota Racetrack Playa, no Vale da Morte, Califórnia, as pedras às vezes deixam rastros no chão do deserto, como se estivessem migrando (Fig. 6-18). Há muitos anos que os cientistas tentam explicar como as pedras se movem. Uma possível explicação é que, durante uma tempestade ocasional, os fortes ventos arrastam as pedras no solo amolecido pela chuva. Quando o solo seca, os rastros deixados pelas pedras são endurecidos pelo calor. Segundo medições realizadas no local, o coeficiente de atrito cinético entre as pedras e o solo úmido do deserto é aproximadamente 0,80. Qual é a força horizontal necessária para manter em movimento uma pedra de 20 kg (uma massa típica) depois que uma rajada de vento a coloca em movimento? (A história continua no Problema 37.)

Figura 6-18 Problema 8. O que fez a pedra se mover? *(Jerry Schad/Photo Researchers)*

•9 Um bloco de 3,5 kg é empurrado ao longo de um piso horizontal por uma força $\vec{F}$ de módulo 15 N que faz um ângulo $\theta = 40°$ com a horizontal (Figura 6-19). O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o piso é 0,25. Calcule (a) o módulo da força de atrito que o piso exerce sobre o bloco e (b) o módulo da aceleração do bloco.

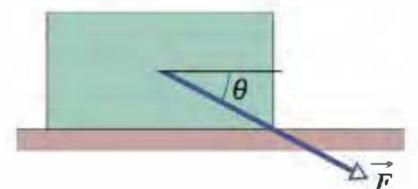



Figura 6-19 Problemas 9 e 32.

•10 A Fig. 6-20 mostra um bloco inicialmente estacionário de massa m sobre um piso. Uma força de módulo 0,500 mg é aplicada com um ângulo $\theta = 20°$ para cima. Qual é o módulo da aceleração

do bloco se (a) $\mu_s = 0{,}600$ e $\mu_k = 0{,}500$ e (b) $\mu_s = 0{,}400$ e $\mu_k = 0{,}300$?

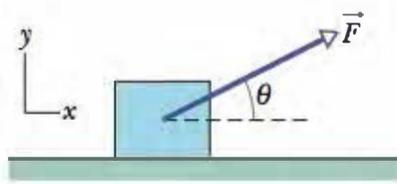



Figura 6-20 Problema 10.

•11 Um caixote de 68 kg é arrastado sobre um piso, puxado por uma corda inclinada 15° acima da horizontal. (a) Se o coeficiente de atrito estático é 0,50, qual é o valor mínimo do módulo da força para que o caixote comece a se mover? (b) Se $\mu_k = 0{,}35$, qual é o módulo da aceleração inicial do caixote?

•12 Por volta de 1915, Henry Sincosky, da Filadélfia, pendurou-se no caibro de um telhado apertando-o com os polegares de um lado e os outros dedos do outro lado (Fig. 6-21). A massa de Sincosky era 79 kg. Se o coeficiente de atrito estático entre as mãos e o caibro era 0,70, qual foi, no mínimo, o módulo da força normal exercida sobre o caibro pelos polegares ou os dedos do lado oposto? (Depois de se pendurar, Sincosky ergueu o corpo e deslocou-se ao longo do caibro, trocando de mão. Se você não dá valor ao feito de Sincosky, tente repetir a proeza.)

Figura 6-21 Problema 12.

•13 Um operário empurra um engradado de 35 kg com uma força horizontal de módulo 110 N. O coeficiente de atrito estático entre o engradado e o piso é 0,37. (a) Qual é o valor de $f_{s,máx}$ nessas circunstâncias? (b) O engradado se move? (c) Qual é a força de atrito que o piso exerce sobre o engradado? (d) Suponha que um segundo operário, no intuito de ajudar, puxe o engradado para cima. Qual é o menor puxão vertical que permite ao primeiro operário mover o engradado com o empurrão de 110 N? (e) Se, em vez disso, o segundo operário tenta ajudar puxando horizontalmente o engradado, qual é o menor puxão que coloca o engradado em movimento?

•14 A Fig. 6-22 mostra a seção transversal de uma estrada na encosta de uma montanha. A reta AA' representa um plano de estratificação ao longo do qual pode ocorrer um deslizamento. O bloco B, situado acima da estrada, está separado do resto da montanha por uma grande fenda (chamada *junta*), de modo que somente o atrito entre o bloco e o plano de estratificação evita o deslizamento. A massa do bloco é $1{,}8 \times 10^7$ kg, o *ângulo de mergulho* θ do plano de estratificação é 24° e o coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano é 0,63. (a) Mostre que o bloco não desliza. (b) A água penetra na junta e se expande após congelar, exercendo sobre o bloco uma força $\vec{F}$ paralela a AA'. Qual é o valor mínimo do módulo F da força para o qual ocorre um deslizamento?

Figura 6-22 Problema 14.

•15 O coeficiente de atrito estático entre o Teflon e ovos mexidos é cerca de 0,04. Qual é o menor ângulo com a horizontal que faz com que os ovos deslizem no fundo de uma frigideira revestida com Teflon?

••16 Um trenó com um pinguim, pesando 80 N, está em repouso sobre uma ladeira de ângulo $\theta = 20°$ com a horizontal (Fig. 6-23). Entre o trenó e a ladeira, o coeficiente de atrito estático é 0,25 e o coeficiente de atrito cinético é 0,15. (a) Qual é o menor módulo da força $\vec{F}$, paralela ao plano, que impede o trenó de deslizar ladeira abaixo? (b) Qual é o menor módulo F que faz o trenó começar a subir a ladeira? (c) Qual é o valor de F que faz o trenó subir a ladeira com velocidade constante?

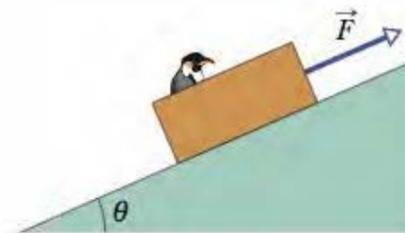



Figura 6-23 Problemas 16 e 22.

••17 Na Fig. 6-24, uma força $\vec{P}$ atua sobre um bloco com 45 N de peso. O bloco está inicialmente em repouso sobre um plano inclinado de ângulo $\theta = 15°$ com a horizontal. O sentido positivo do eixo x é para cima ao longo do plano. Os coeficientes de atrito entre o bloco e o plano são $\mu_s = 0{,}50$ e $\mu_k = 0{,}34$. Em termos dos vetores unitários, qual é a força de atrito exercida pelo plano sobre o bloco quando $\vec{P}$ é igual a (a) $(-5{,}0\text{ N})\hat{i}$, (b) $(-8{,}0\text{ N})\hat{i}$ e (c) $(-15{,}0\text{ N})\hat{i}$?

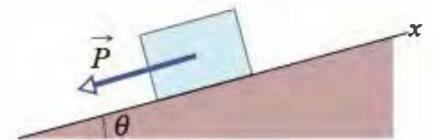



Figura 6-24 Problema 17.

••18 Você depõe como perito em um caso envolvendo um acidente no qual um carro A bateu na traseira de um carro B que estava parado em um sinal vermelho no meio de uma ladeira (Fig. 6-25). Você descobre que a inclinação da ladeira é $\theta = 12{,}0°$, que os carros estavam separados por uma distância $d = 24{,}0$ m quando o motorista do carro A freou bruscamente, bloqueando as rodas (o carro não dispunha de freios ABS), e que a velocidade do carro A no momento em que o motorista pisou no freio era $v_0 = 18$ m/s. Com que velocidade o carro A bateu no carro B se o coeficiente de atrito cinético era (a) 0,60 (estrada seca) e (b) 0,10 (estrada coberta de folhas molhadas)?

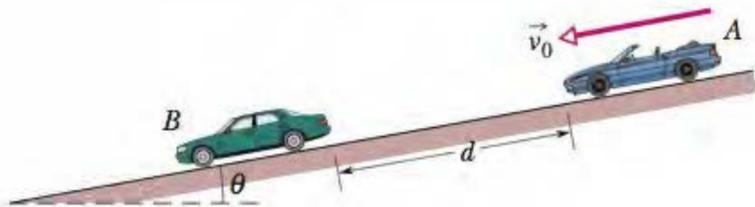



Figura 6-25 Problema 18.

Figura 6-29 Problema 23.

••19 Uma força horizontal $\vec{F}$ de 12 N empurra um bloco de 5,0 N de peso contra uma parede vertical (Fig. 6-26). O coeficiente de atrito estático entre a parede e o bloco é 0,60 e o coeficiente de atrito cinético é 0,40. Suponha que o bloco não esteja se movendo inicialmente. (a) O bloco vai se mover? (b) Qual é a força que a parede exerce sobre o bloco em termos dos vetores unitários?

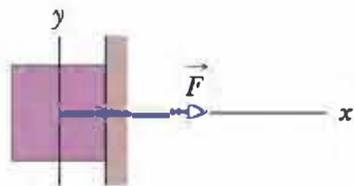



Figura 6-26 Problema 19.

••20 Na Fig. 6-27, uma caixa de cereais Cheerios (massa m_C = 1,0 kg) e uma caixa de cereais Wheaties (massa m_W = 3,0 kg) são aceleradas sobre uma superfície horizontal por uma força horizontal $\vec{F}$ aplicada à caixa de cereal Cheerios. O módulo da força de atrito que age sobre a caixa de Cheerios é 2,0 N e o módulo da força de atrito que age sobre a caixa de Wheaties é 4,0 N. Se o módulo de $\vec{F}$ é 12 N, qual é o módulo da força que a caixa de Cheerios exerce sobre a caixa de Wheaties?

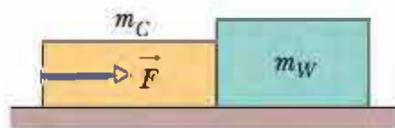



Figura 6-27 Problema 20.

••21 Uma caixa de areia, inicialmente estacionária, vai ser puxada em um piso por meio de um cabo no qual a tensão não deve exceder 1100 N. O coeficiente de atrito estático entre a caixa e o piso é de 0,35. (a) Qual deve ser o ângulo entre o cabo e a horizontal para que se consiga puxar a maior quantidade possível de areia e (b) qual é o peso da areia e da caixa nesta situação?

••22 Na Fig. 6-23, um trenó é sustentado em um plano inclinado por uma corda que o puxa para cima paralelamente ao plano. O trenó está na iminência de começar a subir. A Fig. 6-28 mostra o módulo F da força aplicada à corda em função do coeficiente de atrito estático μ_s entre o trenó e o plano. Se F_1 = 2,0 N, F_2 = 5,0 N e μ_2 = 0,50, qual é o valor do ângulo θ do plano inclinado?

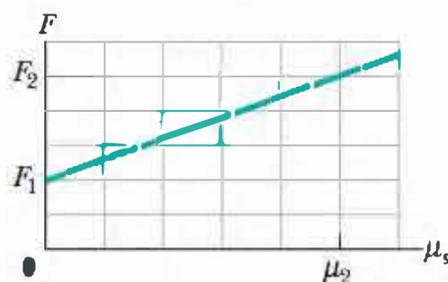
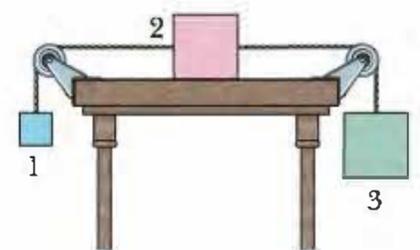



Figura 6-28 Problema 22.

••23 Quando os três blocos da Fig. 6-29 são liberados a partir do repouso, aceleram com um módulo de 0,500 m/s^2. O bloco 1 tem massa M, o bloco 2 tem massa $2M$ e o bloco 3 tem massa $2M$. Qual é o coeficiente de atrito cinético entre o bloco 2 e a mesa?

••24 Um bloco de 4,10 kg é empurrado sobre um piso por uma força horizontal constante de módulo 40,0 N. A Fig. 6-30 mostra a velocidade v do bloco em função do tempo t quando o bloco se desloca sobre o piso ao longo de um eixo x. A escala vertical do gráfico é definida por v_s = 5,0 m/s. Qual é o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o piso?

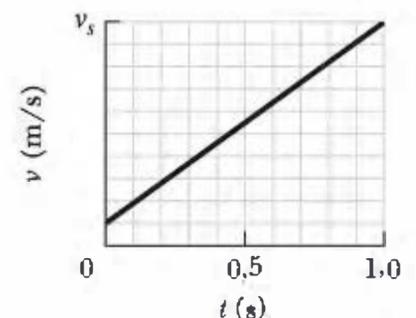



Figura 6-30 Problema 24.

••25 O bloco B da Fig. 6-31 pesa 711 N. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a mesa é 0,25; o ângulo θ é 30°; suponha que o trecho da corda entre o bloco B e o nó é horizontal. Determine o peso máximo do bloco A para o qual o sistema permanece em repouso.

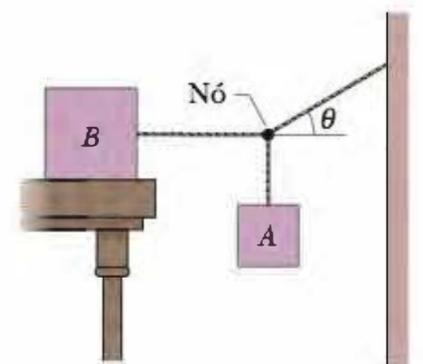



Figura 6-31 Problema 25.

••26 A Fig. 6-32 mostra três caixotes sendo empurrados sobre um piso de concreto por uma força horizontal $\vec{F}$ de módulo 440 N. As massas dos caixotes são m_1 = 30,0 kg, m_2 = 10,0 kg e m_3 = 20,0 kg. O coeficiente de atrito cinético entre o piso e cada um dos caixotes é de 0,700. (a) Qual é o módulo F_{32} da força exercida sobre o bloco 3 pelo bloco 2? (b) Se os caixotes deslizassem sobre um piso polido, com um coeficiente de atrito cinético menor que 0,700, o módulo F_{32} seria maior, menor ou igual ao valor quando o coeficiente de atrito era 0,700?

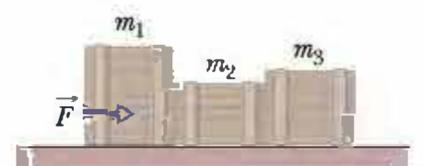



Figura 6-32 Problema 26.

••27 O bloco A da Fig. 6-33 pesa 102 N e o bloco B pesa 32 N. Os coeficientes de atrito entre A e a rampa são μ_s = 0,56 e μ_k = 0,25. O ângulo θ é igual a 40°. Suponha que o eixo x é paralelo à rampa, com o sentido positivo para cima. Em termos dos vetores unitários, qual é a aceleração de A se A está inicialmente (a) em repouso, (b) subindo a rampa e (c) descendo a rampa?

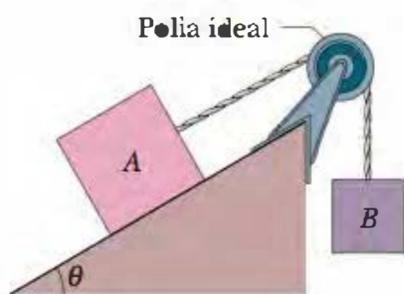



Figura 6-33 Problemas 27 e 28.

Figura 6-36 Problema 32.

••28 Na Fig. 6-33, dois blocos estão ligados por um fio que passa por uma polia. A massa do bloco A é 10 kg e o coeficiente de atrito cinético entre A e a rampa é 0,20. O ângulo θ da rampa é 30°. O bloco A desliza para baixo ao longo da rampa com velocidade constante. Qual é a massa do bloco B?

••29 Na Fig. 6-34, os blocos A e B pesam 44 N e 22 N, respectivamente. (a) Determine o menor peso do bloco C que evita que o bloco A deslize, se μ_s entre A e a mesa é 0,20. (b) O bloco C é removido bruscamente de cima do bloco A. Qual é a aceleração do bloco A se μ_k entre A e a mesa é 0,15?

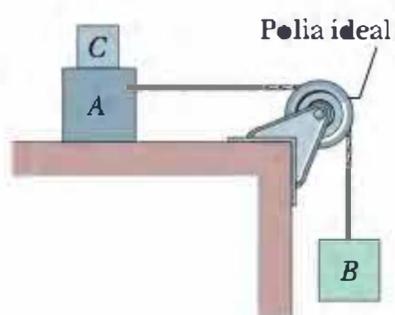



Figura 6-34 Problema 29.

••30 Uma caixa de brinquedos e seu conteúdo têm um peso total de 180 N. O coeficiente de atrito estático entre a caixa de brinquedos e o piso é 0,42. A criança da Fig. 6-35 tenta arrastar a caixa puxando-a por uma corda. (a) Se $\theta = 42°$, qual é o módulo da força $\vec{F}$ que a criança deve fazer sobre a corda para que a caixa esteja na iminência de se mover? (b) Escreva uma expressão para o menor valor do módulo de $\vec{F}$ necessário para que a caixa se mova em função do ângulo θ. Determine (c) o valor de θ para o qual F é mínimo e (d) o valor desse módulo mínimo.

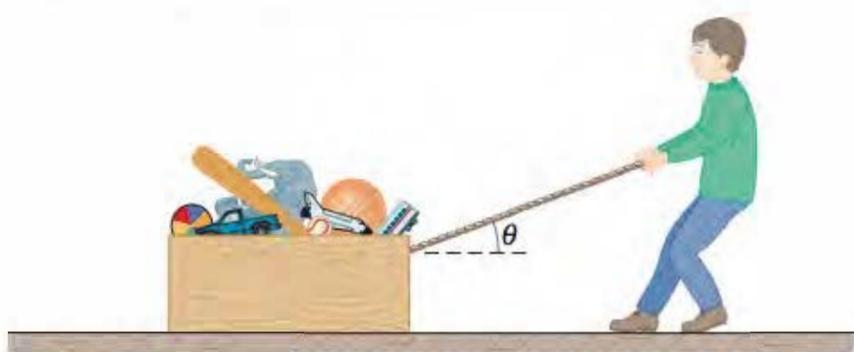
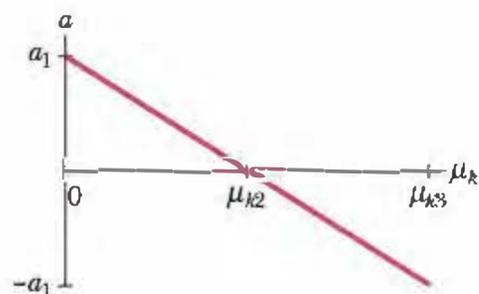



Figura 6-35 Problema 30.

••31 Dois blocos, com 3,6 N e 7,2 N de peso, estão ligados por uma corda sem massa e deslizam para baixo em um plano inclinado de 30°. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco mais leve e o plano é 0,10 e o coeficiente de atrito cinético entre o bloco mais pesado e o plano é 0,20. Supondo que o bloco mais leve desce na frente, determine (a) o módulo da aceleração dos blocos e (b) a tensão da corda.

••32 Um bloco é empurrado sobre um piso horizontal por uma força constante que é aplicada fazendo um ângulo θ para baixo (Fig. 6-19). A Fig. 6-36 mostra o módulo da aceleração a em função do coeficiente de atrito cinético μ_k entre o bloco e o piso. Se $a_1 =$ 3,0 m/s², $\mu_{k2} = 0{,}20$ e $\mu_{k3} = 0{,}40$, qual é o valor de θ?

•••33 Um barco de 1000 kg está navegando a 90 km/h quando o motor é desligado. O módulo da força de atrito $\vec{f}_k$ entre o barco e a água é proporcional à velocidade v do barco: $f_k = 70v$, onde v está em metros por segundo e f_k em newtons. Determine o tempo necessário para o barco reduzir a velocidade para 45 km/h.

•••34 Na Fig. 6-37, uma prancha de massa $m_1 = 40$ kg repousa em um piso sem atrito e um bloco de massa $m_2 = 10$ kg repousa sobre a prancha. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a prancha é 0,60 e o coeficiente de atrito cinético é 0,40. O bloco é puxado por uma força horizontal $\vec{F}$ de módulo 100 N. Em termos dos vetores unitários, qual é a aceleração (a) do bloco e (b) da prancha?

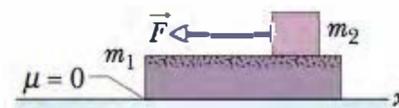



Figura 6-37 Problema 34.

•••35 Os dois blocos (m = 16 kg e M = 88 kg) da Fig. 6-38 não estão ligados. O coeficiente de atrito estático entre os blocos é μ_s = 0,38, mas não há atrito na superfície abaixo do bloco maior. Qual é o menor valor do módulo da força horizontal $\vec{F}$ para o qual o bloco menor não escorrega para baixo ao longo do bloco maior?

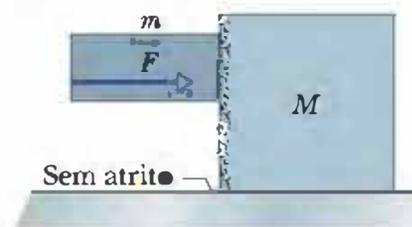



Figura 6-38 Problema 35.

Seção 6-4 Força de Arrasto e Velocidade Terminal

•36 A velocidade terminal de um paraquedista é 160 km/h na posição de águia e 310 km/h na posição de mergulho de cabeça. Supondo que o coeficiente de arrasto C do paraquedista não muda de uma posição para outra, determine a razão entre a área da seção reta efetiva A na posição de menor velocidade e a área na posição de maior velocidade.

••37 *Continuação do Problema 8.* Suponha agora que a Eq. 6-14 forneça o módulo da força de arrasto que age sobre uma pedra típica de 20 kg, que apresenta ao vento uma área de seção reta vertical de 0,040 m² e tem um coeficiente de arrasto C de 0,80. Tome a massa específica do ar como 1,21 kg/m³ e o coeficiente de atrito cinético como 0,80. (a) Que velocidade V de um vento paralelo ao solo, em quilômetros por hora, é necessária para manter a pedra em movimento depois que começa a se mover? Como a velocidade do vento perto do solo é reduzida pela presença do solo, a velocidade do vento informada nos boletins meteorológicos é frequentemente medida a uma altura de 10 m. Suponha que a velocidade do vento a essa altura seja 2,00 vezes maior que junto ao solo. (b) Para a resposta do item a, que velocidade do vento seria informada nos boletins meteorológicos? (c) Esse valor é razoável para um vento

de alta velocidade durante uma tempestade? (A história continua com o Problema 65.)

••38 Suponha que a Eq. 6-14 forneça a força de arrasto a que estão sujeitos um piloto e o assento de ejeção imediatamente após terem sido ejetados de um avião voando horizontalmente a 1300 km/h. Suponha também que a massa do assento seja igual à massa do piloto e que o coeficiente de arrasto seja o mesmo que o de um paraquedista. Fazendo uma estimativa razoável para a massa do piloto e usando o valor apropriado de v_t da Tabela 6-1, estime o módulo (a) da força de arrasto sobre o conjunto *piloto + assento* e (b) da desaceleração horizontal (em termos de g) do conjunto, ambos imediatamente após a ejeção. [O resultado do item (a) deve servir de alerta para os projetistas: o assento precisa dispor de um anteparo para desviar o vento da cabeça do piloto.]

••39 Calcule a razão entre a força de arrasto experimentada por um avião a jato voando a 1000 km/h a uma altitude de 10 km e a força de arrasto experimentada por um avião a hélice voando a metade da altitude com metade da velocidade. A massa específica do ar é 0,38 kg/m³ a 10 km e 0,67 kg/m³ a 5,0 km. Suponha que os aviões possuem a mesma área de seção reta efetiva e o mesmo coeficiente de arrasto C.

••40 Ao descer uma encosta, um esquiador é freado pela força de arrasto que o ar exerce sobre o seu corpo e pela força de atrito cinético que a neve exerce sobre os esquis. (a) Suponha que o ângulo da encosta é $\theta = 40{,}0°$, que a neve é neve seca, com um coeficiente de atrito cinético $\mu_k = 0{,}0400$, que a massa do esquiador e seu equipamento é $m = 85{,}0$ kg, que a área da seção reta do esquiador (agachado) é $A = 1{,}30$ m², que o coeficiente de arrasto é $C = 0{,}150$ e que a massa específica do ar é 1,20 kg/m³. (a) Qual é a velocidade terminal? (b) Se o esquiador pode fazer o coeficiente de arrasto C sofrer uma pequena variação dC alterando, por exemplo, a posição das mãos, qual é a variação correspondente da velocidade terminal?

Seção 6-5 Movimento Circular Uniforme

•41 Um gato está cochilando em um carrossel parado, a uma distância de 5,4 m do centro. O brinquedo é ligado e logo atinge a velocidade normal de funcionamento, na qual completa uma volta a cada 6,0 s. Qual deve ser, no mínimo, o coeficiente de atrito estático entre o gato e o carrossel para que o gato permaneça no mesmo lugar, sem escorregar?

•42 Suponha que o coeficiente de atrito estático entre a estrada e os pneus de um carro é 0,60 e não há sustentação negativa. Que velocidade deixa o carro na iminência de derrapar quando faz uma curva não compensada com 30,5 m de raio?

•43 Qual é o menor raio de uma curva sem compensação (plana) que permite que um ciclista a 29 km/h faça a curva sem derrapar se o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a pista é 0,32?

•44 Durante uma corrida de trenós nas Olimpíadas de Inverno, a equipe jamaicana fez uma curva de 7,6 m de raio a uma velocidade de 96,6 km/h. Qual foi a aceleração em unidades de g?

••45 Um estudante que pesa 667 N está sentado, com as costas eretas, em uma roda-gigante em movimento. No ponto mais alto, o módulo da força normal $\vec{F}_N$ exercida pelo assento sobre o estudante é 556 N. (a) O estudante se sente mais leve ou mais pesado neste ponto? (b) Qual é o módulo de $\vec{F}_N$ no ponto mais baixo? Se a velocidade da roda-gigante é duplicada, qual é o módulo F_N da força normal (c) no ponto mais alto e (d) no ponto mais baixo?

••46 Uma policial de 55,0 kg, que está perseguindo um suspeito de carro, faz uma curva circular de 300 m de raio a uma velocidade escalar constante de 80 km/h. Determine (a) o módulo e (b) o ângulo (em relação à vertical) da força *resultante* que a policial exerce sobre o assento do carro. (*Sugestão:* considere as forças horizontais e verticais.)

••47 Um viciado em movimentos circulares, com 80 kg de massa, está andando em uma roda-gigante que descreve uma circunferência vertical de 10 m de raio a uma velocidade escalar constante de 6,1 m/s. (a) Qual é o período do movimento? Qual é o módulo da força normal exercida pelo assento sobre o viciado quando ambos passam (b) pelo ponto mais alto da trajetória circular e (c) pelo ponto mais baixo?

••48 Um carro de montanha-russa tem uma massa de 1200 kg quando está lotado. Quando o carro passa pelo alto de uma elevação circular com 18 m de raio, a velocidade escalar se mantém constante. Nesse instante, quais são (a) o módulo F_N e (b) o sentido (para cima ou para baixo) da força normal exercida pelo trilho sobre o carro se a velocidade do carro é $v = 11$ m/s? Quais são (c) F_N e (d) o sentido da força normal se $v = 14$ m/s?

••49 Na Fig. 6-39, um carro passa com velocidade constante por uma colina circular e por um vale circular de mesmo raio. No alto da colina, a força normal exercida sobre o motorista pelo assento do carro é zero. A massa do motorista é de 70,0 kg. Qual é o módulo da força normal exercida pelo assento sobre o motorista quando o carro passa pelo fundo do vale?

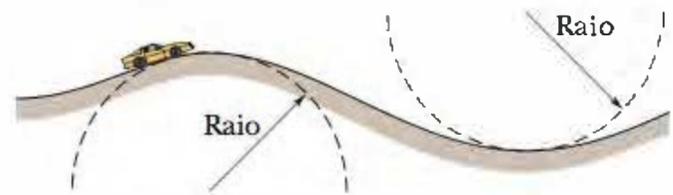



Figura 6-39 Problema 49.

••50 Um passageiro de 85,0 kg descreve uma trajetória circular de raio $r = 3{,}50$ m em movimento circular uniforme. (a) A Fig. 6-40*a* mostra um gráfico do módulo F da força centrípeta em função da velocidade v do passageiro. Qual é a inclinação do gráfico para $v = 8{,}30$ m/s? (b) A Fig. 6-40*b* mostra um gráfico do módulo F da força em função de T, o período do movimento. Qual é a inclinação do gráfico para $T = 2{,}50$ s?

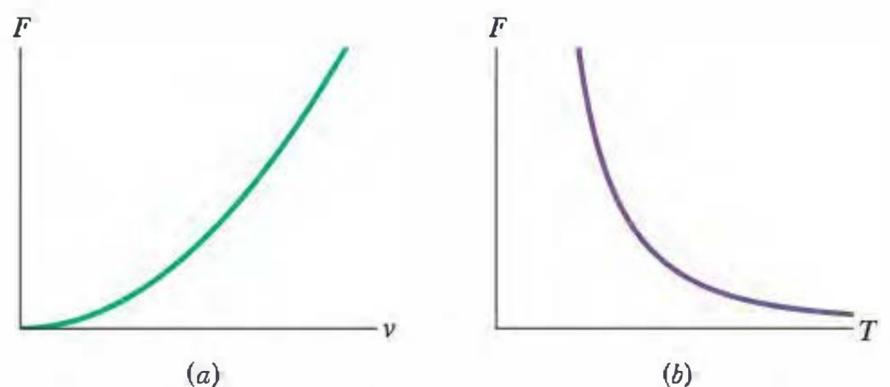



Figura 6-40 Problema 50.

••51 Um avião está voando em uma circunferência horizontal com uma velocidade de 480 km/h (Fig. 6-41). Se as asas estão inclinadas de um ângulo $\theta = 40°$ com a horizontal, qual é o raio da circunferência? Suponha que a força necessária para manter o avião nessa trajetória resulte inteiramente de uma "sustentação aerodinâmica" perpendicular à superfície das asas.

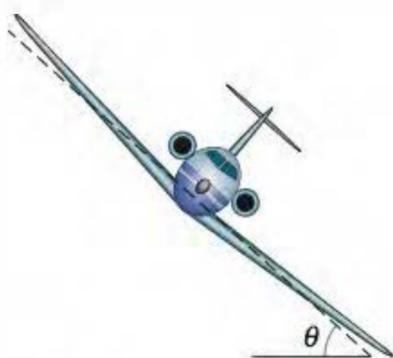



Figura 6-41 Problema 51.

••52 Em um brinquedo de parque de diversão, um carro se move em uma circunferência vertical na extremidade de uma haste rígida de massa desprezível. O peso do carro com os passageiros é 5,0 kN e o raio da circunferência é 10 m. No ponto mais alto da circunferência, quais são (a) o módulo F_H e (b) o sentido (para cima ou para baixo) da força exercida pela haste sobre o carro se a velocidade do carro é $v = 5{,}0$ m/s? Quais são (c) F_H e (d) o sentido se $v = 12$ m/s?

••53 Um bonde antigo dobra uma esquina fazendo uma curva plana com 9,1 m de raio a 16 km/h. Qual é o ângulo que as alças de mão penduradas no teto fazem com a vertical?

••54 Ao projetar brinquedos para parques de diversão que fazem movimentos circulares, os engenheiros mecânicos devem levar em conta o fato de que pequenas variações de certos parâmetros podem alterar significativamente a força experimentada pelos passageiros. Considere um passageiro de massa m que descreve uma trajetória circular de raio r com velocidade v. Determine a variação dF do módulo da força para (a) uma variação do raio r da trajetória, sem que v varie; (b) uma variação dv da velocidade, sem que r varie; (c) uma variação dT do período, sem que r varie.

••55 Um parafuso está enroscado em uma das extremidades de uma haste fina horizontal que gira em torno da outra extremidade. Um engenheiro monitora o movimento iluminando o parafuso e a haste com uma lâmpada estroboscópica e ajustando a frequência dos lampejos até que o parafuso pareça estar nas mesmas oito posições a cada rotação completa da haste (Fig. 6-42). A frequência dos lampejos é 2000 flashes por segundo; a massa do parafuso é 30 g e a haste tem 3,5 cm de comprimento. Qual é o módulo da força exercida pela haste sobre o parafuso?

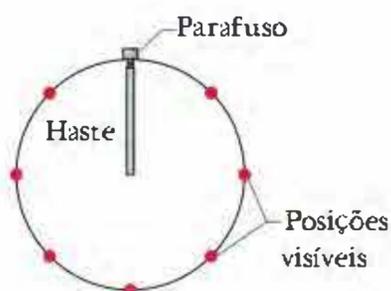



Figura 6-42 Problema 55.

••56 Uma curva circular compensada de uma rodovia foi planejada para uma velocidade de 60 km/h. O raio da curva é 200 m. Em um dia chuvoso, a velocidade dos carros diminui para 40 km/h. Qual é o menor coeficiente de atrito entre os pneus e a estrada para que os carros façam a curva sem derrapar? (Suponha que os carros não possuem sustentação negativa.)

••57 Um disco de metal de massa $m = 1{,}50$ kg descreve uma circunferência de raio $r = 20{,}0$ cm sobre uma mesa sem atrito enquanto permanece ligado a um cilindro de massa $M = 2{,}50$ kg pendurado por um fio que passa por um furo no centro da mesa (Fig. 6-43). Que velocidade do disco mantém o cilindro em repouso?

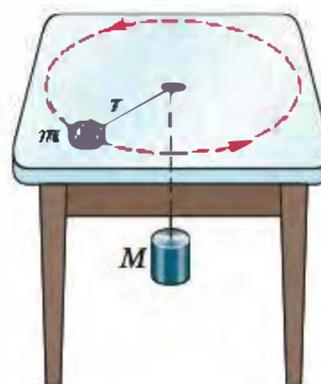



Figura 6-43 Problema 57.

••58 *Frear ou desviar?* A Fig. 6-44 mostra uma vista superior de um carro que se aproxima de um muro. Suponha que o motorista começa a frear quando a distância entre o carro e o muro é $d = 107$ m, que a massa do carro é $m = 1400$ kg, que a velocidade inicial é $v_0 = 35$ m/s e que o coeficiente de atrito estático é $\mu_s = 0{,}50$. Suponha também que o peso do carro está distribuído igualmente pelas quatro rodas, mesmo durante a frenagem. (a) Qual é o valor mínimo do módulo do atrito estático (entre os pneus e o piso) para que o carro pare antes de se chocar com o muro? (b) Qual é o valor máximo possível do atrito estático $f_{s,máx}$? (c) Se o coeficiente de atrito cinético entre os pneus (com as rodas bloqueadas) e o piso é $\mu_k = 0{,}40$, com que velocidade o carro se choca com o muro? O motorista também pode tentar se desviar do muro, como mostra a figura. (d) Qual é o módulo da força de atrito necessária para fazer o carro descrever uma trajetória circular de raio d e velocidade v_0? (e) A força calculada no item (d) é menor que $f_{s,máx}$, o que evitaria o choque?

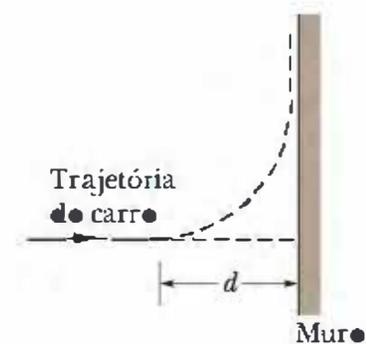



Figura 6-44 Problema 58.

•••59 Na Fig. 6-45, uma bola de 1,34 kg é ligada por meio de dois fios de massa desprezível, cada um com comprimento $L = 1{,}70$ m, a uma haste vertical giratória. Os fios estão amarrados à haste a uma distância $d = 1{,}70$ m um do outro e estão esticados. A tensão do fio de cima é 35 N. Determine (a) a tensão do fio de baixo; (b) o módulo da força resultante $\vec{F}_{res}$ a que está sujeita a bola; (c) a velocidade escalar da bola; (d) a direção de $\vec{F}_{res}$.

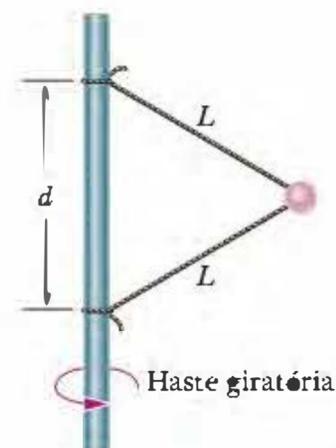



Figura 6-45 Problema 59.

Problemas Adicionais

60 Na Fig. 6-46, uma caixa com formigas vermelhas (massa total $m_1 = 1{,}65$ kg) e uma caixa com formigas pretas (massa total $m_2 = 3{,}30$ kg) deslizam para baixo em um plano inclinado, ligadas por uma haste sem massa paralela ao plano. O ângulo de inclinação é $\theta = 30{,}0°$. O coeficiente de atrito cinético entre a caixa com formigas vermelhas e a rampa é $\mu_1 = 0{,}226$; entre a caixa com formigas pretas e a rampa é $\mu_2 = 0{,}113$. Calcule (a) a tensão da haste e (b) o módulo da aceleração comum das duas caixas. (c) Como as respostas dos itens (a) e (b) mudariam se as posições das caixas fossem invertidas?

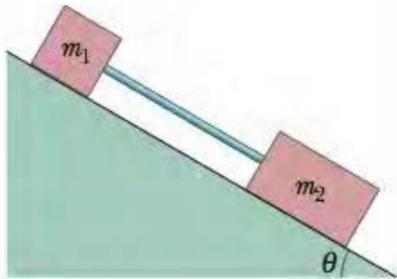



Figura 6-46 Problema 60.

61 Um bloco de massa $m_a = 4{,}0$ kg é colocado em cima de um outro bloco de massa $m_b = 5{,}0$ kg. Para fazer o bloco de cima deslizar sobre o bloco de baixo enquanto o segundo é mantido fixo, é preciso aplicar ao bloco de cima uma força horizontal de no mínimo 12 N. O conjunto de blocos é colocado sobre uma mesa horizontal sem atrito (Fig. 6-47). Determine o módulo (a) da maior força horizontal $\vec{F}$ que pode ser aplicada ao bloco de baixo sem que os blocos deixem de se mover juntos e (b) a aceleração resultante dos blocos.

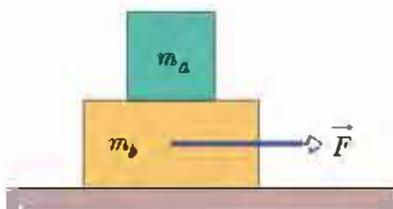



Figura 6-47 Problema 61.

62 Uma pedra de 5,00 kg é deslocada em contato com o teto horizontal de uma caverna (Fig. 6-48). Se o coeficiente de atrito cinético é 0,65 e a força aplicada à pedra faz um ângulo $\theta = 70{,}0°$ para cima com a horizontal, qual deve ser o módulo para que a pedra se mova com velocidade constante?

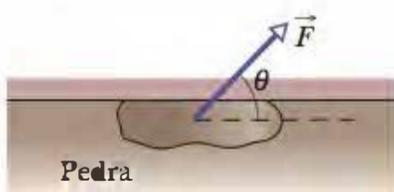



Figura 6-48 Problema 62.

63 Na Fig. 6-49, uma alpinista de 49 kg está subindo por uma "chaminé". O coeficiente de atrito estático entre as botas e a pedra é 1,2; entre as costas e a pedra é 0,80. A alpinista reduziu a força que está fazendo contra a pedra até que se encontra na iminência de escorregar. (a) Desenhe um diagrama de corpo livre da moça. (b) Qual é o módulo da força que a moça exerce contra a pedra? (c) Que fração do peso da moça é sustentada pelo atrito dos sapatos?

Figura 6-49 Problema 63.

64 Um vagão de um trem de alta velocidade faz uma curva horizontal de 470 m de raio, sem compensação, com velocidade constante. Os módulos das componentes horizontal e vertical da força que o vagão exerce sobre um passageiro de 51,0 kg são 210 N e 500 N, respectivamente. (a) Qual é o módulo da força resultante (de *todas* as forças) sobre o passageiro? (b) Qual é a velocidade do vagão?

65 *Continuação dos Problemas 8 e 37.* Outra explicação é que as pedras se movem apenas quando a água que cai na região durante uma tempestade congela, formando uma fina camada de gelo. As pedras ficam presas no gelo. Quando o vento sopra, o gelo e as pedras são arrastados e as pedras deixam as trilhas. O módulo da força de arrasto do ar sobre esta "vela de gelo" é dado por $D_{gelo} = 4C_{gelo}\rho A_{gelo}v^2$, onde C_{gelo} é o coeficiente de arrasto ($2{,}0 \times 10^{-3}$), ρ é a massa específica do ar (1,21 kg/m³), A_{gelo} é a área horizontal da camada de gelo e v a velocidade do vento.

Suponha o seguinte: a camada de gelo mede 400 m por 500 m por 4,0 mm e tem um coeficiente de atrito cinético 0,10 com o solo e uma massa específica de 917 kg/m³. Suponha ainda que 100 pedras iguais às do Problema 8 estão presas no gelo. Qual é a velocidade do vento necessária para manter o movimento da camada de gelo (a) nas proximidades da camada e (b) a uma altura de 10 m? (c) Esses valores são razoáveis para ventos fortes durante uma tempestade?

66 Na Fig. 6-50, o bloco 1, de massa $m_1 = 2{,}0$ kg, e o bloco 2, de massa $m_2 = 3{,}0$ kg, estão ligados por um fio de massa desprezível e são inicialmente mantidos em repouso. O bloco 2 está sobre uma superfície sem atrito com uma inclinação $\theta = 30°$. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco 1 e a superfície horizontal é 0,25. A polia tem massa e atrito desprezíveis. Ao serem liberados, os blocos entram em movimento. Qual é a tensão do fio?

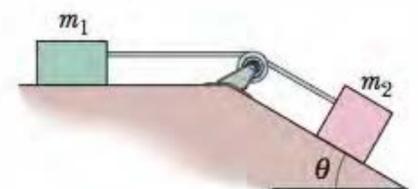



Figura 6-50 Problema 66.

67 Na Fig. 6-51, um caixote escorrega para baixo em uma vala inclinada cujos lados fazem um ângulo reto. O coeficiente de atrito cinético entre o caixote e a vala é μ_k. Qual é a aceleração do caixote em termos de μ_k, θ e g?

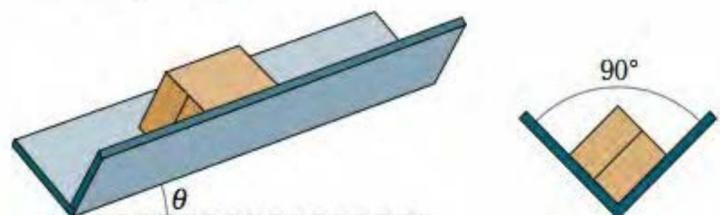



Figura 6-51 Problema 67.

68 *Projetando uma curva de uma rodovia.* Se um carro entra muito depressa em uma curva, tende a derrapar. No caso de uma curva compensada com atrito, a força de atrito que age sobre um carro em alta velocidade se opõe à tendência do carro de derrapar para fora da estrada; a força aponta para o lado mais baixo da pista (o lado para o qual a água escoaria). Considere uma curva circular de raio $R = 200$ m e um ângulo de compensação θ, na qual o coeficiente de atrito estático entre os pneus e o pavimento é μ_s. Um carro (sem sustentação negativa) começa a fazer a curva, como mostra a Fig. 6-11. (a) Escreva uma expressão para a velocidade do carro $v_{máx}$ que o coloca na iminência de derrapar. (b) Plote, no mesmo gráfico, $v_{máx}$ em função de θ para o intervalo de 0° a 50°, primeiro para $\mu_s = 0{,}60$ (pista seca) e depois para $\mu_s = 0{,}050$ (pista molhada). Calcule $v_{máx}$, em km/h, para um ângulo de compensação $\theta = 10°$ e para (c) $\mu_s = 0{,}60$ e (d) $\mu_s = 0{,}050$. (Agora você pode entender por que ocorrem acidentes nas curvas das estradas quando os motoristas não percebem que a estrada está molhada e continuam dirigindo na velocidade normal.)

69 Um estudante, enlouquecido pelos exames finais, usa uma força $\vec{P}$ de módulo 80 N e ângulo $\theta = 70°$ para empurrar um bloco de 5,0 kg no teto do quarto (Fig. 6-52). Se o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o teto é 0,40, qual é o módulo da aceleração do bloco?

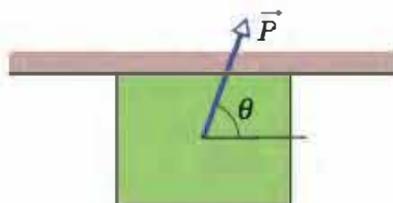



Figura 6-52 Problema 69.

70 A Fig. 6-53 mostra um *pêndulo cônico*, no qual um peso (pequeno objeto na extremidade inferior da corda) se move em uma circunferência horizontal com velocidade constante. (A corda descreve um cone quando o peso gira.) O peso tem uma massa de 0,040 kg, a corda tem um comprimento $L = 0{,}90$ m e a massa desprezível e o peso descreve uma circunferência de 0,94 m. Determine (a) a tensão da corda e (b) o período do movimento.

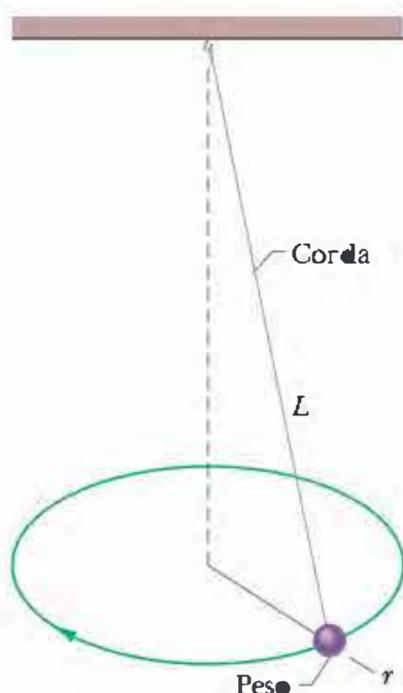



Figura 6-53 Problema 70.

71 Um bloco de aço de 8,00 kg repousa em uma mesa horizontal. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a mesa é 0,450. Uma força é aplicada ao bloco. Calcule, com três algarismos significativos, o módulo da força se ela coloca o bloco na iminência de deslizar quando é dirigida (a) horizontalmente, (b) para cima, formando um ângulo de 60,0° com a horizontal e (c) para baixo, formando um ângulo de 60,0° com a horizontal.

72 Uma caixa de enlatados escorrega em uma rampa do nível da rua até o subsolo de um armazém com uma aceleração de 0,75 m/s² dirigida para baixo ao longo da rampa. A rampa faz um ângulo de 40° com a horizontal. Qual é o coeficiente de atrito cinético entre a caixa e a rampa?

73 Na Fig. 6-54, o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano inclinado é 0,20 e o ângulo θ é 60°. Quais são (a) o módulo a e (b) o sentido (para cima ou para baixo ao longo do plano) da aceleração do bloco se ele está escorregando para baixo? Quais são (c) o módulo a e (d) o sentido da aceleração se o bloco está escorregando para cima?

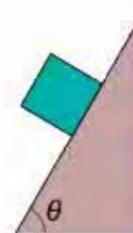



Figura 6-54 Problema 73.

74 Um disco de metal de 110 g que desliza sobre o gelo é parado em 15 m pela força de atrito que o gelo exerce sobre o disco. (a) Se a velocidade inicial do disco é 60 m/s, qual é o módulo da força de atrito? (b) Qual é o coeficiente de atrito entre o disco e o gelo?

75 Uma locomotiva acelera um trem de 25 vagões em uma linha férrea plana. Cada vagão possui uma massa de $5{,}0 \times 10^4$ kg e está sujeito a uma força de atrito $f = 250v$, onde a velocidade v está em metros por segundo e a força f está em newtons. No instante em que a velocidade do trem é 30 km/h, o módulo da aceleração é 0,20 m/s². (a) Qual é a tensão no engate entre o primeiro vagão e a locomotiva? (b) Se essa tensão é igual à força máxima que a locomotiva pode exercer sobre o trem, qual é o maior aclive que a linha férrea pode ter para que a locomotiva consiga puxar o trem a 30 km/h?

76 Uma casa é construída no alto de uma colina, perto de uma encosta com uma inclinação $\theta = 45°$ (Fig. 6-55). Um estudo de engenharia indica que o ângulo do declive deve ser reduzido porque as camadas superiores do solo podem deslizar em relação às camadas inferiores. Se o coeficiente de atrito estático entre essas camadas é 0,5, qual é o menor ângulo ϕ de que a inclinação atual deve ser reduzida para evitar deslizamentos?

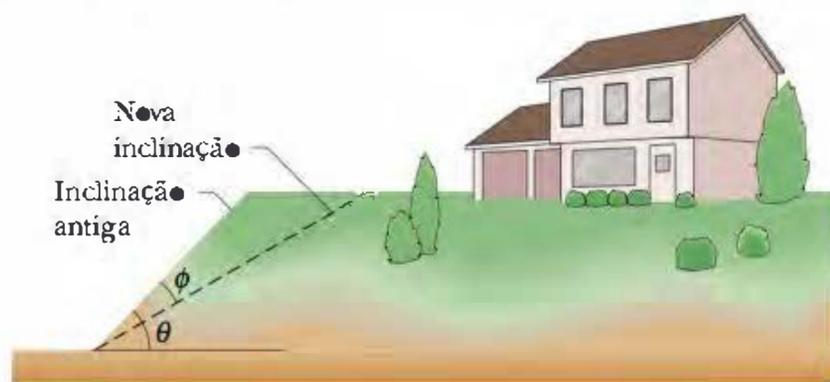



Figura 6-55 Problema 76.

77 Qual é a velocidade terminal de uma bola esférica de 6,00 kg que possui um raio de 3,00 cm e um coeficiente de arrasto de 1,60? A massa específica do ar no local onde a bola está caindo é 1,20 kg/m³.

78 Uma estudante pretende determinar os coeficientes de atrito estático e atrito cinético entre uma caixa e uma tábua. Para isso, coloca

a caixa sobre a tábua e levanta lentamente uma das extremidades da tábua. Quando o ângulo de inclinação em relação à horizontal chega a 30°, a caixa começa a escorregar e percorre 2,5 m ao longo da tábua em 4,0 s, com aceleração constante. Quais são (a) o coeficiente de atrito estático e (b) o coeficiente de atrito cinético entre a caixa e a tábua?

79 O bloco A da Fig. 6-56 possui massa $m_A = 4{,}0$ kg e o bloco B possui massa $m_B = 2{,}0$ kg. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco B e o plano horizontal é $\mu_k = 0{,}50$. O ângulo do plano inclinado sem atrito é $\theta = 30°$. A polia serve apenas para mudar a direção do fio que liga os blocos. O fio possui massa desprezível. Determine (a) a tensão do fio e (b) o módulo da aceleração dos blocos.

Polia ideal
m_B
B
m_A
A
μ_k
θ

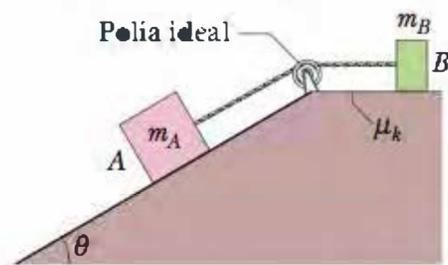



Figura 6-56 Problema 79.

80 Calcule o módulo da força de arrasto a que está sujeito um míssil de 53 cm de diâmetro voando a 250 m/s em baixa altitude. Suponha que a massa específica do ar é 1,2 kg/m³ e o coeficiente de arrasto C é 0,75.

81 Um ciclista se move em um círculo de 25,0 m de raio com uma velocidade constante de 9,00 m/s. A massa do conjunto ciclista–bicicleta é 85,0 kg. Calcule o módulo (a) da força de atrito que a pista exerce sobre a bicicleta e (b) da força *resultante* que a pista exerce sobre a bicicleta.

82 Na Fig. 6-57, um carro (sem sustentação negativa), dirigido por um dublê, passa pelo alto de um morro cuja seção transversal pode ser aproximada por uma circunferência de raio $R = 250$ m. Qual é a maior velocidade para a qual o carro não perde contato com a estrada no alto do morro?

R

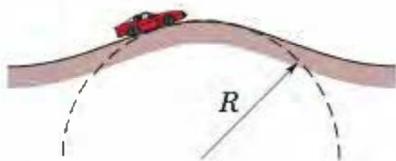



Figura 6-57 Problema 82.

83 Você precisa empurrar um caixote até um atracadouro. O caixote pesa 165 N. O coeficiente de atrito estático entre o caixote e o piso é 0,510 e o coeficiente de atrito cinético é 0,32. A força que você exerce sobre o caixote é horizontal. (a) Qual deve ser o módulo da força para que o caixote comece a se mover? (b) Qual deve ser o módulo da força, depois que o caixote começa a se mover, para que se mova com velocidade constante? (c) Se, depois que o caixote começar a se mover, o módulo da força tiver o valor calculado no item a, qual será o módulo da aceleração do caixote?

84 Na Fig. 6-58, uma força $\vec{F}$ é aplicada a um caixote de massa m que repousa em um piso; o coeficiente de atrito estático entre o caixote e o piso é μ_s. O ângulo θ é inicialmente 0°, mas é gradualmente aumentado, de modo que a direção da força gira no sentido horário. Durante a rotação, a intensidade da força é continuamente ajustada para que o caixote permaneça na iminência de se mover. Para $\mu_s = 0{,}70$, (a) plote a razão F/mg em função de θ e (b) determine o ângulo θ_{inf} para o qual a razão se torna infinita. (c) Se o piso é lubrificado, o valor de θ_{inf} aumenta, diminui ou permanece inalterado? (d) Qual é o valor de θ_{inf} para $\mu_s = 0{,}60$?

y
x
θ
$\vec{F}$

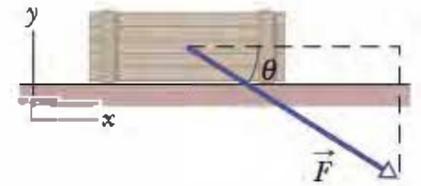



Figura 6-58 Problema 84.

85 Durante a tarde, um carro é estacionado em uma ladeira que faz um ângulo de 35,0° com a horizontal. Nesse momento, o coeficiente de atrito estático entre os pneus e o asfalto é 0,725. Quando anoitece, começa a nevar e o coeficiente de atrito diminui, tanto por causa da neve como por causa das mudanças químicas do pavimento causadas pela queda de temperatura. Qual deve ser a redução percentual do coeficiente de atrito para que o carro comece a escorregar ladeira abaixo?

86 Um menino com uma funda coloca uma pedra (0,250 kg) na bolsa (0,010 kg) da funda e faz girar a pedra e a bolsa em uma circunferência vertical de raio 0,650 m. A corda entre a bolsa e a mão do menino tem massa desprezível e arrebentará se a tensão exceder 33,0 N. Suponha que o menino aumente aos poucos a velocidade da pedra. (a) A corda vai arrebentar no ponto mais baixo da circunferência ou no ponto mais alto? (b) Para que valor da velocidade da pedra a corda vai arrebentar?

87 Um carro com 10,7 kN de peso, viajando a 13,4 m/s sem sustentação negativa, tenta fazer uma curva não compensada com um raio de 61,0 m. (a) Qual é o módulo da força de atrito entre os pneus e a estrada necessária para manter o carro em uma trajetória circular? (b) Se o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a estrada é 0,350, o carro consegue fazer a curva sem derrapar?

88 Na Fig. 6-59, o bloco 1 de massa $m_1 = 2{,}0$ kg e o bloco 2 de massa $m_2 = 1{,}0$ kg estão ligados por um fio de massa desprezível. O bloco 2 é empurrado por uma força $\vec{F}$ de módulo 20 N que faz um ângulo $\theta = 35°$ com a horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre cada bloco e a superfície horizontal é 0,20. Qual é a tensão do fio?

$\vec{F}$
θ
m_1
m_2

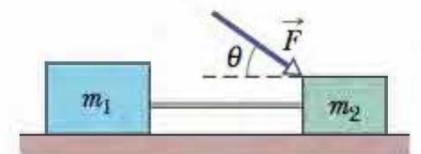



Figura 6-59 Problema 88.

89 Um pequeno armário com 556 N de peso está em repouso. O coeficiente de atrito estático entre o armário e o piso é 0,68 e o coeficiente de atrito cinético é 0,56. Em quatro diferentes tentativas de deslocá-lo, o armário é empurrado por forças horizontais de módulos (a) 222 N, (b) 334 N, (c) 445 N e (d) 556 N. Para cada tentativa, calcule o módulo da força de atrito exercida pelo piso sobre o armário. (Em cada tentativa, o armário está inicialmente em repouso.) (e) Em quais das tentativas o armário se move?

90 Na Fig. 6-60, um bloco com 22 N de peso é mantido em repouso contra uma parede vertical por uma força horizontal $\vec{F}$ de módulo 60 N. O coeficiente de atrito estático entre a parede e o bloco é 0,55 e o coeficiente de atrito cinético é 0,38. Em seis experimentos, uma segunda força $\vec{P}$ é aplicada ao bloco, paralelamente à parede, com os seguintes módulos e sentidos: (a) 34 N para cima, (b) 12 N para cima, (c) 48 N para cima, (d) 62 N para cima, (e) 10 N para baixo e (f) 18 N para baixo. Qual é o módulo da força de atrito que age sobre o bloco em cada experimento? Em que experimentos o bloco

se move (g) para cima e (h) para baixo? (i) Em que experimentos a força de atrito é para baixo?

Figura 6-60 Problema 90.

91 Um bloco escorrega para baixo com velocidade constante em um plano inclinado de ângulo θ. Em seguida, o bloco é lançado para cima no mesmo plano com velocidade inicial v_0. (a) Que distância o bloco sobe até parar? (b) Depois de parar, o bloco torna a escorregar para baixo? Justifique sua resposta.

92 Uma curva circular em uma rodovia é projetada para uma velocidade máxima de 60 km/h. Suponha que os carros não possuem sustentação negativa. (a) Se o raio da curva é 150 m, qual é o ângulo de compensação correto? (b) Se a curva não fosse compensada, qual deveria ser o menor coeficiente de atrito entre os pneus e o piso para que os carros não derrapassem ao entrarem na curva a 60 km/h?

93 Uma caixa de 1,5 kg está em repouso sobre uma superfície quando, em $t = 0$, uma força horizontal $\vec{F} = (1{,}8t)\hat{\mathrm{i}}$ N (com t em segundos) é aplicada à caixa. A aceleração da caixa em função do tempo t é dada por $\vec{a} = 0$ para $0 \leq t \leq 2{,}8$ s e $\vec{a} = (1{,}2t - 2{,}4)\hat{\mathrm{i}}$ m/s² para $t > 2{,}8$ s. (a) Qual é o coeficiente de atrito estático entre a caixa e a superfície? (b) Qual é o coeficiente de atrito cinético entre a caixa e a superfície?

94 Uma criança com 140 N de peso está sentada no alto de um escorrega que faz um ângulo de 25° com a horizontal. A criança se mantém no mesmo lugar segurando os lados do escorrega. Quando solta as mãos, adquire uma aceleração constante de 0,86 m/s² (dirigida para baixo, naturalmente). Qual é o coeficiente de atrito cinético entre a criança e o escorrega? (b) Que valores máximo e mínimo do coeficiente de atrito estático entre a criança e o escorrega são compatíveis com as informações do enunciado?

95 Na Fig. 6-61, um faxineiro caprichoso limpa o piso aplicando ao cabo do esfregão uma força $\vec{F}$. O cabo faz um ângulo θ com a vertical e μ_s e μ_k são os coeficientes de atrito estático e cinético entre o esfregão e o piso. Ignore a massa do cabo e suponha que toda a massa m do esfregão está concentrada no pano de chão. (a) Se o pano de chão se move ao longo do piso com velocidade constante, qual é o valor de F? (b) Mostre que se θ for menor que um certo valor θ_0, a força $\vec{F}$ (ainda orientada ao longo do cabo) será insuficiente para fazer o pano de chão se mover. Determine θ_0.

Figura 6-61 Problema 95.

96 Uma criança coloca uma cesta de piquenique na borda de um carrossel com 4,6 m de raio que dá uma volta completa a cada 30 s. (a) Qual é a velocidade de um ponto da borda do carrossel? (b) Qual é o menor valor do coeficiente de atrito estático entre a cesta e o carrossel para que a cesta não saia do lugar?

97 Um operário aplica uma força constante de módulo 85 N a uma caixa de 40 kg que está inicialmente em repouso no piso horizontal de um armazém. Após a caixa ter percorrido uma distância de 1,4 m, sua velocidade é 1,0 m/s. Qual é o coeficiente de atrito cinético entre a caixa e o piso?

98 Na Fig. 6-62, um bloco de 5,0 kg se move para cima ao longo de um plano inclinado de ângulo $\theta = 37°$ ao mesmo tempo em que sofre a ação de uma força horizontal $\vec{F}$ de módulo 50 N. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano é 0,30. Quais são (a) o módulo e (b) o sentido (para cima ou para baixo ao longo do plano inclinado) da aceleração do bloco? A velocidade inicial do bloco é 4,0 m/s. (c) Que distância o bloco sobe no plano? (d) Depois de atingir o ponto mais alto, o bloco permanece em repouso ou escorrega para baixo?

Figura 6-62 Problema 98.

se move (g) para cima e (h) para baixo? (i) Em que experimentos a força de atrito é para baixo?

Figura 6-60 Problema 90.

91 Um bloco escorrega para baixo com velocidade constante em um plano inclinado de ângulo θ. Em seguida, o bloco é lançado para cima no mesmo plano com velocidade inicial v_0. (a) Que distância o bloco sobe até parar? (b) Depois de parar, o bloco torna a escorregar para baixo? Justifique sua resposta.

92 Uma curva circular em uma rodovia é projetada para uma velocidade máxima de 60 km/h. Suponha que os carros não possuem sustentação negativa. (a) Se o raio da curva é 150 m, qual é o ângulo de compensação correto? (b) Se a curva não fosse compensada, qual deveria ser o menor coeficiente de atrito entre os pneus e o piso para que os carros não derrapassem ao entrarem na curva a 60 km/h?

93 Uma caixa de 1,5 kg está em repouso sobre uma superfície quando, em $t = 0$, uma força horizontal $\vec{F} = (1{,}8t)\hat{\imath}$ N (com t em segundos) é aplicada à caixa. A aceleração da caixa em função do tempo t é dada por $\vec{a} = 0$ para $0 \leq t \leq 2{,}8$ s e $\vec{a} = (1{,}2t - 2{,}4)\hat{\imath}$ m/s² para $t > 2{,}8$ s. (a) Qual é o coeficiente de atrito estático entre a caixa e a superfície? (b) Qual é o coeficiente de atrito cinético entre a caixa e a superfície?

94 Uma criança com 140 N de peso está sentada no alto de um escorrega que faz um ângulo de 25° com a horizontal. A criança se mantém no mesmo lugar segurando os lados do escorrega. Quando solta as mãos, adquire uma aceleração constante de 0,86 m/s² (dirigida para baixo, naturalmente). Qual é o coeficiente de atrito cinético entre a criança e o escorrega? (b) Que valores máximo e mínimo do coeficiente de atrito estático entre a criança e o escorrega são compatíveis com as informações do enunciado?

95 Na Fig. 6-61, um faxineiro caprichoso limpa o piso aplicando ao cabo do esfregão uma força $\vec{F}$. O cabo faz um ângulo θ com a vertical e μ_s e μ_k são os coeficientes de atrito estático e cinético entre o esfregão e o piso. Ignore a massa do cabo e suponha que toda a massa m do esfregão está concentrada no pano de chão. (a) Se o pano de chão se move ao longo do piso com velocidade constante, qual é o valor de F? (b) Mostre que se θ for menor que um certo valor θ_0, a força $\vec{F}$ (ainda orientada ao longo do cabo) será insuficiente para fazer o pano de chão se mover. Determine θ_0.

Figura 6-61 Problema 95.

96 Uma criança coloca uma cesta de piquenique na borda de um carrossel com 4,6 m de raio que dá uma volta completa a cada 30 s. (a) Qual é a velocidade de um ponto da borda do carrossel? (b) Qual é o menor valor do coeficiente de atrito estático entre a cesta e o carrossel para que a cesta não saia do lugar?

97 Um operário aplica uma força constante de módulo 85 N a uma caixa de 40 kg que está inicialmente em repouso no piso horizontal de um armazém. Após a caixa ter percorrido uma distância de 1,4 m, sua velocidade é 1,0 m/s. Qual é o coeficiente de atrito cinético entre a caixa e o piso?

98 Na Fig. 6-62, um bloco de 5,0 kg se move para cima ao longo de um plano inclinado de ângulo $\theta = 37°$ ao mesmo tempo em que sofre a ação de uma força horizontal $\vec{F}$ de módulo 50 N. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano é 0,30. Quais são (a) o módulo e (b) o sentido (para cima ou para baixo ao longo do plano inclinado) da aceleração do bloco? A velocidade inicial do bloco é 4,0 m/s. (c) Que distância o bloco sobe no plano? (d) Depois de atingir o ponto mais alto, o bloco permanece em repouso ou escorrega para baixo?

Figura 6-62 Problema 98.

CAPÍTULO

7

ENERGIA CINÉTICA E TRABALHO

7-1 O QUE É FÍSICA?

Um dos objetivos fundamentais da física é estudar de perto algo de que se fala muito hoje em dia: a energia. O tópico é obviamente importante. Na verdade, nossa civilização depende da obtenção e uso eficiente da energia.

Como todos sabem, nenhum movimento pode ser iniciado sem algum tipo de energia. Para atravessar o oceano Pacífico a bordo de um avião, precisamos de energia. Para transportar um computador para o último andar de um edifício ou para uma estação espacial em órbita, precisamos de energia. Para chutar uma bola, precisamos de energia. Gastamos verdadeiras fortunas para obter e utilizar energia. Guerras foram iniciadas pela disputa de fontes de energia. Guerras foram decididas pelo uso de armas que liberam grandes quantidades de energia. Qualquer um seria capaz de citar muitos exemplos de energia e de sua utilização, mas o que realmente significa o termo *energia*?

7-2 O que É Energia?

O termo *energia* é tão amplo que é difícil pensar em uma definição simples. Tecnicamente, energia é uma grandeza escalar associada ao estado de um ou mais objetos; entretanto, esta definição é vaga demais para ser útil a quem está começando.

Uma definição menos rigorosa pode servir pelo menos de ponto de partida. Energia é um número que associamos a um sistema de um ou mais objetos. Se uma força afeta um dos objetos, fazendo-o, por exemplo, entrar em movimento, o número que descreve a energia do sistema varia. Após um número muito grande de experimentos, os cientistas e engenheiros confirmaram que, se o método através do qual atribuímos um número à energia for definido adequadamente, esse número pode ser usado para prever os resultados de experimentos e, mais importante, para construir máquinas capazes de realizar proezas fantásticas, como voar. Este sucesso se baseia em uma propriedade fascinante do universo: a energia pode mudar de forma e ser transferida de um objeto para outro, mas a quantidade total de energia permanece constante (a energia é *conservada*). Até hoje, nunca foi encontrada uma exceção desta *lei de conservação da energia.*

Pense nas muitas formas de energia como se fossem os números que representam as quantias depositadas em contas bancárias. Algumas regras foram estabelecidas para o significado desses números e a forma como podem ser modificados. Você pode transferir os números que representam quantias em dinheiro de uma conta para outra, talvez eletronicamente, sem que qualquer objeto material seja movimentado; entretanto, a quantidade total de dinheiro (a soma de todos os números) permanece constante: essa soma é conservada em todas as transações bancárias.

Neste capítulo, concentramos a atenção em um único tipo de energia (a *energia cinética*) e uma única forma de transferência de energia (o *trabalho*). No próximo capítulo, examinaremos algumas outras formas de energia e o modo como a lei de conservação da energia pode ser expressa através de equações.

7-3 Energia Cinética

A **energia cinética** K é a energia associada ao *estado de movimento* de um objeto. Quanto mais depressa o objeto se move, maior é a energia cinética. Quando um objeto está em repouso, a energia cinética é nula.

Para um objeto de massa m cuja velocidade v é muito menor que a velocidade da luz,

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 \quad \text{(energia cinética).} \qquad (7\text{-}1)$$

Um pato de 3,0 kg que voa a 2,0 m/s, por exemplo, tem uma energia cinética de 6,0 kg · m²/s², ou seja, associamos esse número ao movimento do pato.

A unidade de energia cinética (e de qualquer outra forma de energia) no SI é o **joule** (J), em homenagem a James Prescott Joule, um cientista inglês do século XIX. Ela é definida a partir da Eq. 7-1 em termos das unidades de massa e velocidade:

$$1 \text{ joule} = 1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2. \qquad (7\text{-}2)$$

Assim, o pato do exemplo anterior tem uma energia cinética de 6,0 J.

Exemplo

Energia cinética em um choque de locomotivas

Em 1896, em Waco, Texas, William Crush posicionou duas locomotivas em extremidades opostas de uma linha férrea com 6,4 km de extensão, acendeu as caldeiras, amarrou os aceleradores para que permanecessem acionados e fez com que as locomotivas sofressem uma colisão frontal, em alta velocidade, diante de 30.000 espectadores (Fig. 7-1). Centenas de pessoas foram feridas pelos destroços; várias morreram. Supondo que cada locomotiva pesava $1{,}2 \times 10^6$ N e tinha uma aceleração constante de 0,26 m/s², qual era a energia cinética das duas locomotivas imediatamente antes da colisão?

Figura 7-1 O resultado de uma colisão entre duas locomotivas em 1896. *(Cortesia da Library of Congress)*

IDEIAS-CHAVE

(1) Para calcular a energia cinética de cada locomotiva usando a Eq. 7-1, precisamos conhecer a massa de cada locomotiva e sua velocidade imediatamente antes da colisão. (2) Como podemos supor que cada locomotiva sofreu uma aceleração constante, podemos usar as equações da Tabela 2-1 para calcular a velocidade v imediatamente antes da colisão.

Cálculos Escolhemos a Eq. 2-16 porque conhecemos os valores de todos os parâmetros, exceto v:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

Com $v_0 = 0$ e $x - x_0 = 3{,}2 \times 10^3$ m (metade da distância inicial), temos:

$$v^2 = 0 + 2(0{,}26 \text{ m/s}^2)(3{,}2 \times 10^3 \text{ m}),$$

ou

$$v = 40{,}8 \text{ m/s}$$

(cerca de 150 km/h).

Podemos calcular a massa de cada locomotiva dividindo o peso por g:

$$m = \frac{1{,}2 \times 10^6 \text{ N}}{9{,}8 \text{ m/s}^2} = 1{,}22 \times 10^5 \text{ kg}.$$

Em seguida, usando a Eq. 7-1, calculamos a energia cinética total das duas locomotivas imediatamente antes da colisão:

$$K = 2(\tfrac{1}{2}mv^2) = (1{,}22 \times 10^5 \text{ kg})(40{,}8 \text{ m/s})^2$$
$$= 2{,}0 \times 10^8 \text{ J.} \qquad \text{(Resposta)}$$

Esta colisão foi como a explosão de uma bomba.

7-4 Trabalho

Quando aumentamos a velocidade de um objeto aplicando uma força, a energia cinética $K(= mv^2/2)$ do objeto aumenta. Da mesma forma, quando diminuímos a velocidade do objeto aplicando uma força, a energia cinética do objeto diminui. Explicamos essas variações da energia cinética dizendo que a força aplicada transferiu energia *para o objeto* ou *do objeto*. Nas transferências de energia através de forças, dizemos que um **trabalho** W é *realizado pela força sobre o objeto*. Mais formalmente, definimos o trabalho da seguinte forma:

> Trabalho (W) é a energia transferida para um objeto ou de um objeto através de uma força que age sobre o objeto. Quando a energia é transferida para o objeto, o trabalho é positivo; quando a energia é transferida do objeto, o trabalho é negativo.

"Trabalho", portanto, é energia transferida; "realizar trabalho" é o ato de transferir energia. O trabalho tem a mesma unidade que a energia e é uma grandeza escalar.

O termo *transferência* pode ser enganador. Não significa que um objeto material entre ou saia do objeto; a transferência não é como um fluxo de água. Ela se parece mais com a transferência eletrônica de dinheiro entre duas contas bancárias: o valor de uma das contas aumenta, o valor da outra conta diminui, mas nenhum objeto material é transferido de uma conta para a outra.

Note que não estamos usando a palavra "trabalho" no sentido coloquial, segundo o qual *qualquer esforço*, físico ou mental, representa trabalho. Assim, por exemplo, ao empurrar uma parede com força, você se cansa por causa das contrações musculares repetidas e está, no sentido coloquial, realizando um trabalho. Entretanto, como este esforço não produz uma transferência de energia para a parede ou da parede, o trabalho realizado sobre a parede, de acordo com nossa definição, é nulo.

7-5 Trabalho e Energia Cinética

Encontrando uma Expressão para o Trabalho

Para encontrar uma expressão para o trabalho, considere uma conta que pode deslizar ao longo de um fio sem atrito ao longo de um eixo x horizontal (Fig. 7-2). Uma força constante $\vec{F}$, fazendo um ângulo ϕ com o fio, é usada para acelerar a conta. Podemos relacionar a força à aceleração através da segunda lei de Newton, escrita para as componentes em relação ao eixo x:

$$F_x = ma_x, \tag{7-3}$$

onde m é a massa da esfera. Enquanto a conta sofre um deslocamento $\vec{d}$, a força muda a velocidade da conta de um valor inicial $\vec{v}_0$ para um outro valor, $\vec{v}$. Como a força é constante, sabemos que a aceleração também é constante. Assim, podemos usar a Eq. 2-16 para escrever, para as componentes em relação ao eixo x,

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x d. \tag{7-4}$$

Explicitando a_x, substituindo na Eq. 7-3 e reagrupando os termos, obtemos:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = F_x d. \tag{7-5}$$

O primeiro termo do lado esquerdo da equação é a energia cinética K_f da conta no fim do deslocamento d; o segundo termo é a energia cinética K_i da conta no início do deslocamento. Assim, o lado esquerdo da Eq. 7-5 nos diz que a energia cinética foi alterada pela força e o lado direito nos diz que esta mudança é igual a $F_x d$. Assim, o trabalho W realizado pela força sobre a conta (a transferência de energia em consequência da aplicação da força) é

$$W = F_x d. \tag{7-6}$$

Se conhecemos os valores de F_x e d, podemos usar essa equação para calcular o trabalho W realizado pela força sobre a conta.

Para calcular o trabalho que uma força realiza sobre um objeto quando este sofre um deslocamento, usamos apenas a componente da força paralela ao deslocamento do objeto. A componente da força perpendicular ao deslocamento não realiza trabalho.

Como se pode ver na Fig. 7-2, $F_x = F \cos \phi$, onde F é o módulo de $\vec{F}$ e ϕ é o ângulo entre o deslocamento $\vec{d}$ e a força $\vec{F}$. Assim,

$$W = Fd \cos \phi \quad \text{(trabalho executado por uma força constante).} \tag{7-7}$$

Como o lado direito desta equação é equivalente ao produto escalar $\vec{F} \cdot \vec{d}$, também podemos escrever

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad \text{(trabalho executado por uma força constante),} \tag{7-8}$$

em que F é o módulo de $\vec{F}$. (O produto escalar foi definido na Seção 3-8.) A Eq. 7-8 é especialmente útil para calcular o trabalho quando $\vec{F}$ e $\vec{d}$ são dados em termos dos vetores unitários.

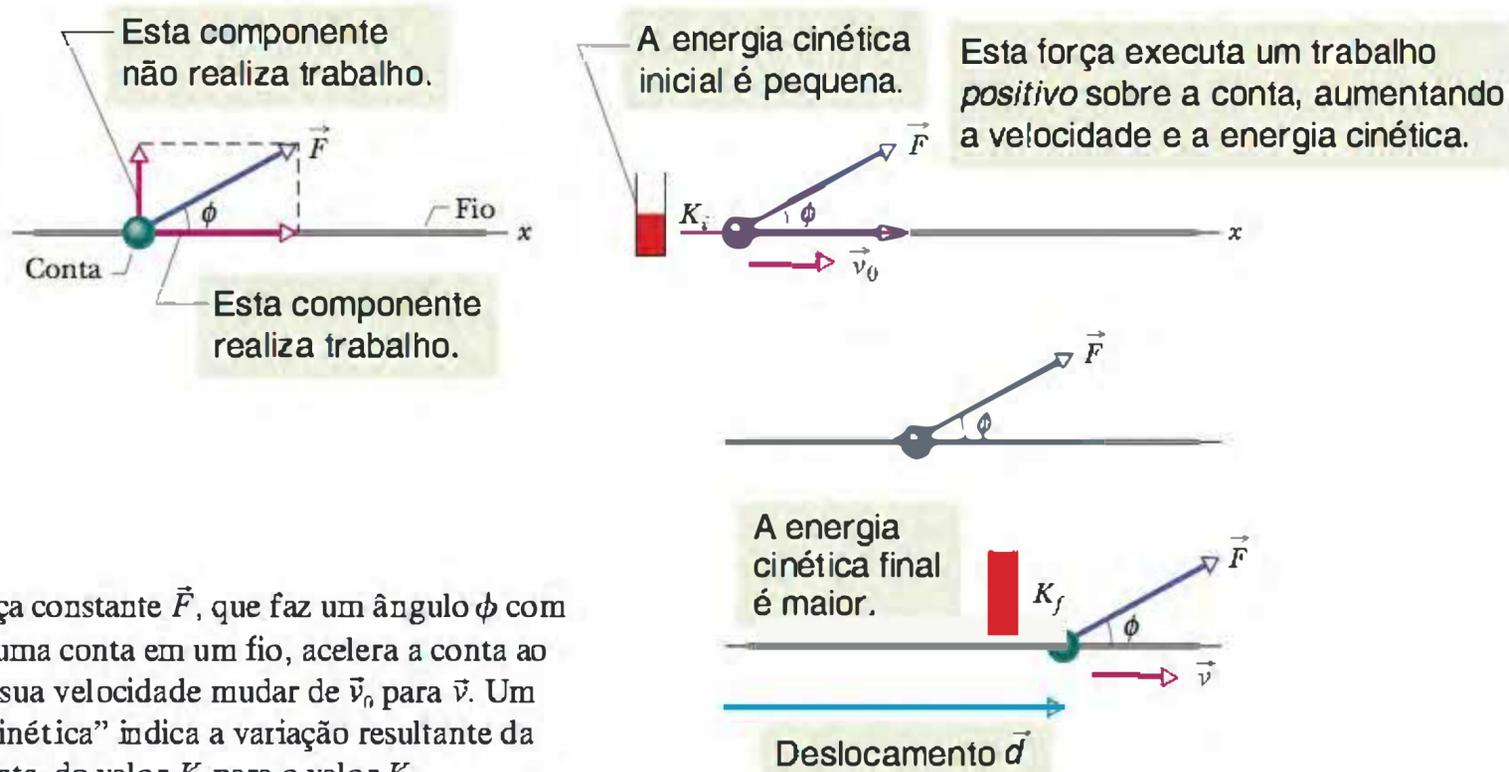



Figura 7-2 Uma força constante $\vec{F}$, que faz um ângulo ϕ com o deslocamento $\vec{d}$ de uma conta em um fio, acelera a conta ao longo do fio, fazendo sua velocidade mudar de $\vec{v}_0$ para $\vec{v}$. Um "medidor de energia cinética" indica a variação resultante da energia cinética da conta, do valor K_i para o valor K_f.

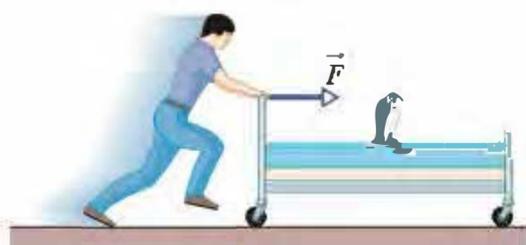



Figura 7-3 Um dos participantes de uma corrida de camas. Podemos considerar a cama e seu ocupante como uma partícula para calcular o trabalho realizado sobre eles pela força aplicada pelo estudante.

Atenção: Existem duas restrições ao uso das Eqs. 7-6 a 7-8 para calcular o trabalho realizado por uma força sobre um objeto. Em primeiro lugar, a força deve ser uma *força constante*, ou seja, o módulo e a orientação da força não devem variar durante o deslocamento do objeto. (Mais tarde discutiremos o que fazer no caso de uma *força variável* cujo módulo não é constante.) Em segundo lugar, o objeto deve se comportar *como uma partícula*. Isso significa que o objeto deve ser *rígido*; todas as suas partes devem se mover da mesma forma. Neste capítulo, consideramos apenas objetos que se comportam como partículas, como a cama e seu ocupante na Fig. 7-3.

O sinal do trabalho. O trabalho realizado por uma força sobre um objeto pode ser positivo ou negativo. Assim, por exemplo, se o ângulo ϕ da Eq. 7-7 é menor que 90°, cos ϕ é positivo e o trabalho é positivo. Se ϕ é maior do que 90° (até 180°), cos ϕ é negativo e o trabalho é negativo. (Você é capaz de explicar por que o trabalho é zero para $\phi = 90°$?) Esses resultados levam a uma regra simples: para determinar o

sinal do trabalho realizado por uma força, considere a componente da força paralela ao deslocamento:

O trabalho realizado por uma força é positivo se a força possui uma componente vetorial no sentido do deslocamento e negativo se a força possui uma componente vetorial no sentido oposto. Se a força não possui uma componente vetorial na direção do deslocamento, o trabalho é nulo.

Unidade de trabalho. A unidade de trabalho no SI é o joule, a mesma da energia cinética. Entretanto, de acordo com as Eqs. 7-6 e 7-7, uma unidade equivalente é o newton-metro (N · m). A unidade correspondente no **sistema britânico** é o pé-libra (ft · lb). De acordo com a Eq. 7-2, temos:

$$1\ \text{J} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 = 1\ \text{N}\cdot\text{m} = 0{,}738\ \text{ft}\cdot\text{lb}. \tag{7-9}$$

Trabalho total realizado por várias forças. Quando duas ou mais forças atuam sobre um objeto, o **trabalho total** realizado sobre o objeto é a soma dos trabalhos realizados separadamente pelas forças. O trabalho total pode ser calculado de duas formas: (1) determinando o trabalho realizado separadamente pelas forças e somando os resultados; (2) determinando a força resultante $\vec{F}_{res}$ de todas as forças e aplicando a Eq. 7-7, com o módulo F substituído por F_{res} e ϕ substituído pelo ângulo entre $\vec{F}_{res}$ e $\vec{d}$. Também podemos usar a Eq. 7-8, substituindo $\vec{F}$ por $\vec{F}_{res}$.

Teorema do Trabalho e Energia Cinética

A Eq. 7-5 relaciona a variação da energia cinética da conta (de um valor inicial $K_i = \frac{1}{2}mv_0^2$ para um valor final $K_f = \frac{1}{2}mv^2$) ao trabalho $W (= F_x d)$ realizado sobre a conta. No caso de objetos que se comportam como partículas, podemos generalizar essa equação. Seja ΔK a variação da energia cinética do objeto e W o trabalho resultante realizado sobre o objeto. Nesse caso, podemos escrever

$$\Delta K = K_f - K_i = W, \tag{7-10}$$

que significa o seguinte:

$$\begin{pmatrix}\text{variação da energia}\\ \text{cinética de uma partícula}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{trabalho total executado}\\ \text{sobre a partícula}\end{pmatrix}.$$

Podemos também escrever

$$K_f = K_i + W, \tag{7-11}$$

que significa o seguinte:

$$\begin{pmatrix}\text{energia cinética depois da}\\ \text{execução do trabalho}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{energia cinética antes}\\ \text{da execução do trabalho}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{trabalho}\\ \text{executado}\end{pmatrix}.$$

Essas relações, conhecidas tradicionalmente como **teorema do trabalho e energia cinética** para partículas, valem para trabalhos positivos e negativos. Se o trabalho total realizado sobre uma partícula é positivo, a energia cinética da partícula aumenta de um valor igual ao trabalho realizado; se o trabalho total é negativo, a energia cinética da partícula diminui de um valor igual ao trabalho realizado.

Por exemplo, se a energia cinética de uma partícula é inicialmente 5 J e a partícula recebe uma energia de 2 J (trabalho total positivo), a energia cinética final é 7 J. Por outro lado, se a partícula cede uma energia total de 2 J (trabalho total negativo), a energia cinética final é 3 J.

TESTE 1

Uma partícula está se movendo ao longo do eixo x. A energia cinética aumenta, diminui ou permanece a mesma se a velocidade da partícula varia (a) de -3 m/s para -2 m/s e (b) de -2 m/s para 2 m/s? (c) Nas situações dos itens (a) e (b) o trabalho realizado sobre a partícula é positivo, negativo ou nulo?

Exemplo

Trabalho realizado por duas forças constantes: espionagem industrial

A Fig. 7-4*a* mostra dois espiões industriais arrastando um cofre de 225 kg a partir do repouso e assim produzindo um deslocamento $\vec{d}$ de módulo 8,50 m, em direção a um caminhão. O empurrão $\vec{F}_1$ do espião 001 tem um módulo de 12,0 N e faz um ângulo de 30,0° para baixo com a horizontal; o puxão $\vec{F}_2$ do espião 002 tem um módulo de 10,0 N e faz um ângulo de 40,0° para cima com a horizontal. Os módulos e orientações das forças não variam quando o cofre se desloca e o atrito entre o cofre e o atrito com o piso é desprezível.

(a) Qual é o trabalho total realizado pelas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ sobre o cofre durante o deslocamento $\vec{d}$?

IDEIAS-CHAVE

(1) O trabalho total W realizado sobre o cofre é a soma dos trabalhos realizados separadamente pelas duas forças. (2) Como o cofre pode ser tratado como uma partícula e as forças são constantes, tanto em módulo como em orientação, podemos usar a Eq. 7-7 ($W = Fd\cos\phi$) ou a Eq. 7-8 ($W = \vec{F}\cdot\vec{d}$) para calcular esses trabalhos. Como conhecemos o módulo e a orientação das forças, escolhemos a Eq. 7-7.

Cálculos De acordo com a Eq. 7-7 e o diagrama de corpo livre do cofre (Fig. 7-4*b*), o trabalho realizado por $\vec{F}_1$ é

$$W_1 = F_1 d\cos\phi_1 = (12{,}0\text{ N})(8{,}50\text{ m})(\cos 30{,}0°) = 88{,}33\text{ J},$$

e o trabalho realizado por $\vec{F}_2$ é

$$W_2 = F_2 d\cos\phi_2 = (10{,}0\text{ N})(8{,}50\text{ m})(\cos 40{,}0°) = 65{,}11\text{ J}.$$

Assim, o trabalho total W é

$$W = W_1 + W_2 = 88{,}33\text{ J} + 65{,}11\text{ J} = 153{,}4\text{ J} \approx 153\text{ J}. \quad \text{(Resposta)}$$

Durante o deslocamento de 8,50 m, portanto, os espiões transferem 153 J para a energia cinética do cofre.

(b) Qual é o trabalho W_g realizado pela força gravitacional $\vec{F}_g$ sobre o cofre durante o deslocamento e qual é o trabalho W_N realizado pela força normal $\vec{F}_N$ sobre o cofre durante o deslocamento?

IDEIA-CHAVE

Como tanto o módulo como a orientação das duas forças são constantes, podemos calcular o trabalho realizado por elas usando a Eq. 7-7.

Cálculos Como o módulo da força gravitacional é mg, onde m é a massa do cofre, temos:

$$W_g = mgd\cos 90° = mgd(0) = 0 \quad \text{(Resposta)}$$

e

$$W_N = F_N d\cos 90° = F_N d(0) = 0. \quad \text{(Resposta)}$$

Estes resultados já eram esperados. Como as duas forças são perpendiculares ao deslocamento do cofre, não realizam trabalho e não transferem energia para o cofre.

(c) O cofre está inicialmente em repouso. Qual é sua velocidade v_f após o deslocamento de 8,50 m?

IDEIA-CHAVE

A velocidade do cofre varia porque sua energia cinética muda quando $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ transferem energia para ele.

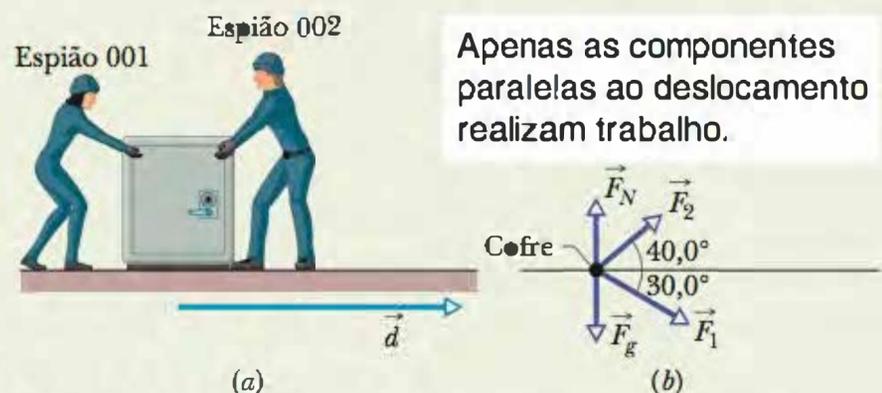
Cálculos Podemos relacionar a velocidade ao trabalho realizado combinando as Eqs. 7-10 e 7-1:

$$W = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2.$$

A velocidade inicial v_i é zero e agora sabemos que o trabalho realizado é 153,4 J. Explicitando v_f e substituindo os valores conhecidos, obtemos:

$$v_f = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2(153{,}4\text{ J})}{225\text{ kg}}} = 1{,}17\text{ m/s}. \quad \text{(Resposta)}$$

Espião 001

Espião 002

Apenas as componentes paralelas ao deslocamento realizam trabalho.

Cofre

Figura 7-4 (*a*) Dois espiões arrastam um cofre, produzindo um deslocamento $\vec{d}$. (*b*) Diagrama de corpo livre do cofre.

Exemplo

Trabalho realizado por uma força constante expressa em termos dos vetores unitários

Durante uma tempestade, um caixote desliza pelo piso escorregadio de um estacionamento, sofrendo um deslocamento $\vec{d} = (-3{,}0\ \text{m})\hat{\text{i}}$ enquanto é empurrado pelo vento com uma força $\vec{F} = (2{,}0\ \text{N})\hat{\text{i}} + (-6{,}0\ \text{N})\hat{\text{j}}$. A situação e os eixos do sistema de coordenadas estão representados na Fig. 7-5.

(a) Qual é o trabalho realizado pelo vento sobre o caixote?

A componente da força paralela ao deslocamento realiza um trabalho *negativo*, reduzindo a velocidade do caixote.

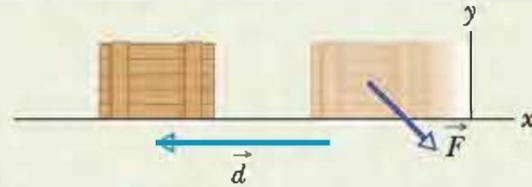



Figura 7-5 Uma força $\vec{F}$ desacelera um caixote durante um deslocamento $\vec{d}$.

IDEIA-CHAVE

Como podemos tratar o caixote como uma partícula e como a força do vento é constante, podemos usar a Eq. 7-7 ($W = Fd\cos\phi$) ou a Eq. 7-8 ($W = \vec{F}\cdot\vec{d}$) para calcular o trabalho. Como conhecemos $\vec{F}$ e $\vec{d}$ em termos dos vetores unitários, escolhemos a Eq. 7-8.

Cálculos Temos:

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d} = [(2{,}0\ \text{N})\hat{\text{i}} + (-6{,}0\ \text{N})\hat{\text{j}}]\cdot[(-3{,}0\ \text{m})\hat{\text{i}}].$$

De todos os produtos entre vetores unitários, apenas $\hat{\text{i}}\cdot\hat{\text{i}}$, $\hat{\text{j}}\cdot\hat{\text{j}}$ e $\hat{\text{k}}\cdot\hat{\text{k}}$ são diferentes de zero (veja o Apêndice E). Assim, temos:

$$W = (2{,}0\ \text{N})(-3{,}0\ \text{m})\hat{\text{i}}\cdot\hat{\text{i}} + (-6{,}0\ \text{N})(-3{,}0\ \text{m})\hat{\text{j}}\cdot\hat{\text{i}} = (-6{,}0\ \text{J})(1) + 0 = -6{,}0\ \text{J}. \quad \text{(Resposta)}$$

A força realiza, portanto, um trabalho negativo de 6,0 J sobre o caixote, retirando 6,0 J da energia cinética do caixote.

(b) Se o caixote tem uma energia cinética de 10 J no início do deslocamento $\vec{d}$, qual é a energia ao final do deslocamento?

IDEIA-CHAVE

Como a força realiza um trabalho negativo sobre o caixote, reduz a energia cinética do caixote.

Cálculo Usando o teorema do trabalho e a energia cinética na forma da Eq. 7-11, temos:

$$K_f = K_i + W = 10\ \text{J} + (-6{,}0\ \text{J}) = 4{,}0\ \text{J}. \quad \text{(Resposta)}$$

A redução da energia elétrica indica que o caixote foi freado.

7-6 Trabalho Realizado pela Força Gravitacional

Vamos examinar agora o trabalho realizado sobre um objeto pela força gravitacional. A Fig. 7-6 mostra um tomate de massa m que se comporta como partícula, arremessado para cima com velocidade inicial v_0 e, portanto, com uma energia cinética inicial $K_i = \frac{1}{2}mv_0^2$. Na subida, o tomate é desacelerado por uma força gravitacional $\vec{F}_g$, ou seja, a energia cinética do tomate diminui porque $\vec{F}_g$ realiza trabalho sobre o tomate durante a subida. Uma vez que o tomate pode ser tratado como uma partícula, podemos usar a Eq. 7-7 ($W = Fd\cos\phi$) para expressar o trabalho realizado durante um deslocamento $\vec{d}$. No lugar de F, usamos mg, o módulo de $\vec{F}_g$. Assim, o trabalho W_g realizado pela força gravitacional $\vec{F}_g$ é

$$W_g = mgd\cos\phi \quad \text{(trabalho executado por uma força gravitacional).} \tag{7-12}$$

Durante a subida, a força $\vec{F}_g$ tem o sentido contrário ao do deslocamento $\vec{d}$, como mostra a Fig. 7-6. Assim, $\phi = 180°$ e

$$W_g = mgd\cos 180° = mgd(-1) = -mgd. \tag{7-13}$$

O sinal negativo indica que, durante a subida, a força gravitacional remove uma energia mgd da energia cinética do objeto. Isto está de acordo com o fato de que o objeto perde velocidade na subida.

A força executa um trabalho *negativo*, reduzindo a velocidade e a energia cinética.

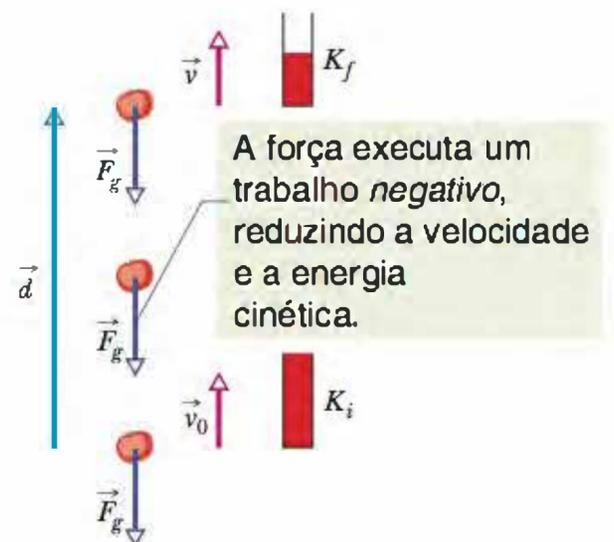



Figura 7-6 Por causa da força gravitacional $\vec{F}_g$, a velocidade de um tomate de massa m arremessado para cima diminui de $\vec{v}_0$ para $\vec{v}$ durante um deslocamento $\vec{d}$. Um medidor de energia cinética indica a variação resultante da energia cinética do tomate, de $K_i\ (= \frac{1}{2}mv_0^2)$ para $K_f\ (= \frac{1}{2}mv^2)$.

Depois que o objeto atinge a altura máxima e começa a descer, o ângulo ϕ entre a força $\vec{F}_g$ e o deslocamento $\vec{d}$ é zero. Assim,

$$W_g = mgd\cos 0° = mgd(+1) = +mgd. \tag{7-14}$$

O sinal positivo significa que agora a força gravitacional transfere uma energia *mgd* para a energia cinética do objeto. Isto está de acordo com o fato de que o objeto ganha velocidade na descida. (Na realidade, como vamos ver no Capítulo 8, transferências de energia associadas à subida e descida de um objeto envolvem o sistema completo objeto–Terra.)

Trabalho Realizado para Levantar e Baixar um Objeto

Suponha agora que levantamos um objeto que se comporta como uma partícula aplicando ao objeto uma força vertical $\vec{F}$. Durante o deslocamento para cima, a força aplicada realiza um trabalho positivo W_a sobre o objeto, enquanto a força gravitacional realiza um trabalho negativo W_g. A força aplicada tende a transferir energia para o objeto, enquanto a força gravitacional tende a remover energia do objeto. De acordo com a Eq. 7-10, a variação ΔK da energia cinética do objeto devido a essas duas transferências de energia é

$$\Delta K = K_f - K_i = W_a + W_g, \tag{7-15}$$

onde K_f é a energia cinética no fim do deslocamento e K_i é a energia cinética no início do deslocamento. A Eq. 7-15 também é válida para a descida do objeto, mas, nesse caso, a força gravitacional tende a transferir energia *para* o objeto, enquanto a força aplicada tende a remover energia *do* objeto.

Em muitos casos, o objeto está em repouso antes e depois do levantamento. Isso acontece, por exemplo, quando levantamos um livro do chão e o colocamos em uma estante. Nesse caso, K_f e K_i são nulas e a Eq. 7-15 se reduz a

$$W_a + W_g = 0$$

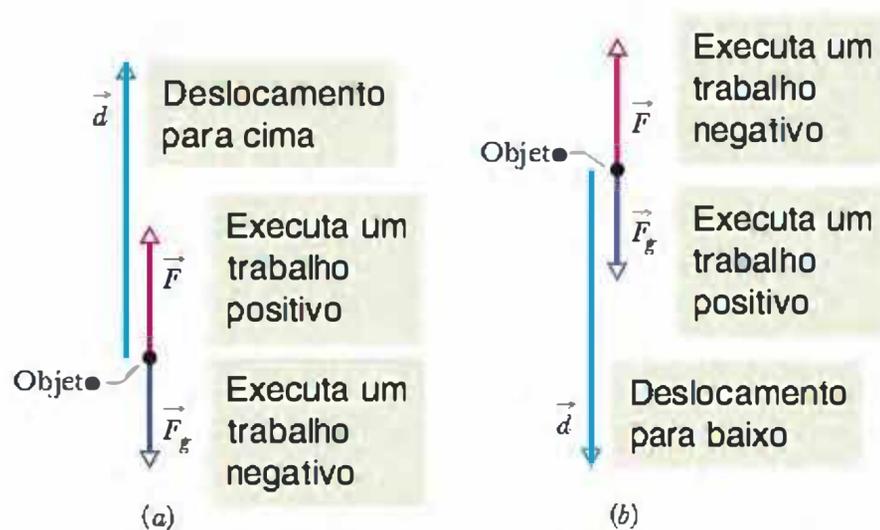
ou

$$W_a = -W_g. \tag{7-16}$$

Note que obtemos o mesmo resultado se K_f e K_i forem iguais, mesmo que não sejam nulas. De qualquer forma, o resultado significa que o trabalho realizado pela força aplicada é o negativo do trabalho realizado pela força gravitacional, ou seja, que a força aplicada transfere para o objeto a mesma quantidade de energia que a força gravitacional remove do objeto. Usando a Eq. 7-12, podemos escrever a Eq. 7-16 na forma

$$W_a = -mgd\cos\phi \quad \text{(trabalho para levantar e baixar; } K_f = K_i\text{)}, \tag{7-17}$$

onde ϕ é o ângulo entre $\vec{F}_g$ e $\vec{d}$. Se o deslocamento é verticalmente para cima (Fig. 7-7*a*), $\phi = 180°$ e o trabalho realizado pela força aplicada é igual a *mgd*. Se o deslocamento é verticalmente para baixo (Fig. 7-7*b*), $\phi = 0°$ e o trabalho realizado pela força aplicada é igual a $-mgd$.

Figura 7-7 (*a*) Uma força $\vec{F}$ faz um objeto subir. O deslocamento $\vec{d}$ do objeto faz um ângulo $\phi = 180°$ com a força gravitacional $\vec{F}_g$. A força aplicada realiza um trabalho positivo sobre o objeto. (*b*) A força $\vec{F}$ é insuficiente para fazer o objeto subir. O deslocamento $\vec{d}$ do objeto faz um ângulo $\phi = 0°$ com a força gravitacional $\vec{F}_g$. A força aplicada realiza um trabalho negativo sobre o objeto.

As Eqs. 7-16 e 7-17 se aplicam a qualquer situação em que um objeto é levantado ou baixado, com o objeto em repouso antes e depois do deslocamento. Elas são independentes do módulo da força usada. Assim, por exemplo, se você levanta acima da cabeça uma caneca que estava no chão, a força que você exerce sobre a caneca varia consideravelmente durante o levantamento. Mesmo assim, como a caneca está em repouso antes e depois do levantamento, o trabalho que a sua força realiza sobre a caneca é dado pelas Eqs. 7-16 e 7-17, onde, na Eq. 7-17, mg é o peso da caneca e d é a diferença entre a altura inicial e a altura final.

Exemplo

Trabalho realizado sobre um elevador acelerado

Um elevador de massa m = 500 kg está descendo com velocidade v_i = 4,0 m/s quando o cabo de sustentação começa a deslizar, permitindo que o elevador caia com aceleração constante $\vec{a} = \vec{g}/5$ (Fig. 7-8*a*).

(a) Se o elevador cai de uma altura d = 12 m, qual é o trabalho W_g realizado sobre o elevador pela força gravitacional $\vec{F}_g$?

IDEIA-CHAVE

Podemos tratar o elevador como uma partícula e, portanto, usar a Eq. 7-12 ($W_g = mgd \cos \phi$) para calcular o trabalho W_g.

Cálculo De acordo com a Fig. 7-8*b*, o ângulo entre $\vec{F}_g$ e o deslocamento $\vec{d}$ do elevador é 0°. Assim, de acordo com a Eq. 7-12,

$$W_g = mgd \cos 0° = (500 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2)(12 \text{ m})(1)$$
$$= 5{,}88 \times 10^4 \text{ J} \approx 59 \text{ kJ.} \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é o trabalho W_T realizado sobre o elevador pela força $\vec{T}$ exercida pelo cabo durante a queda?

IDEIAS-CHAVE

(1) Podemos calcular o trabalho W_T usando a Eq. 7-7 ($W = Fd \cos \phi$) se obtivermos uma expressão para o módulo T da tensão do cabo. (2) Podemos obter essa expressão escrevendo a segunda lei de Newton para as componentes das forças em relação ao eixo y da Fig. 7-8*b* ($F_{res,y} = ma_y$).

Cálculos Temos:

$$T - F_g = ma. \quad (7\text{-}18)$$

Explicitando T, substituindo F_g por mg e substituindo o resultado na Eq. 7-7, obtemos

$$W_T = Td \cos \phi = m(a + g)d \cos \phi. \quad (7\text{-}19)$$

Em seguida, substituindo a aceleração a (para baixo) por $-g/5$ e o ângulo ϕ entre as forças $\vec{T}$ e $m\vec{g}$ por 180°, obtemos

$$W_T = m\left(-\frac{g}{5} + g\right)d \cos \phi = \frac{4}{5} mgd \cos \phi$$
$$= \frac{4}{5}(500 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2)(12 \text{ m}) \cos 180°$$
$$= -4{,}70 \times 10^4 \text{ J} \approx -47 \text{ kJ.} \quad \text{(Resposta)}$$

Atenção Note que W_T não é simplesmente o negativo de W_g. A razão disso é que, como o elevador acelera durante a queda, sua velocidade varia e, consequentemente, a energia cinética também varia. Assim, a Eq. 7-16 (que envolve a suposição de que a energia cinética é igual no início e no final do processo) *não se aplica* neste caso.

(c) Qual é o trabalho total W realizado sobre o elevador durante a queda?

Cálculo O trabalho total é a soma dos trabalhos realizados pelas forças a que o elevador está sujeito:

$$W = W_g + W_T = 5{,}88 \times 10^4 \text{ J} - 4{,}70 \times 10^4 \text{ J}$$
$$= 1{,}18 \times 10^4 \text{ J} \approx 12 \text{ kJ.} \quad \text{(Resposta)}$$

Cabo do elevador
Elevador
Realiza um trabalho negativo
Realiza um trabalho positivo
(*a*) (*b*)

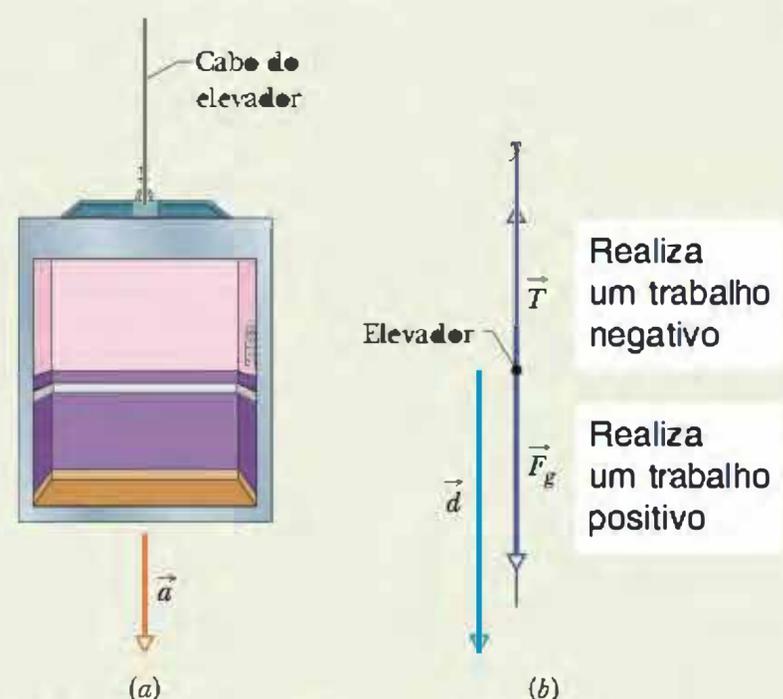



Figura 7-8 Um elevador, que estava descendo com velocidade v_i, de repente começa a acelerar para baixo. (*a*) O elevador sofre um deslocamento $\vec{d}$ com uma aceleração constante $\vec{a} = \vec{g}/5$. (*b*) Diagrama de corpo livre do elevador, mostrando também o deslocamento.

(d) Qual é a energia cinética do elevador no final da queda de 12 m?

IDEIA-CHAVE

De acordo com a Eq. 7-11 ($K_f = K_i + W$), a variação da energia cinética é igual ao trabalho total realizado sobre o elevador.

Cálculo De acordo com a Eq. 7-1, podemos escrever a energia cinética no início da queda como $K_i = \frac{1}{2}mv_i^2$. Nesse caso, a Eq. 7-11 pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} K_f &= K_i + W = \tfrac{1}{2}mv_i^2 + W \\ &= \tfrac{1}{2}(500\text{ kg})(4.0\text{ m/s})^2 + 1.18 \times 10^4\text{ J} \\ &= 1.58 \times 10^4\text{ J} \approx 16\text{ kJ}. \qquad \text{(Resposta)} \end{aligned}$$

7-7 Trabalho Realizado por uma Força Elástica

Vamos agora discutir o trabalho realizado sobre uma partícula por um tipo particular de *força variável*: a **força elástica** exercida por uma mola. Muitas forças na natureza têm a mesma forma matemática que a força de uma mola. Assim, examinando esta força em particular, podemos compreender muitas outras.

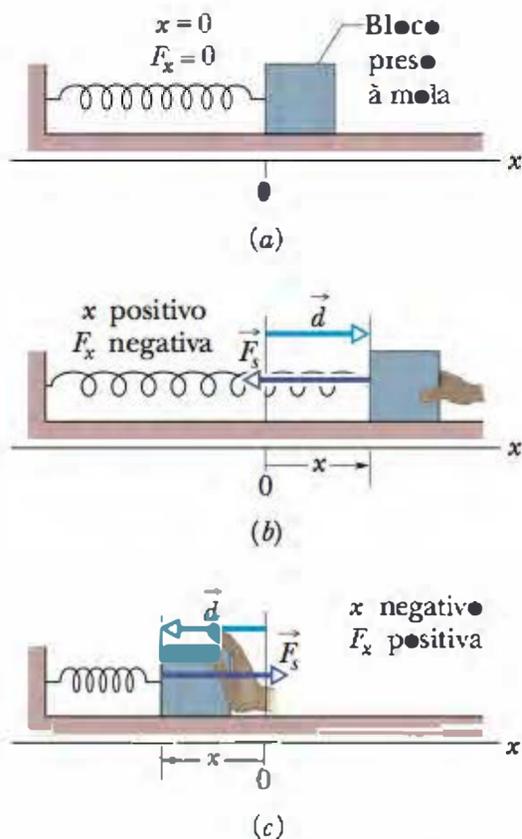



Figura 7-9 (*a*) Uma mola no estado relaxado. A origem do eixo x foi colocada na extremidade da mola que está presa ao bloco. (*b*) O bloco sofre um deslocamento $\vec{d}$ e a mola sofre uma distensão (variação positiva de x). Observe a força restauradora $\vec{F}_s$ exercida pela mola. (*c*) A mola sofre uma compressão (variação negativa de x). Observe novamente a força restauradora.

A Força Elástica

A Fig. 7-9*a* mostra uma mola no **estado relaxado**, ou seja, nem comprimida nem alongada. Uma das extremidades está fixa, e um objeto que se comporta como uma partícula, um bloco, por exemplo, está preso na outra extremidade. Se alongamos a mola puxando o bloco para a direita, como na Fig. 7-9*b*, a mola puxa o bloco para a esquerda. (Como a força elástica tende a restaurar o estado relaxado, ela também é chamada de *força restauradora*.) Se comprimimos a mola empurrando o bloco para a esquerda, como na Fig. 7-9*c*, a mola empurra o bloco para a direita.

Como uma boa aproximação para muitas molas, a força $\vec{F}_s$ é proporcional ao deslocamento $\vec{d}$ da extremidade livre a partir da posição que ocupa quando a mola está no estado relaxado. A *força elástica* é dada por

$$\vec{F}_s = -k\vec{d} \qquad \text{(lei de Hooke).} \qquad (7\text{-}20)$$

A Eq. 7-20 é conhecida como **lei de Hooke** em homenagem a Robert Hooke, cientista inglês do final do século XVII. O sinal negativo da Eq. 7-20 indica que o sentido da força elástica é sempre oposto ao sentido do deslocamento da extremidade livre da mola. A constante k é chamada de **constante elástica** (ou **constante de força**) e é uma medida da rigidez da mola. Quanto maior o valor de k, mais rígida é a mola, ou seja, maior é a força exercida pela mola para um dado deslocamento. A unidade de k no SI é o newton por metro.

Na Fig. 7-9 foi traçado um eixo x paralelo à maior dimensão da mola, com a origem ($x = 0$) na posição da extremidade livre quando a mola está no estado relaxado. Para esta configuração, que é a mais comum, podemos escrever a Eq. 7-20 na forma

$$F_x = -kx \qquad \text{(lei de Hooke),} \qquad (7\text{-}21)$$

onde mudamos o índice. Se x é positivo (ou seja, se a mola está alongada para a direita), F_x é negativa (é um puxão para a esquerda). Se x é negativo (ou seja, se a mola está comprimida para a esquerda), F_x é positiva (é um empurrão para a direita). Note que a força elástica é uma *força variável*, uma vez que depende de x, a posição da extremidade livre. Assim, F_x pode ser representada na forma $F(x)$. Note também que a lei de Hooke é uma relação *linear* entre F_x e x.

Trabalho Realizado por uma Força Elástica

Para determinar o trabalho realizado pela mola quando o bloco da Fig. 7-9*a* se move, vamos fazer duas hipóteses simplificadoras a respeito da mola. (1) Vamos supor que se trata de uma mola *sem massa*, ou seja, de uma mola cuja massa é

desprezível em relação à massa do bloco. (2) Vamos supor que se trata de uma *mola ideal*, ou seja, de uma mola que obedece exatamente à lei de Hooke. Vamos supor também que não existe atrito entre o bloco e o piso e que o bloco se comporta como uma partícula.

Vamos dar ao bloco um impulso para a direita, apenas para colocá-lo em movimento. Quando o bloco se move para a direita, a força elástica F_x realiza trabalho sobre ele, diminuindo a energia cinética e desacelerando o bloco. Entretanto, *não podemos* calcular o trabalho usando a Eq. 7-7 ($W = Fd\cos\phi$) porque essa equação só é válida se a força é constante. A força elástica é uma força variável.

Para determinar o trabalho realizado pela mola, podemos usar os métodos do cálculo. Seja x_i a posição inicial do bloco e x_f a posição do bloco em um instante posterior. Vamos dividir a distância entre essas duas posições em muitos segmentos, cada um com um pequeno comprimento Δx. Rotulamos esses segmentos, a partir de x_i, como segmentos 1, 2 e assim por diante. Quando o bloco se move no interior de um dos segmentos, a força elástica praticamente não varia, já que o segmento é tão curto que x é praticamente constante. Assim, podemos supor que o módulo da força é aproximadamente constante dentro de cada segmento. Vamos rotular esses módulos como F_{x1} no segmento 1, F_{x2} no segmento 2 e assim por diante.

Com uma força constante em cada segmento, *podemos* calcular o trabalho realizado dentro de cada segmento usando a Eq. 7-7. Nesse caso, $\phi = 180°$, de modo que $\cos\phi = -1$. Assim, o trabalho realizado é $-F_{x1}\Delta x$ no segmento 1, $-F_{x2}\Delta x$ no segmento 2 e assim por diante. O trabalho total W_s realizado pela mola de x_i a x_f é a soma de todos esses trabalhos:

$$W_s = \sum -F_{xj}\,\Delta x, \tag{7-22}$$

onde $j = 1, 2...$ é o número de ordem de cada segmento. No limite em que Δx tende a zero, a Eq. 7-22 se torna

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} -F_x\,dx. \tag{7-23}$$

De acordo com a Eq. 7-21, o módulo da força F_x é kx. Assim, temos:

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} -kx\,dx = -k\int_{x_i}^{x_f} x\,dx$$

$$= (-\tfrac{1}{2}k)[x^2]_{x_i}^{x_f} = (-\tfrac{1}{2}k)(x_f^2 - x_i^2). \tag{7-24}$$

ou seja

$$W_s = \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2 \quad \text{(trabalho de uma força elástica).} \tag{7-25}$$

Este trabalho W_s realizado pela mola pode ser negativo ou positivo, dependendo do fato de a transferência *total* de energia ser do bloco para a mola ou da mola para o bloco quando este se move de x_i para x_f. *Atenção*: a posição final x_f aparece no *segundo* termo do lado direito da Eq. 7-25. Assim, de acordo com a Eq. 7-25,

O trabalho W_s é positivo se a posição final do bloco está mais próxima da posição no estado relaxado ($x = 0$) que a posição inicial, e negativo se a posição final está mais afastada de $x = 0$ que a posição inicial. O trabalho é zero se a posição final do bloco está à mesma distância de $x = 0$ que a posição inicial.

Supondo que $x_i = 0$ e chamando a posição final de x, a Eq. 7-25 se torna

$$W_s = -\tfrac{1}{2}kx^2 \quad \text{(trabalho de uma força elástica).} \tag{7-26}$$

O Trabalho Realizado por uma Força Aplicada

Suponha agora que deslocamos o bloco ao longo do eixo x mantendo uma força $\vec{F}_a$ aplicada ao bloco. Durante o deslocamento, a força aplicada realiza sobre o bloco um trabalho W_a, enquanto a força elástica realiza um trabalho W_s. De acordo com a Eq. 7-10, a variação ΔK da energia cinética do bloco devido a essas duas transferências de energia é

$$\Delta K = K_f - K_i = W_a + W_s, \qquad (7\text{-}27)$$

onde K_f é a energia cinética no final do deslocamento e K_i é a energia cinética no início do deslocamento. Se o bloco está em repouso no início e no fim do deslocamento, K_i e K_f são iguais a zero e a Eq. 7-27 se reduz a

$$W_a = -W_s. \qquad (7\text{-}28)$$

Se um bloco que está preso a uma mola se encontra em repouso antes e depois de um deslocamento, o trabalho realizado sobre o bloco pela força responsável pelo deslocamento é o negativo do trabalho realizado sobre o bloco pela força elástica.

Atenção: se o bloco não estiver em repouso antes e depois do deslocamento, esta afirmação *não* é verdadeira.

TESTE 2

Em três situações, as posições inicial e final, respectivamente, ao longo do eixo x da Fig. 7-9 são: (a) -3 cm, 2 cm; (b) 2 cm, 3 cm; (c) -2 cm, 2 cm. Em cada situação, o trabalho realizado sobre o bloco pela força elástica é positivo, negativo ou nulo?

Exemplo

Trabalho realizado por uma mola para mudar a energia cinética

Na Fig. 7-10, depois de deslizar sobre uma superfície horizontal sem atrito com velocidade $v = 0{,}50$ m/s, um pote de cominho de massa $m = 0{,}40$ kg colide com uma mola de constante elástica $k = 750$ N/m e começa a comprimi-la. No instante em que o pote para momentaneamente por causa da força exercida pela mola, de que distância d a mola foi comprimida?

IDEIAS-CHAVE

1. O trabalho W_s realizado sobre o pote pela força elástica está relacionado à distância d pedida através da Eq. 7-26 ($W_s = -\frac{1}{2}kx^2$) com d substituindo x.
2. O trabalho W_s também está relacionado à energia cinética do pote através da Eq. 7-10 ($K_f - K_i = W$).
3. A energia cinética do pote tem um valor inicial $K = \frac{1}{2}mv^2$ e é nula quando o pote está momentaneamente em repouso.

Cálculos Combinando as duas primeiras ideias-chave, escrevemos o teorema do trabalho e energia cinética para o pote na seguinte forma:

$$K_f - K_i = -\tfrac{1}{2}kd^2.$$

A força da mola executa um trabalho *negativo*, reduzindo a velocidade e a energia cinética.

k

$\vec{v}$

Sem atrito

m

d

Parada

Primeiro contato

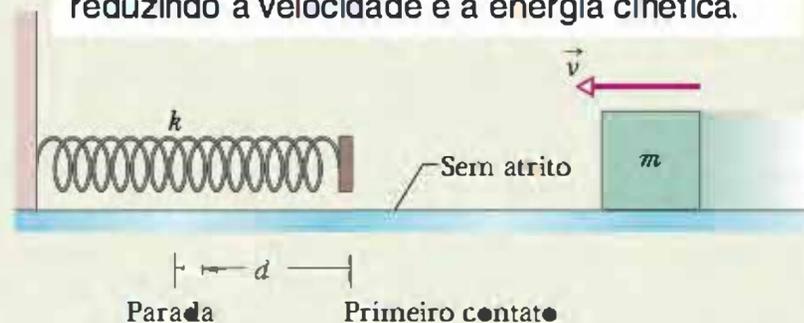



Figura 7-10 Um pote de massa m se move com velocidade $\vec{v}$ em direção a uma mola de constante k.

Substituindo a energia cinética inicial e final pelos seus valores (terceira ideia-chave), temos:

$$0 - \tfrac{1}{2}mv^2 = -\tfrac{1}{2}kd^2.$$

Simplificando, explicitando d e substituindo os valores conhecidos, obtemos:

$$d = v\sqrt{\frac{m}{k}} = (0{,}50 \text{ m/s})\sqrt{\frac{0{,}40 \text{ kg}}{750 \text{ N/m}}}$$
$$= 1{,}2 \times 10^{-2} \text{ m} = 1{,}2 \text{ cm}. \qquad \text{(Resposta)}$$

7-8 Trabalho Realizado por uma Força Variável Genérica

Análise Unidimensional

Vamos voltar à situação da Fig. 7-2, mas agora suponha que a força aponta no sentido positivo do eixo x e que o módulo da força varia com a posição x. Assim, quando a conta (partícula) se move, o módulo $F(x)$ da força que realiza trabalho sobre ela varia. Apenas o módulo da força varia; a orientação permanece a mesma. Além disso, o módulo da força em qualquer posição não varia com o tempo.

A Fig. 7-11a mostra o gráfico de uma *força variável unidimensional* como a que acabamos de descrever. Queremos obter uma expressão para o trabalho realizado por esta força sobre a partícula quando ela se desloca de uma posição inicial x_i para uma posição final x_f. Entretanto, *não podemos* usar a Eq. 7-7 ($W = Fd\cos\phi$) porque ela só é válida no caso de uma força constante $\vec{F}$. Assim, usaremos novamente os métodos do cálculo. Dividimos a área sob a curva da Fig. 7-11a em um grande número de faixas estreitas de largura Δx (Fig. 7-11b). Escolhemos Δx suficientemente pequeno para que possamos considerar a força $F(x)$ aproximadamente constante nesse intervalo. Vamos chamar de $F_{j,\text{méd}}$ o valor médio de $F(x)$ no intervalo de ordem j. Nesse caso, $F_{j,\text{méd}}$ na Fig. 7-11b é a altura da faixa de ordem j.

Com $F_{j,\text{méd}}$ constante, o incremento (pequena quantidade) de trabalho ΔW_j realizado pela força no intervalo de ordem j pode ser calculado usando a Eq. 7-7:

$$\Delta W_j = F_{j,\text{méd}}\,\Delta x. \tag{7-29}$$

Na Fig. 7-11b, ΔW_j é, portanto, igual à área sob a faixa retangular sombreada de ordem j.

Para determinar o trabalho total W realizado pela força quando a partícula se desloca de x_i para x_f, somamos as áreas de todas as faixas entre x_i e x_f da Fig. 7-11b:

$$W = \sum \Delta W_j = \sum F_{j,\text{méd}}\Delta x. \tag{7-30}$$

O trabalho é igual à área sob a curva.

A área sob a curva pode ser aproximada pela área desses retângulos.

Quanto mais estreitos os retângulos, melhor a aproximação.

Quando a largura dos retângulos tende a zero, o erro da aproximação também tende a zero.

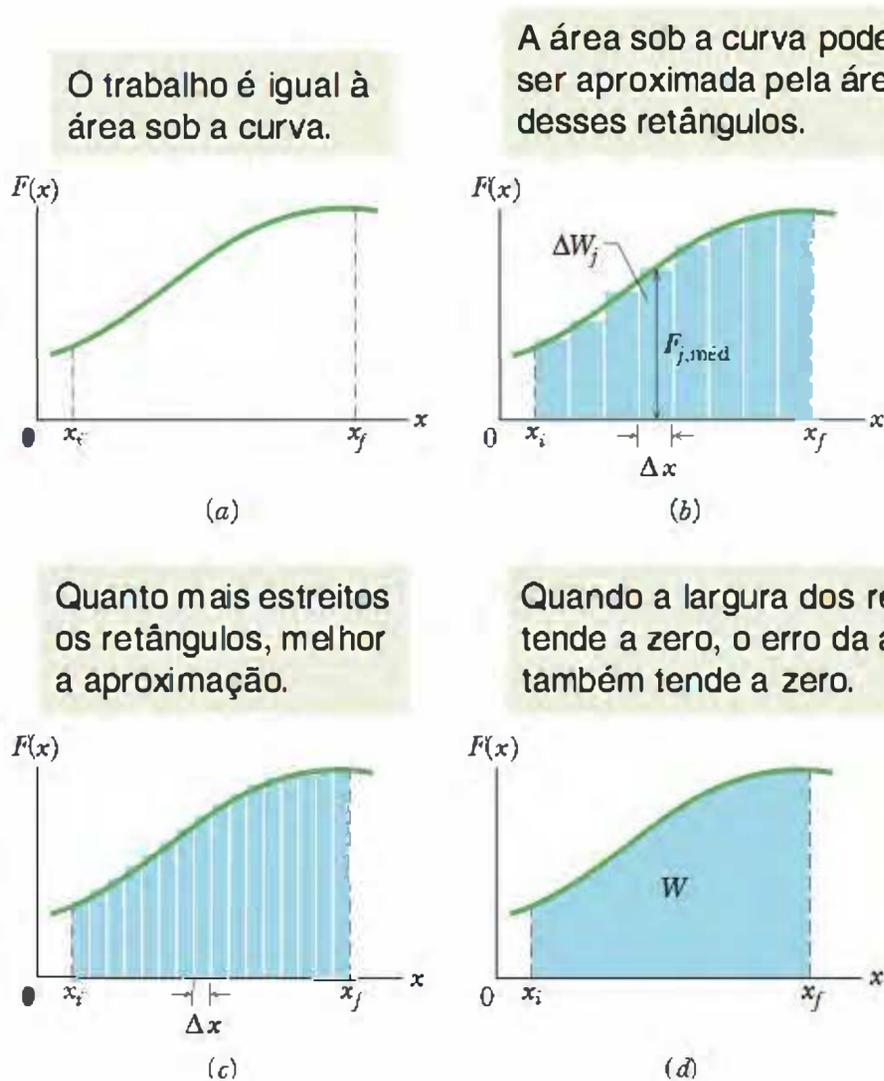



Figura 7-11 (a) Gráfico do módulo de uma força unidimensional $\vec{F}(x)$ em função da posição x de uma partícula sobre a qual a força atua. A partícula se desloca de x_i a x_f. (b) O mesmo que (a), mas com a área sob a curva dividida em faixas estreitas. (c) O mesmo que (b), mas com a área sob a curva dividida em faixas mais estreitas. (d) O caso limite. O trabalho realizado pela força é dado pela Eq. 7-32 e é representado pela área sombreada entre a curva e o eixo x e entre x_i e x_f.

A Eq. 7-30 é uma aproximação porque a "escada" formada pelos lados superiores dos retângulos da Fig. 7-11*b* é apenas uma aproximação da curva real de $F(x)$.

Podemos melhorar a aproximação reduzindo a largura Δx dos retângulos e usando mais retângulos, como na Fig. 7-11*c*. No limite, fazemos a largura dos retângulos tender a zero; nesse caso, o número de retângulos se torna infinitamente grande e temos, como resultado exato,

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum F_{j,\text{med}}\, \Delta x. \qquad (7\text{-}31)$$

Este limite corresponde à definição da integral da função $F(x)$ entre os limites x_i e x_f. Assim, a Eq. 7-31 se torna

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx \quad \text{(trabalho de uma força variável).} \qquad (7\text{-}32)$$

Se conhecemos a função $F(x)$, podemos substituí-la na Eq. 7-32, introduzir os limites de integração apropriados, efetuar a integração e assim calcular o trabalho. (O Apêndice E contém uma lista das integrais mais usadas.) Geometricamente, o trabalho é igual à área entre a curva de $F(x)$ e o eixo x e entre os limites x_i e x_f (área sombreada na Fig. 7-11*d*).

Análise Tridimensional

Considere uma partícula sob a ação de uma força tridimensional

$$\vec{F} = F_x\hat{\mathrm{i}} + F_y\hat{\mathrm{j}} + F_z\hat{\mathrm{k}}, \qquad (7\text{-}33)$$

cujas componentes F_x, F_y e F_z podem depender da posição da partícula, ou seja, podem ser funções da posição. Vamos, porém, fazer três simplificações: F_x pode depender de x, mas não de y ou z, F_y pode depender de y, mas não de x ou z; F_z pode depender de z, mas não de x ou y. Suponha que a partícula sofra um deslocamento incremental

$$d\vec{r} = dx\hat{\mathrm{i}} + dy\hat{\mathrm{j}} + dz\hat{\mathrm{k}}. \qquad (7\text{-}34)$$

De acordo com a Eq. 7-8, o incremento dW do trabalho realizado sobre a partícula pela força $\vec{F}$ durante o deslocamento $d\vec{r}$ é

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz. \qquad (7\text{-}35)$$

O trabalho W realizado por $\vec{F}$ enquanto a partícula se move de uma posição inicial r_i de coordenadas (x_i, y_i, z_i) para uma posição final r_f de coordenadas (x_f, y_f, z_f) é, portanto,

$$W = \int_{r_i}^{r_f} dW = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y\,dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z\,dz. \qquad (7\text{-}36)$$

Se $\vec{F}$ possui apenas a componente x, os termos da Eq. 7-36 que envolvem y e z são nulos e a equação se reduz à Eq. 7-32.

Teorema do Trabalho e Energia Cinética com uma Força Variável

A Eq. 7-32 permite calcular o trabalho realizado por uma força variável sobre uma partícula em uma situação unidimensional. Vamos agora verificar se o trabalho calculado é realmente igual à variação da energia cinética da partícula, como afirma o teorema do trabalho e energia cinética.

Considere uma partícula de massa m que se move ao longo de um eixo x e está sujeita a uma força $F(x)$ paralela ao eixo x. De acordo com a Eq. 7-32, o trabalho re-

alizado pela força sobre a partícula quando a partícula se desloca da posição x_i para a posição x_f é dado por

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_f} ma\,dx. \tag{7-37}$$

onde usamos a segunda lei de Newton para substituir $F(x)$ por ma. Podemos escrever o integrando $ma\,dx$ da Eq. 7-37 como

$$ma\,dx = m\frac{dv}{dt}\,dx. \tag{7-38}$$

Usando a regra da cadeia para derivadas, temos:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v, \tag{7-39}$$

e a Eq. 7-38 se torna

$$ma\,dx = m\frac{dv}{dx}v\,dx = mv\,dv. \tag{7-40}$$

Substituindo a Eq. 7-40 na Eq. 7-37, obtemos

$$W = \int_{v_i}^{v_f} mv\,dv = m\int_{v_i}^{v_f} v\,dv$$
$$= \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2. \tag{7-41}$$

Observe que quando mudamos a variável de integração de x para v, tivemos que expressar os limites da integral em termos da nova variável. Observe também que, como a massa m é constante, pudemos colocá-la do lado de fora da integral.

Reconhecendo os termos do lado direito da Eq. 7-41 como energias cinéticas, podemos escrever esta equação na forma

$$W = K_f - K_i = \Delta K,$$

que é o teorema do trabalho e energia cinética.

Exemplo

Cálculo do trabalho por integração gráfica

Na anestesia epidural, como a usada nos partos, o médico ou anestesista precisa introduzir uma agulha nas costas do paciente e atravessar várias camadas de tecido até chegar numa região estreita, chamada de espaço epidural, que envolve a medula espinhal. A agulha é usada para injetar o líquido anestésico. Este delicado procedimento requer muita prática, pois o médico precisa saber quando chegou ao espaço epidural e não pode ultrapassar a região, um erro que poderia resultar em sérias complicações.

A sensibilidade de um médico em relação à penetração da agulha se baseia no fato de que a força que deve ser aplicada à agulha para fazê-la atravessar os tecidos é variável. A Fig. 7-12*a* é um gráfico do módulo F da força em função do deslocamento x da ponta da agulha durante uma anestesia epidural típica. (Os dados originais foram retificados para produzir os segmentos de reta.) Quando x cresce a partir de 0, a pele oferece resistência à agulha, mas em x = 8,0 mm a pele é perfurada e a força necessária diminui. Da mesma forma, a agulha perfura o ligamento interespinhoso em x = 18 mm e o ligamento amarelo, relativamente duro, em x = 30 mm. A agulha entra, então, no espaço epidural (onde deve ser injetado o líquido anestésico) e a força diminui bruscamente. Um médico recém-formado precisa se familiarizar com este comportamento da força com o deslocamento para saber quando deve parar de empurrar a agulha. (Este é o padrão que é programado nas simulações em realidade virtual de uma anestesia epidural.) Qual é o trabalho W realizado pela força exercida sobre a agulha para levá-la até o espaço epidural em x = 30 mm?

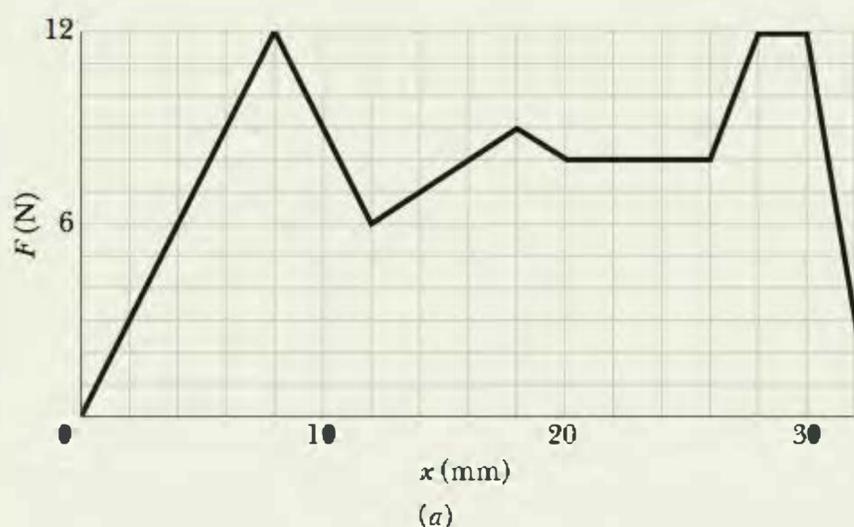
IDEIAS-CHAVE

(1) Podemos calcular o trabalho W realizado pela força variável $F(x)$ integrando a força para todas as posições x consideradas. De acordo com a Eq. 7-32,

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx.$$

Queremos calcular o trabalho realizado pela força durante o deslocamento de $x_i = 0$ até $x_f = 0{,}030$ m. (2) Podemos calcular a integral determinando a área sob a curva da Fig. 7-12*a*:

$$W = \begin{pmatrix} \text{área entre a curva da força} \\ \text{e o eixo } x, \text{ de } x_i \text{ a } x_f \end{pmatrix}.$$

Cálculos Como nosso gráfico é formado por segmentos de reta, podemos calcular a área separando a região sob a curva em regiões retangulares e triangulares, como na Fig. 7-12*b*. A área da região triangular *A*, por exemplo, é dada por

$$\text{área}_A = ½(0{,}0080 \text{ m})(12 \text{ N}) = 0{,}048 \text{ N·m} = 0{,}048 \text{ J}.$$

Depois de calcular as áreas de todas as regiões da Fig. 7-12*b*, descobrimos que o trabalho total é

$$W = (\text{soma das áreas das regiões de } A \text{ a } K)$$
$$= 0{,}048 + 0{,}024 + 0{,}012 + 0{,}036 + 0{,}009 + 0{,}001 + 0{,}016 + 0{,}048 + 0{,}016 + 0{,}004 + 0{,}024$$
$$= 0{,}238 \text{ J}. \quad \text{(Resposta)}$$

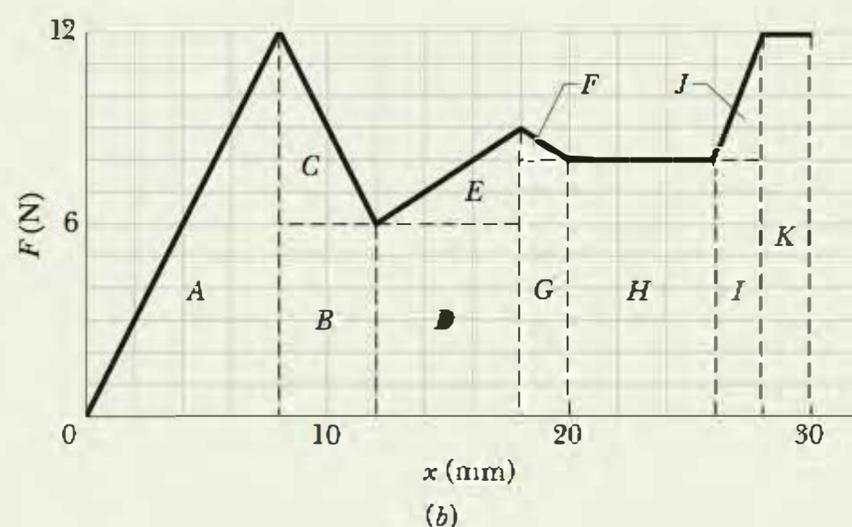



Figura 7-12 (*a*) Módulo *F* da força aplicada à agulha em função do deslocamento *x* em uma anestesia epidural. (*b*) Divisão da região entre a curva e o eixo em várias partes para calcular a área.

Exemplo

Trabalho: integração bidimensional

A força $\vec{F} = (3x^2 \text{ N})\hat{\text{i}} + (4 \text{ N})\hat{\text{j}}$, com x em metros, age sobre uma partícula, mudando apenas a energia cinética da partícula. Qual é o trabalho realizado sobre a partícula quando ela se desloca das coordenadas (2 m, 3 m) para (3 m, 0 m)? A velocidade da partícula aumenta, diminui ou permanece a mesma?

IDEIA-CHAVE

A força é variável porque sua componente *x* depende do valor de *x*. Assim, não podemos usar as Eqs. 7-7 e 7-8 para calcular o trabalho realizado. Em vez disso, devemos usar a Eq. 7-36 para integrar a força.

Cálculo Escrevemos duas integrais, uma para cada eixo:

$$W = \int_2^3 3x^2\, dx + \int_3^0 4\, dy = 3\int_2^3 x^2\, dx + 4\int_3^0 dy$$
$$= 3[\tfrac{1}{3}x^3]_2^3 + 4[y]_3^0 = [3^3 - 2^3] + 4[0 - 3]$$
$$= 7{,}0 \text{ J}. \quad \text{(Resposta)}$$

O resultado positivo significa que a força $\vec{F}$ transfere energia para a partícula. Assim, a energia cinética da partícula aumenta e, como $K = \frac{1}{2}mv^2$, a velocidade escalar também aumenta. No caso de trabalho negativo, a energia cinética e a velocidade teriam diminuído.

7-9 Potência

A taxa de variação com o tempo do trabalho realizado por uma força recebe o nome de **potência**. Se uma força realiza um trabalho W em um intervalo de tempo Δt, a **potência média** desenvolvida durante esse intervalo de tempo é

$$P_{\text{méd}} = \frac{W}{\Delta t} \quad \text{(potência média)}. \qquad (7\text{-}42)$$

A **potência instantânea** P é a taxa de variação instantânea com a qual o trabalho é realizado, que pode ser escrita como

$$P = \frac{dW}{dt} \quad \text{(potência instantânea)}. \tag{7-43}$$

Suponha que conhecemos o trabalho $W(t)$ realizado por uma força em função do tempo. Nesse caso, para determinar a potência instantânea P, digamos, no instante $t = 3{,}0$ s da realização do trabalho, basta derivar $W(t)$ em relação ao tempo e calcular o valor da derivada para $t = 3{,}0$ s.

A unidade de potência no SI é o joule por segundo. Essa unidade é usada com tanta frequência que recebeu um nome especial, o **watt** (W), em homenagem a James Watt, cuja contribuição foi fundamental para o aumento da potência das máquinas a vapor. No sistema britânico, a unidade de potência é o pé-libra por segundo (ft · lb/s). O horsepower (hp) também é muito usado. Seguem as relações entre essas unidades e a unidade de potência no SI.

$$1 \text{ watt} = 1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 0{,}738 \text{ ft} \cdot \text{lb/s} \tag{7-44}$$

e

$$1 \text{ horsepower} = 1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s} = 746 \text{ W}. \tag{7-45}$$

Examinando a Eq. 7-42, vemos que o trabalho pode ser expresso como potência multiplicada por tempo, como na unidade quilowatt-hora, muito usada na prática. A relação entre o quilowatt-hora e o joule é a seguinte:

$$\begin{aligned} 1 \text{ quilowatt-hora} &= 1 \text{ kW} \cdot \text{h} = (10^3 \text{ W})(3600 \text{ s}) \\ &= 3{,}60 \times 10^6 \text{ J} = 3{,}60 \text{ MJ}. \end{aligned} \tag{7-46}$$

Talvez por aparecer nas contas de luz, o watt e o quilowatt-hora são normalmente associados à energia elétrica. Entretanto, podem ser usados para medir outras formas de potência e energia. Se você apanha um livro no chão e o coloca sobre uma mesa, pode dizer que realizou um trabalho, digamos, de 4×10^{-6} kW · h (ou 4 mW · h).

Também podemos expressar a taxa com a qual uma força realiza trabalho sobre uma partícula (ou um objeto que se comporta como uma partícula) em termos da força e da velocidade da partícula. Para uma partícula que se move em linha reta (ao longo do eixo x, digamos) sob a ação de uma força $\vec{F}$ que faz um ângulo ϕ com a direção de movimento da partícula, a Eq. 7-43 se torna

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cos \phi \, dx}{dt} = F \cos \phi \left(\frac{dx}{dt} \right),$$

ou

$$P = Fv \cos \phi. \tag{7-47}$$

Escrevendo o lado direito da Eq. 7-47 como o produto escalar $\vec{F} \cdot \vec{v}$, a equação se torna

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad \text{(potência instantânea)}. \tag{7-48}$$

Assim, por exemplo, o caminhão da Fig. 7-13 exerce uma força $\vec{F}$ sobre a carga que está sendo rebocada, que tem velocidade $\vec{v}$ em um certo instante. A potência instantânea desenvolvida por $\vec{F}$ é a taxa com a qual $\vec{F}$ realiza trabalho sobre a carga nesse instante e é dada pelas Eqs. 7-47 e 7-48. Podemos dizer que essa potência é "a potência do caminhão", mas devemos ter em mente o que isso significa: potência é a taxa com a qual uma *força* realiza trabalho.

Figura 7-13 A potência desenvolvida pela força aplicada à carga pelo caminhão é igual à taxa com a qual a força realiza trabalho sobre a carga. *(REGLAIN FREDERIC/GammaPresse, Inc.)*

TESTE 3

Um bloco descreve um movimento circular uniforme sob a ação de uma corda presa ao bloco e ao centro da trajetória. A potência desenvolvida pela força que a corda exerce sobre o bloco é positiva, negativa ou nula?

Exemplo

Potência, força, velocidade

A Fig. 7-14 mostra as forças constantes $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ que agem sobre uma caixa enquanto desliza para a direita sobre um piso sem atrito. A força $\vec{F}_1$ é horizontal, de módulo 2,0 N; a força $\vec{F}_2$ está inclinada para cima de um ângulo de 60° em relação ao piso e tem um módulo de 4,0 N. A velocidade escalar v da caixa em um certo instante é 3,0 m/s. Quais são as potências desenvolvidas pelas duas forças que agem sobre a caixa nesse instante? Qual é a potência total? A potência total está variando nesse instante?

IDEIA-CHAVE

Estamos interessados na potência instantânea e não na potência média em um intervalo de tempo. Além disso, conhecemos a velocidade da caixa e não o trabalho realizado sobre a caixa.

Cálculo Usamos a Eq. 7-47 duas vezes, uma para cada força. Para a força $\vec{F}_1$, que faz um ângulo ϕ_1 com a velocidade $\vec{v}$, temos:

$$P_1 = F_1 v \cos \phi_1 = (2,0\ \text{N})(3,0\ \text{m/s}) \cos 180° = -6,0\ \text{W}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Este resultado negativo indica que a força $\vec{F}_1$ está *recebendo* energia da caixa à taxa de 6,0 J/s.

No caso da força $\vec{F}_2$, que faz um ângulo ϕ_2 com a velocidade $\vec{v}$, temos:

$$P_2 = F_2 v \cos \phi_2 = (4,0\ \text{N})(3,0\ \text{m/s}) \cos 60° = 6,0\ \text{W}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Este resultado positivo indica que a força $\vec{F}_2$ está *fornecendo* energia à caixa à taxa de 6,0 J/s.

A potência total é a soma das duas potências:

$$P_{tot} = P_1 + P_2 = -6,0\ \text{W} + 6,0\ \text{W} = 0, \qquad \text{(Resposta)}$$

que nos diz que a taxa total de transferência de energia é zero. Assim, a energia cinética ($K = \frac{1}{2}mv^2$) da caixa não está variando e a velocidade da caixa continua a ser 3,0 m/s. Como as forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ e a velocidade $\vec{v}$ não variam, vemos pela Eq. 7-48 que P_1 e P_2 são constantes e o mesmo acontece com P_{tot}.

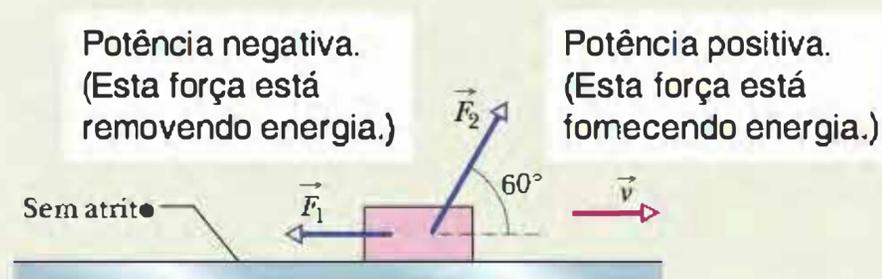



Figura 7-14 Duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, agem sobre uma caixa que desliza para a direita em um piso sem atrito. A velocidade da caixa é $\vec{v}$.

REVISÃO E RESUMO

Energia Cinética A **energia cinética** K associada ao movimento de uma partícula de massa m e velocidade escalar v, onde v é muito menor que a velocidade da luz, é dada por

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 \quad \text{(energia cinética)}. \qquad (7\text{-}1)$$

Trabalho **Trabalho** W é a energia transferida para um objeto ou de um objeto por uma força que age sobre o objeto. Quando o objeto recebe energia, o trabalho é positivo; quando o objeto cede energia, o trabalho é negativo.

Trabalho Realizado por uma Força Constante O trabalho realizado sobre uma partícula por uma força constante $\vec{F}$ durante um deslocamento $\vec{d}$ é dado por

$$W = Fd \cos \phi = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad \text{(trabalho, força constante)}, \qquad (7\text{-}7, 7\text{-}8)$$

onde ϕ é o ângulo constante entre $\vec{F}$ e $\vec{d}$. Apenas a componente de $\vec{F}$ na direção do deslocamento $\vec{d}$ realiza trabalho sobre o objeto. Quando duas ou mais forças agem sobre um objeto, o **trabalho total** é a soma dos trabalhos realizados pelas forças, que também é igual ao trabalho que seria realizado pela força resultante $\vec{F}_{res}$.

Trabalho e Energia Cinética No caso de uma partícula, uma variação ΔK da energia cinética é igual ao trabalho total W realizado sobre a partícula:

$$\Delta K = K_f - K_i = W \quad \text{(teorema do trabalho e energia cinética)}, \qquad (7\text{-}10)$$

onde K_i é a energia cinética inicial da partícula e K_f é a energia cinética da partícula após o trabalho ter sido realizado. De acordo com a Eq. 7-10, temos:

$$K_f = K_i + W. \qquad (7\text{-}11)$$

Trabalho Realizado pela Força Gravitacional O trabalho W_g realizado pela força gravitacional $\vec{F}_g$ sobre uma partícula (ou um objeto que se comporta como uma partícula) de massa m durante um deslocamento $\vec{d}$ é dado por

$$W_g = mgd \cos \phi, \qquad (7\text{-}12)$$

onde ϕ é o ângulo entre $\vec{F}_g$ e $\vec{d}$.

Trabalho Realizado para Levantar e Baixar um Objeto O trabalho W_a realizado por uma força aplicada quando um objeto que

se comporta como uma partícula é levantado ou baixado está relacionado ao trabalho W_g realizado pela força gravitacional e à variação ΔK da energia cinética do objeto através da equação

$$\Delta K = K_f - K_i = W_a + W_g. \quad (7\text{-}15)$$

Se $K_f = K_i$, a Eq. 7-15 se reduz a

$$W_a = -W_g, \quad (7\text{-}16)$$

que nos diz que a energia cedida ao objeto pela força aplicada é igual à energia extraída do objeto pela força gravitacional.

Força Elástica A força $\vec{F}_s$ de uma mola é

$$\vec{F}_s = -k\vec{d} \quad \text{(lei de Hooke)}, \quad (7\text{-}20)$$

onde $\vec{d}$ é o deslocamento da extremidade livre da mola em relação à posição que ocupa quando a mola está no **estado relaxado** (nem comprimida nem alongada) e k é a **constante elástica** (uma medida da rigidez da mola). Se um eixo x é traçado ao longo do comprimento da mola, com a origem na posição da extremidade livre da mola no estado relaxado, a Eq. 7-20 pode ser escrita na forma

$$F_x = -kx \quad \text{(lei de Hooke)}. \quad (7\text{-}21)$$

A força elástica é, portanto, uma força variável: ela varia com o deslocamento da extremidade livre da mola.

Trabalho Realizado por uma Força Elástica Se um objeto está preso à extremidade livre de uma mola, o trabalho W_s realizado sobre o objeto pela força elástica quando o objeto é deslocado de uma posição inicial x_i para uma posição final x_f é dado por

$$W_s = \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2. \quad (7\text{-}25)$$

Se $x_i = 0$ e $x_f = x$, a Eq. 7-25 se torna

$$W_s = -\tfrac{1}{2}kx^2. \quad (7\text{-}26)$$

Trabalho Realizado por uma Força Variável Quando a força $\vec{F}$ aplicada a um objeto que se comporta como uma partícula depende da posição do objeto, o trabalho realizado por $\vec{F}$ sobre o objeto enquanto o objeto se move de uma posição inicial r_i de coordenadas (x_i, y_i, z_i) para uma posição final r_f de coordenadas (x_f, y_f, z_f) pode ser calculado integrando a força. Supondo que a componente F_x pode depender de x mas não de y ou z, que a componente F_y pode depender de y mas não de x ou z e que a componente F_z pode depender de z mas não de x ou y, o trabalho é dado por

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y\,dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z\,dz. \quad (7\text{-}36)$$

Se $\vec{F}$ possui apenas a componente x, a Eq. 7-36 se reduz a

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx. \quad (7\text{-}32)$$

Potência A **potência** desenvolvida por uma força é a taxa com a qual a força realiza trabalho sobre um objeto. Se a força realiza um trabalho W em um intervalo de tempo Δt, a *potência média* desenvolvida pela força nesse intervalo de tempo é dada por

$$P_{\text{méd}} = \frac{W}{\Delta t}. \quad (7\text{-}42)$$

Potência instantânea é a taxa instantânea com a qual o trabalho está sendo realizado:

$$P = \frac{dW}{dt}. \quad (7\text{-}43)$$

No caso de uma força $\vec{F}$ que faz um ângulo ϕ com a velocidade instantânea $\vec{v}$ de um objeto, a potência instantânea é

$$P = Fv\cos\phi = \vec{F}\cdot\vec{v}. \quad (7\text{-}47, 7\text{-}48)$$

PERGUNTAS

1 Ordene as seguintes velocidades de acordo com a energia cinética que uma partícula teria se estivesse a essa velocidade, em ordem decrescente: (a) $\vec{v} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$, (b) $\vec{v} = -4\hat{i} + 3\hat{j}$, (c) $\vec{v} = -3\hat{i} + 4\hat{j}$, (d) $\vec{v} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$, (e) $\vec{v} = 5\hat{i}$ e (f) $v = 5$ m/s a 30° com a horizontal.

2 A Fig. 7-15*a* mostra duas forças horizontais que agem sobre um bloco que está deslizando para a direita sobre um piso sem atrito. A Fig. 7-15*b* mostra três gráficos da energia cinética K do bloco em função do tempo t. Qual dos gráficos corresponde melhor às três seguintes situações: (a) $F_1 = F_2$, (b) $F_1 > F_2$, (c) $F_1 < F_2$?

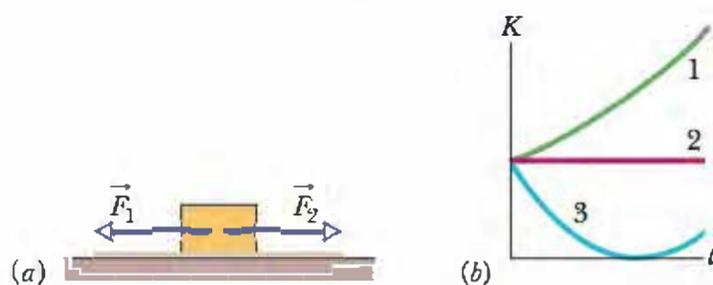



Figura 7-15 Pergunta 2.

3 O trabalho realizado por uma força constante $\vec{F}$ sobre uma partícula durante um deslocamento retilíneo $\vec{d}$ é positivo ou negativo (a) se o ângulo entre $\vec{F}$ e $\vec{d}$ é 30°; (b) se o ângulo é 100°; (c) se $\vec{F} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$ e $\vec{d} = -4\hat{i}$?

4 Em três situações, uma força horizontal aplicada brevemente muda a velocidade de um disco de metal que desliza sobre uma superfície de gelo de atrito desprezível. As vistas superiores da Fig. 7-16 mostram, para cada situação, a velocidade inicial v_i do disco, a velocidade final v_f e as orientações dos vetores velocidade correspondentes. Ordene as situações de acordo com o trabalho realizado sobre o disco pela força aplicada, do mais positivo para o mais negativo.

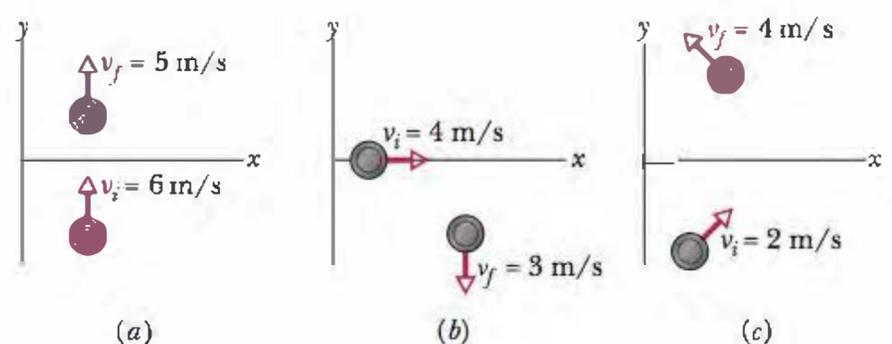



Figura 7-16 Pergunta 4.

5 A Fig. 7-17 mostra quatro gráficos (traçados na mesma escala) da componente F_x de uma força variável (dirigida ao longo de um eixo x) em função da posição x de uma partícula sobre a qual a força atua. Ordene os gráficos de acordo com o trabalho realizado pela força sobre a partícula de $x = 0$ a $x = x_1$, do mais positivo para o mais negativo.

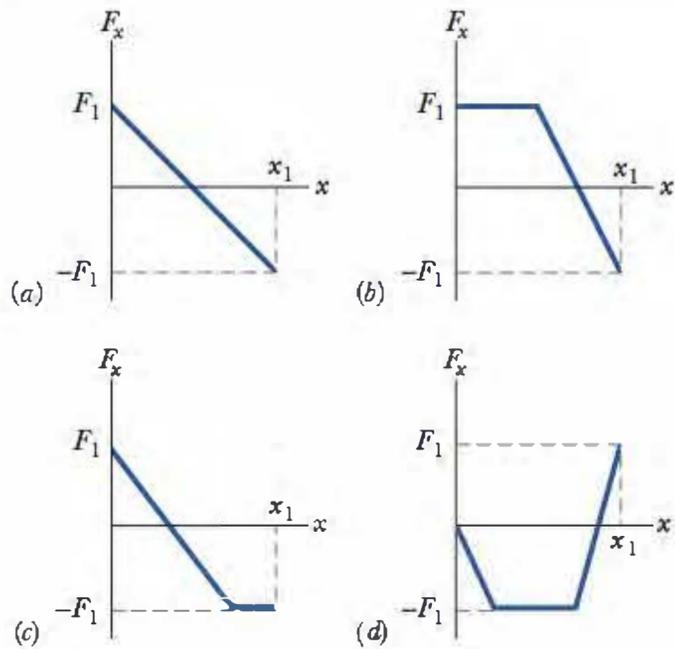



Figura 7-17 Pergunta 5.

6 A Fig. 7-18 mostra a componente F_x de uma força que pode agir sobre uma partícula. Se a partícula parte do repouso em $x = 0$, qual é sua coordenada quando (a) a energia cinética é máxima, (b) a velocidade é máxima e (c) a velocidade é nula? (d) Qual é o sentido da velocidade da partícula ao passar pelo ponto $x = 6$ m?

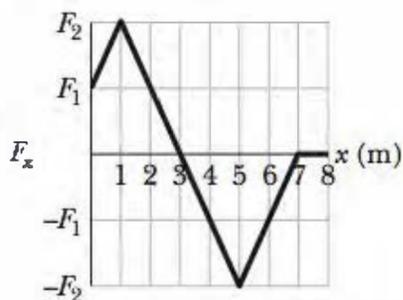



Figura 7-18 Pergunta 6.

7 Na Fig. 7-19, um porco ensebado pode escolher entre três escorregas para descer. Ordene os escorregas de acordo com o trabalho que a força gravitacional realiza sobre o porco durante a descida, do maior para o menor.

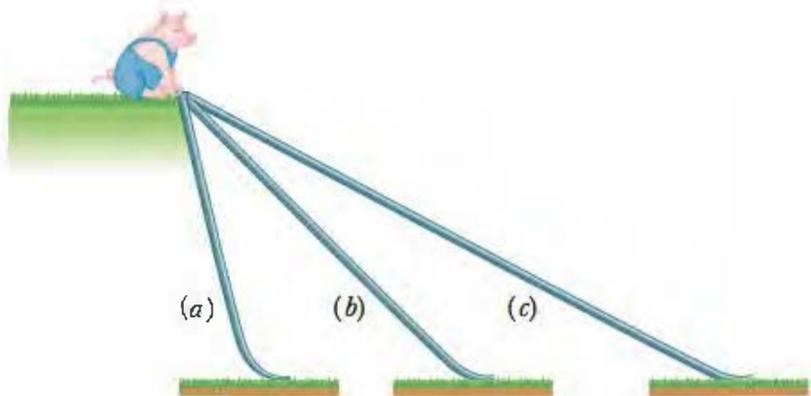



Figura 7-19 Pergunta 7.

8 A Fig. 7-20a mostra quatro situações nas quais uma força horizontal age sobre um mesmo bloco, que está inicialmente em repouso. Os módulos das forças são $F_2 = F_4 = 2F_1 = 2F_3$. A componente horizontal v_x da velocidade do bloco é mostrada na Fig. 7-20b para as quatro situações. (a) Que gráfico da Fig. 7-20b melhor corresponde a que força da Fig. 7-20a? (b) Que gráfico da Fig. 7-20c (da energia cinética K em função do tempo t) melhor corresponde a que gráfico na Fig. 7-20b?

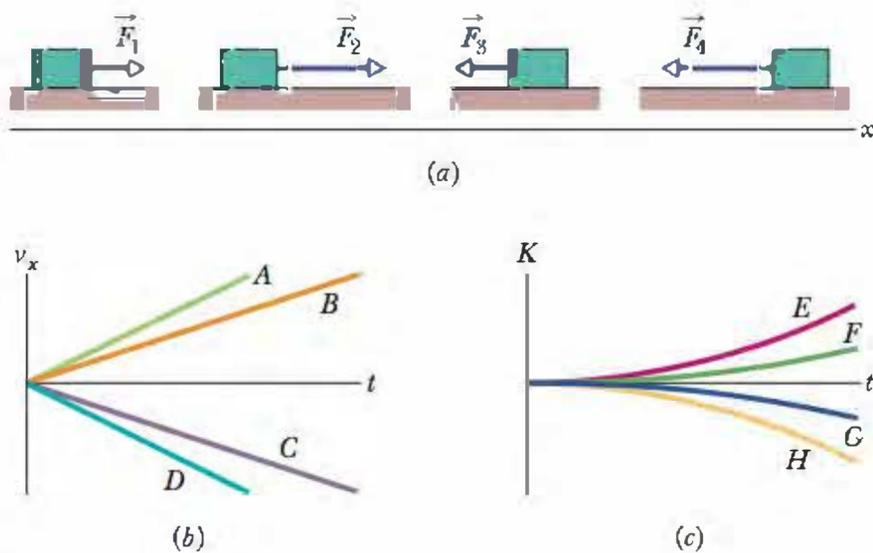



Figura 7-20 Pergunta 8.

9 A mola A é mais rígida que a mola B ($k_A > k_B$). A força elástica de que mola realiza mais trabalho se as molas são comprimidas (a) de uma mesma distância e (b) por uma mesma força?

10 Uma bola é arremessada ou deixada cair a partir do repouso da borda de um precipício. Qual dos gráficos na Fig. 7-21 poderia mostrar como a energia cinética da bola varia durante a queda?

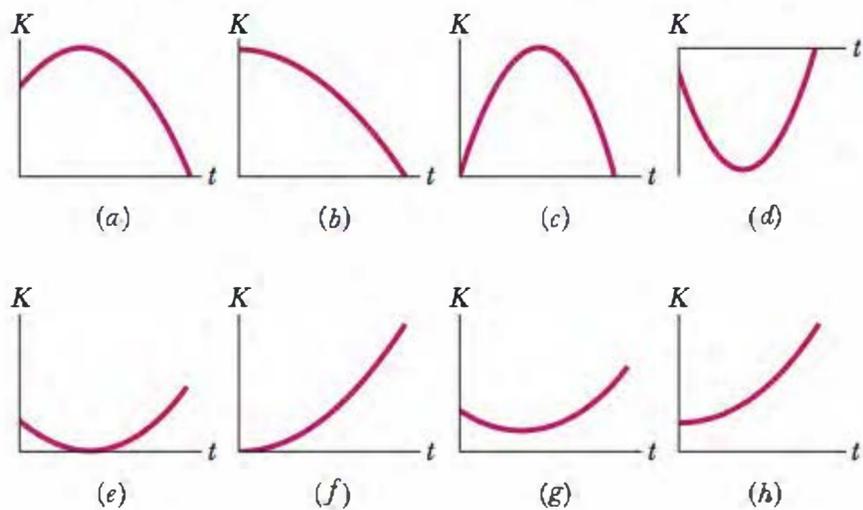



Figura 7-21 Pergunta 10.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física* de Jearl Walker, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

Seção 7-3 Energia Cinética

•1 Um próton (massa $m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg) está sendo acelerado em linha reta a $3{,}6 \times 10^{15}$ m/s² em um acelerador de partículas. Se o próton tem uma velocidade inicial de $2{,}4 \times 10^{7}$ m/s e se desloca 3,5 cm, determine (a) a velocidade e (b) o aumento da energia cinética do próton.

•2 Se um foguete Saturno V e uma espaçonave Apolo acoplada ao foguete tinham uma massa total de $2{,}9 \times 10^{5}$ kg, qual era a energia cinética quando atingiram uma velocidade de 11,2 km/s?

•3 Em 10 de agosto de 1972, um grande meteorito atravessou a atmosfera sobre o oeste dos Estados Unidos e Canadá como uma pedra que ricocheteia na água. A bola de fogo resultante foi tão forte que pôde ser vista à luz do dia e era mais intensa que o rastro deixado por um meteorito comum. A massa do meteorito era aproximadamente 4×10^{6} kg; sua velocidade, cerca de 15 km/s. Se tivesse entrado verticalmente na atmosfera terrestre, teria atingido a superfície da Terra com aproximadamente a mesma velocidade. (a) Calcule a perda de energia cinética do meteorito (em joules) que estaria associada ao impacto vertical. (b) Expresse a energia como um múltiplo da energia explosiva de 1 megaton de TNT, $4{,}2 \times 10^{15}$ J. (c) A energia associada à explosão da bomba atômica de Hiroshima foi equivalente a 13 quilotons de TNT. A quantas bombas de Hiroshima o impacto do meteorito seria equivalente?

••4 Uma conta com uma massa de $1{,}8 \times 10^{-2}$ kg está se movendo no sentido positivo do eixo x. A partir do instante $t = 0$, no qual a conta está passando pela posição $x = 0$ com uma velocidade de 12 m/s, uma força constante passa a agir sobre a conta. A Fig. 7-22 mostra a posição da conta nos instantes $t_0 = 0$, $t_1 = 1{,}0$, $t_2 = 2{,}0$ e $t_3 = 3{,}0$ s. A conta para momentaneamente em $t = 3{,}0$ s. Qual é a energia cinética da conta em $t = 10$ s?

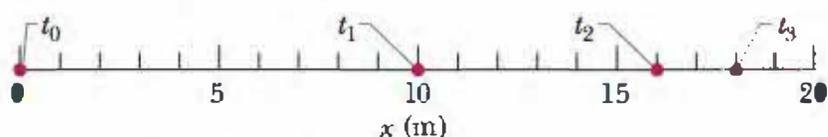



Figura 7-22 Problema 4.

••5 Em uma corrida, um pai tem metade da energia cinética do filho, que tem metade da massa do pai. Aumentando a velocidade em 1,0 m/s, o pai passa a ter a mesma energia cinética do filho. Qual é a velocidade escalar inicial (a) do pai e (b) do filho?

••6 Uma força $\vec{F}_a$ é aplicada a uma conta quando esta se move em linha reta, sofrendo um deslocamento de +5,0 cm. O módulo de $\vec{F}_a$ é mantido constante, mas o ângulo ϕ entre $\vec{F}_a$ e o deslocamento da conta pode ser escolhido. A Fig. 7-23 mostra o trabalho W realizado por $\vec{F}_a$ sobre a conta para valores de ϕ dentro de um certo intervalo; $W_0 = 25$ J. Qual é o trabalho realizado por $\vec{F}_a$ se ϕ é igual a (a) 64° e (b) 147°?

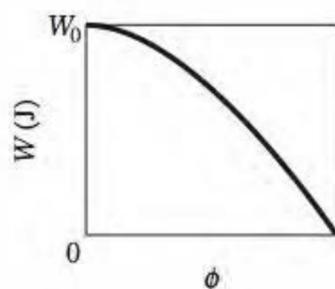



Figura 7-23 Problema 6.

Seção 7-5 Trabalho e Energia Cinética

•7 Um corpo de 3,0 kg está em repouso sobre um colchão de ar horizontal de atrito desprezível quando uma força horizontal constante $\vec{F}$ é aplicada no instante $t = 0$. A Fig. 7-24 mostra, em um gráfico estroboscópico, a posição da partícula a intervalos de 0,50 s. Qual é o trabalho realizado sobre o corpo pela força $\vec{F}$ no intervalo de $t = 0$ a $t = 2{,}0$ s?

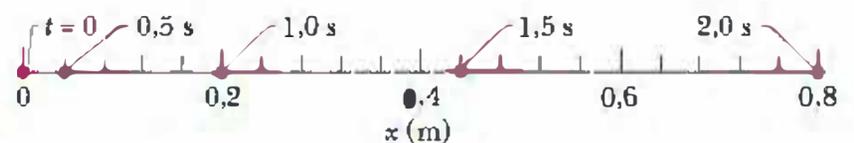



Figura 7-24 Problema 7.

•8 Um bloco de gelo flutuante é colhido por uma correnteza que aplica ao bloco uma força $\vec{F} = (210 \text{ N})\hat{i} - (150 \text{ N})\hat{j}$, fazendo com que o bloco sofra um deslocamento $\vec{d} = (15 \text{ m})\hat{i} - (12 \text{ m})\hat{j}$. Qual é o trabalho realizado pela força sobre o bloco durante o deslocamento?

•9 A única força que age sobre uma lata de 2,0 kg que está se movendo em um plano xy tem um módulo de 5,0 N. Inicialmente, a lata tem uma velocidade de 4,0 m/s no sentido positivo do eixo x; em um instante posterior, a velocidade passa a ser 6,0 m/s no sentido positivo do eixo y. Qual é o trabalho realizado sobre a lata pela força de 5,0 N nesse intervalo de tempo?

•10 Uma moeda desliza sobre um plano sem atrito em um sistema de coordenadas xy, da origem até o ponto de coordenadas (3,0 m, 4,0 m), sob o efeito de uma força constante. A força tem um módulo de 2,0 N e faz um ângulo de 100° no sentido anti-horário com o semieixo x positivo. Qual é o trabalho realizado pela força sobre a moeda durante esse deslocamento?

••11 Uma força de 12,0 N e orientação fixa realiza trabalho sobre uma partícula que sofre um deslocamento $\vec{d} = (2{,}00\hat{i} - 4{,}00\hat{j} + 3{,}00\hat{k})$ m. Qual é o ângulo entre a força e o deslocamento se a variação da energia cinética da partícula é (a) +30,0 J e (b) −30,0 J?

••12 Uma lata de parafusos e porcas é empurrada por 2,00 m ao longo de um eixo x por uma vassoura sobre um piso sujo de óleo (sem atrito) de uma oficina de automóveis. A Fig. 7-25 mostra o trabalho W realizado sobre a lata pela força horizontal constante da vassoura em função da posição x da lata. A escala vertical do gráfico é definida por $W_s = 6{,}0$ J. (a) Qual é o módulo da força? (b) Se a lata tivesse uma energia cinética inicial de 3,00 J, movendo-se no sentido positivo do eixo x, qual seria a energia cinética ao final do deslocamento de 2,00 m?

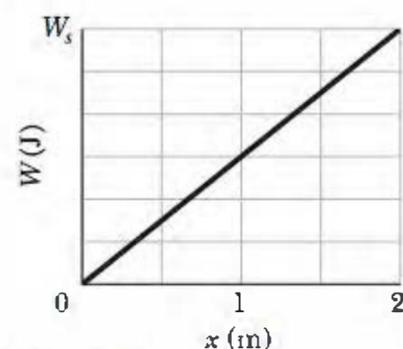



Figura 7-25 Problema 12.

••13 Um trenó e seu ocupante, com uma massa total de 85 kg, descem uma encosta e atingem um trecho horizontal retilíneo com uma velocidade de 37 m/s. Se uma força desacelera o trenó até o repouso a uma taxa constante de 2,0 m/s^2, determine (a) o módulo F da força, (b) a distância d que o trenó percorre até parar e (c) o trabalho W realizado pela força sobre o trenó. Quais são os valores de (d) F, (e) d e (f) W, se a taxa de desaceleração é 4,0 m/s^2?

••14 A Fig. 7-26 mostra uma vista superior de três forças horizontais atuando sobre uma caixa que estava inicialmente em repouso e passou a se mover sobre um piso sem atrito. Os módulos das forças são $F_1 = 3{,}00$ N, $F_2 = 4{,}00$N, e $F_3 = 10{,}0$N e os ângulos indicados são $\theta_2 = 50{,}0°$ e $\theta_3 = 35{,}0°$. Qual é o trabalho total realizado sobre a caixa pelas três forças nos primeiros 4,00 m de deslocamento?

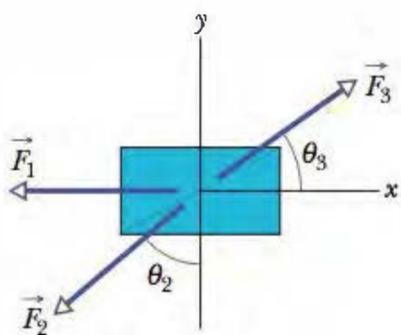



Figura 7-26 Problema 14.

••15 A Fig. 7-27 mostra três forças aplicadas a um baú que se desloca 3,00 m para a esquerda sobre um piso sem atrito. Os módulos das forças são $F_1 = 5{,}00$ N, $F_2 = 9{,}00$ N e $F_3 = 3{,}00$ N; o ângulo indicado é $\theta = 60°$. No deslocamento, (a) qual é o trabalho total realizado sobre o baú pelas três forças e (b) a energia cinética do baú aumenta ou diminui?

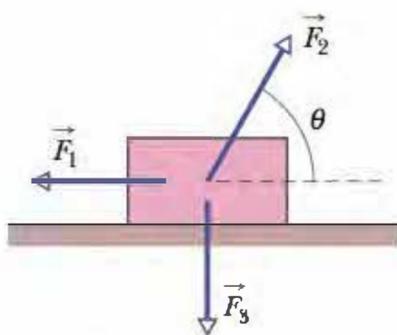



Figura 7-27 Problema 15.

••16 Um objeto de 8,0 kg está se movendo no sentido positivo de um eixo x. Quando passa pelo ponto $x = 0$, uma força constante dirigida ao longo do eixo passa a atuar sobre ele. A Fig. 7-28 mostra a energia cinética K em função da posição x quando o objeto se desloca de $x = 0$ a $x = 5{,}0$ m; $K_0 = 30{,}0$ J. A força continua a agir. Qual é a velocidade do objeto no instante em que passa pelo ponto $x = -3{,}0$m?

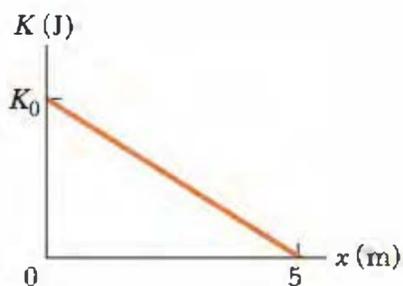



Figura 7-28 Problema 16.

Seção 7-6 Trabalho Realizado pela Força Gravitacional

•17 Um helicóptero levanta verticalmente, por meio de um cabo, uma astronauta de 72 kg até uma altura 15 m acima da superfície do oceano. A aceleração da astronauta é $g/10$. Qual é o trabalho realizado sobre a astronauta (a) pela força do helicóptero e (b) pela força gravitacional? Imediatamente antes de a astronauta chegar ao helicóptero, quais são (c) sua energia cinética e (d) sua velocidade?

•18 (a) Em 1975, o teto do velódromo de Montreal, com um peso de 360 kN, foi levantado 10 cm para que pudesse ser centralizado. Que trabalho foi realizado sobre o teto pelas forças que o ergueram? (b) Em 1960, uma mulher de Tampa, na Flórida, levantou uma das extremidades de um carro que havia caído sobre o filho quando o macaco quebrou. Se o desespero a levou a levantar 4000 N (cerca de 1/4 do peso do carro) por uma distância de 5,0 cm, que trabalho a mulher realizou sobre o carro?

••19 Na Fig. 7-29, um bloco de gelo escorrega para baixo em uma rampa sem atrito com uma inclinação $\theta = 50°$ enquanto um operário puxa o bloco (através de uma corda) com uma força $\vec{F}_r$ que tem um módulo de 50 N e aponta para cima ao longo da rampa. Quando o bloco desliza uma distância $d = 0{,}50$ m ao longo da rampa, sua energia cinética aumenta 80 J. Quão maior seria a energia cinética se o bloco não estivesse sendo puxado por uma corda?

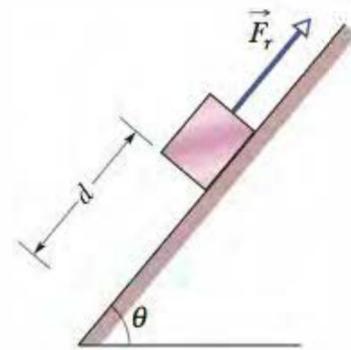



Figura 7-29 Problema 19.

••20 Um bloco é lançado para cima em uma rampa sem atrito, ao longo de um eixo x que aponta para cima. A Fig. 7-30 mostra a energia cinética do bloco em função da posição x; a escala vertical do gráfico é definida por $K_s = 40{,}0$ J. Se a velocidade inicial do bloco é 4,00 m/s, qual é a força normal que age sobre o bloco?

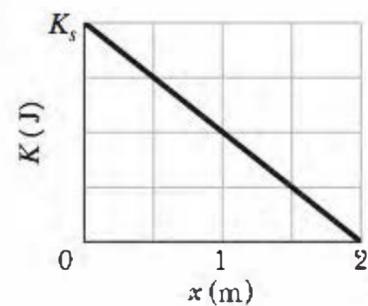



Figura 7-30 Problema 20.

••21 Uma corda é usada para baixar verticalmente um bloco de massa M, inicialmente em repouso, com uma aceleração constante para baixo de $g/4$. Após o bloco descer uma distância d, determine (a) o trabalho realizado pela força da corda sobre o bloco, (b) o trabalho realizado pela força gravitacional sobre o bloco, (c) a energia cinética do bloco; (d) a velocidade do bloco.

••22 Uma equipe de salvamento retira um espeleólogo ferido do fundo de uma caverna com o auxílio de um cabo ligado a um motor. O resgate é realizado em três etapas, cada uma envolvendo uma distância vertical de 10,0 m: (a) o espeleólogo, que estava inicialmente em repouso, é acelerado até uma velocidade de 5,00 m/s; (b) é içado com velocidade constante de 5,00 m/s; (c) finalmente, é desacelerado até o repouso. Qual é o trabalho realizado em cada etapa sobre o espeleólogo de 80,0 kg?

••23 Na Fig. 7-31, uma força constante $\vec{F}_a$ de módulo 82,0 N é aplicada a uma caixa de sapatos de 3,00 kg a um ângulo $\phi = 53,0°$, fazendo com que a caixa se mova para cima ao longo de uma rampa sem atrito com velocidade constante. Qual é o trabalho realizado sobre a caixa por $\vec{F}_a$ após a caixa ter subido uma distância vertical $h = 0,150$ m?

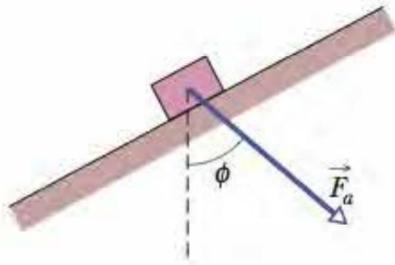



Figura 7-31 Problema 23.

••24 Na Fig. 7-32, uma força horizontal $\vec{F}_a$ de módulo 20,0 N é aplicada a um livro de psicologia de 3,00 kg enquanto o livro escorrega por uma distância $d = 0,500$ m ao longo de uma rampa de inclinação $\theta = 30,0°$, subindo sem atrito. (a) Neste deslocamento, qual é o trabalho total realizado sobre o livro por $\vec{F}_a$, pela força gravitacional e pela força normal? (b) Se o livro tem energia cinética nula no início do deslocamento, qual é sua energia cinética final?

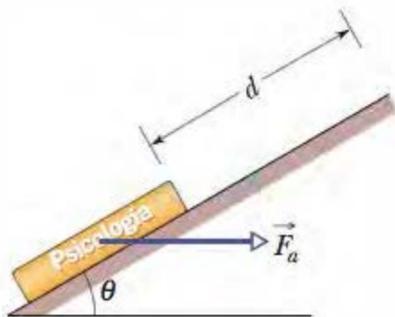



Figura 7-32 Problema 24.

••25 Na Fig. 7-33, um pedaço de queijo de 0,250 kg repousa no chão de um elevador de 900 kg que é puxado para cima por um cabo, primeiro por uma distância $d_1 = 2,40$ m e depois por uma distância $d_2 = 10,5$ m. (a) No deslocamento d_1, se a força normal exercida sobre o bloco pelo piso do elevador tem um módulo constante $F_N = 3,00$ N, qual é o trabalho realizado pela força do cabo sobre o elevador? (b) No deslocamento d_2, se o trabalho realizado sobre o elevador pela força (constante) do cabo é 92,61 kJ, qual é o módulo de $\vec{F}_N$?

Figura 7-33 Problema 25.

Seção 7-7 Trabalho Realizado por uma Força Elástica

•26 Na Fig. 7-9, devemos aplicar uma força de módulo 80 N para manter o bloco estacionário em $x = -2,0$ cm. A partir dessa posição, deslocamos o bloco lentamente até que a força aplicada realize um trabalho de +4,0 J sobre o sistema massa–mola. A partir desse instante, o bloco permanece em repouso. Qual é a posição do bloco? (*Sugestão:* existem duas respostas possíveis.)

•27 Uma mola e um bloco são montados como na Fig. 7-9. Quando o bloco é puxado para o ponto $x = +4,0$ cm, devemos aplicar uma força de 360 N para mantê-lo nessa posição. Puxamos o bloco para o ponto $x = 11$ cm e o liberamos. Qual é o trabalho realizado pela mola sobre o bloco quando este se desloca de $x_i = +5,0$ cm para (a) $x = +3,0$ cm, (b) $x = -3,0$ cm, (c) $x = -5,0$ cm e (d) $x = -9,0$ cm?

•28 Durante o semestre de primavera do MIT, os estudantes de dois dormitórios vizinhos travam batalhas com grandes catapultas feitas com meias elásticas montadas na moldura das janelas. Um balão de aniversário cheio de água colorida é colocado em uma bolsa presa na meia, que é esticada até a outra extremidade do quarto. Suponha que a meia esticada obedece à lei de Hooke com uma constante elástica de 100 N/m. Se a mangueira é esticada 5,00 m e liberada, que trabalho a força elástica da meia realiza sobre a bola quando a meia volta ao comprimento normal?

••29 No arranjo da Fig. 7-9, puxamos gradualmente o bloco de $x = 0$ até $x = +3,0$ cm, onde fica em repouso. A Fig. 7-34 mostra o trabalho que nossa força realiza sobre o bloco. A escala vertical do gráfico é definida por $W_s = 1,0$ J. Em seguida, puxamos o bloco até $x = +5,0$ cm e o liberamos a partir do repouso. Qual é o trabalho realizado pela mola sobre o bloco quando este se desloca de $x_i = +5,0$ cm até (a) $x = +4,0$ cm, (b) $x = -2,0$ cm e (c) $x = -5,0$ cm?

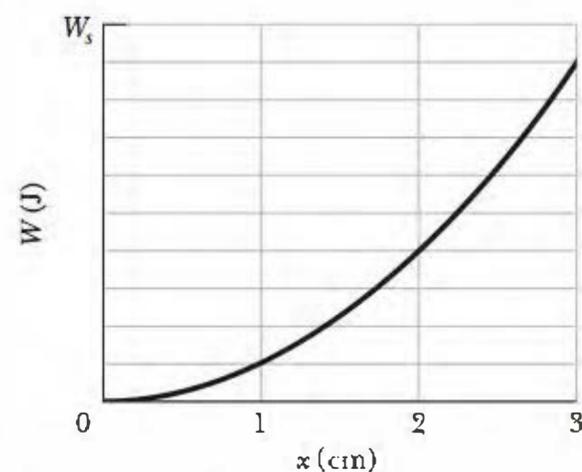



Figura 7-34 Problema 29.

••30 Na Fig. 7-9*a*, um bloco de massa *m* repousa em uma superfície horizontal sem atrito e está preso a uma mola horizontal (de constante elástica *k*) cuja outra extremidade é mantida fixa. O bloco está em repouso na posição onde a mola está relaxada ($x = 0$) quando uma força $\vec{F}$ no sentido positivo do eixo *x* é aplicada. A Fig. 7-35 mostra o gráfico da energia cinética do bloco em função da posição *x* após a aplicação da força. A escala vertical do gráfico é definida por $K_s = 4,0$ J. (a) Qual é o módulo de $\vec{F}$? (b) Qual é o valor de *k*?

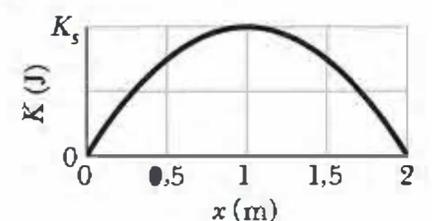



Figura 7-35 Problema 30.

••31 A única força que age sobre um corpo de 2,0 kg enquanto se move no semieixo positivo de um eixo *x* tem uma componente $F_x = -6x$ N, com *x* em metros. A velocidade do corpo em $x = 3,0$ m é 8,0 m/s. (a) Qual é a velocidade do corpo em $x = 4,0$ m? (b) Para que valor positivo de *x* o corpo tem uma velocidade de 5,0 m/s?

••32 A Fig. 7-36 mostra a força elástica F_x em função da posição *x* para o sistema massa–mola da Fig. 7-9. A escala vertical do gráfico é definida por $F_s = 160,0$ N. Puxamos o bloco até $x = 12$ cm e o liberamos. Qual é o trabalho realizado pela mola sobre o bloco ao se deslocar de $x_i = +8,0$ cm para (a) $x = +5,0$ cm, (b) $x = -5,0$ cm, (c) $x = -8,0$ cm e (d) $x = -10,0$ cm?

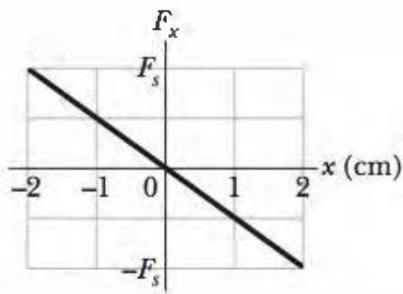



Figura 7-36 Problema 32.

•••33 O bloco na Fig. 7-9*a* está sobre uma superfície horizontal sem atrito e a constante elástica é 50 N/m. Inicialmente, a mola está relaxada e o bloco está parado no ponto $x = 0$. Uma força com módulo constante de 3,0 N é aplicada ao bloco, puxando-o no sentido positivo do eixo x e alongando a mola até o bloco parar. Quando este ponto é atingido, qual é (a) a posição do bloco, (b) o trabalho realizado sobre o bloco pela força aplicada e (c) o trabalho realizado sobre o bloco pela força elástica? Durante o deslocamento do bloco, qual é (d) a posição do bloco na qual a energia cinética é máxima e (e) o valor desta energia cinética máxima?

Seção 7-8 Trabalho Realizado por uma Força Variável Genérica

•34 Um tijolo de 10 kg se move ao longo de um eixo x. A Fig. 7-37 mostra a aceleração do tijolo em função da posição. A escala vertical do gráfico é definida por $a_s = 20{,}0$ m/s². Qual é o trabalho total realizado sobre o tijolo pela força responsável pela aceleração quando o tijolo se desloca de $x = 0$ para $x = 8{,}0$ m?

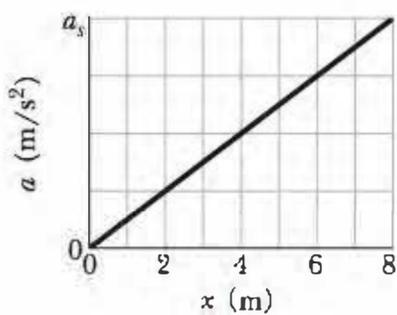



Figura 7-37 Problema 34.

•35 A força a que uma partícula está submetida aponta ao longo de um eixo x e é dada por $F = F_0(x/x_0 - 1)$. Determine o trabalho realizado pela força ao mover a partícula de $x = 0$ a $x = 2x_0$ de duas formas: (a) plotando $F(x)$ e medindo o trabalho no gráfico; (b) integrando $F(x)$.

•36 Um bloco de 5,0 kg se move em uma linha reta sobre uma superfície horizontal sem atrito sob a influência de uma força que varia com a posição, como mostra a Fig. 7-38. A escala vertical do gráfico é definida por $F_s = 10{,}0$ N. Qual é o trabalho realizado pela força quando o bloco se desloca da origem até $x = 8{,}0$ cm?

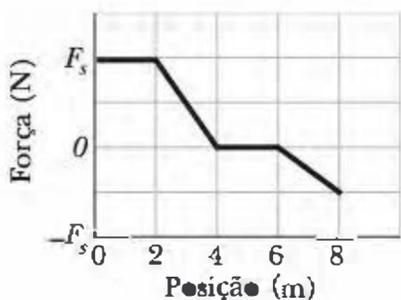



Figura 7-38 Problema 36.

••37 A Fig. 7-39 mostra a aceleração de uma partícula de 2,00 kg sob a ação de uma força $\vec{F}_a$ que desloca a partícula ao longo de um eixo x, a partir do repouso, de $x = 0$ a $x = 9{,}0$ m. A escala vertical do gráfico é definida por $a_s = 6{,}0$ m/s². Qual é o trabalho realizado pela força sobre a partícula até a partícula atingir o ponto (a) $x = 4{,}0$ m, (b) $x = 7{,}0$ m e (c) $x = 9{,}0$ m? Quais são o módulo e o sentido da velocidade da partícula quando ela atinge o ponto (d) $x = 4{,}0$ m, (b) $x = 7{,}0$ m e (c) $x = 9{,}0$ m?

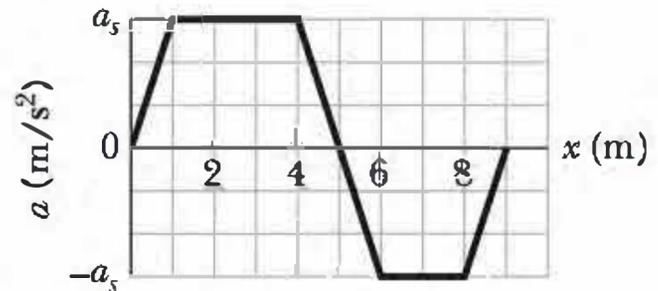



Figura 7-39 Problema 37.

••38 Um bloco de 1,5 kg está em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito quando uma força ao longo de um eixo x é aplicada ao bloco. A força é dada por $\vec{F}(x) = (2{,}5 - x^2)\hat{\text{i}}$ N, onde x está em metros e a posição inicial do bloco é $x = 0$. (a) Qual é a energia cinética do bloco ao passar pelo ponto $x = 2{,}0$ m? (b) Qual é a energia cinética máxima do bloco entre $x = 0$ e $x = 2{,}0$ m?

••39 Uma força $\vec{F} = (cx - 3{,}00x^2)\hat{\text{i}}$, onde $\vec{F}$ está em newtons, x em metros e c é uma constante, age sobre uma partícula que se desloca ao longo de um eixo x. Em $x = 0$, a energia cinética da partícula é 20,0 J; em $x = 3{,}00$ m, é 11,0 J. Determine o valor de c.

••40 Uma lata de sardinha é deslocada ao longo de um eixo x, de $x = 0{,}25$ m até $x = 1{,}25$ m, por uma força cujo módulo é dado por $F = e^{-4x^2}$, com x em metros e F em newtons. Qual é o trabalho realizado pela força sobre a lata?

••41 Uma única força atua sobre um objeto de 3,0 kg que se comporta como uma partícula, de tal forma que a posição do objeto em função do tempo é dada por $x = 3{,}0t - 4{,}0t^2 + 1{,}0t^3$, com x em metros e t em segundos. Determine o trabalho realizado pela força sobre o objeto de $t = 0$ a $t = 4{,}0$ s.

•••42 A Fig. 7-40 mostra uma corda presa a um carrinho que pode deslizar sobre um trilho horizontal sem atrito ao longo de um eixo x. A extremidade esquerda da corda é puxada através de uma polia de massa e atrito desprezíveis a uma altura $h = 1{,}20$ m em relação ao ponto onde está presa no carrinho, fazendo o carrinho deslizar de $x_1 = 3{,}00$ m até $x_2 = 1{,}00$ m. Durante o deslocamento, a tensão da corda se mantém constante e igual a 25,0 N. Qual é a variação da energia cinética do carrinho durante o deslocamento?

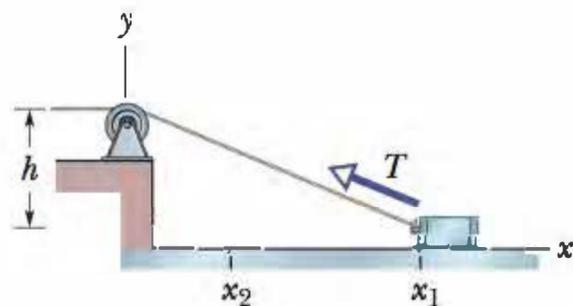



Figura 7-40 Problema 42.

Seção 7-9 Potência

•43 Uma força de 5,0 N age sobre um corpo de 15 kg inicialmente em repouso. Calcule o trabalho realizado pela força (a) no primeiro, (b) no segundo e (c) no terceiro segundo, assim como (d) a potência instantânea da força no fim do terceiro segundo.

•44 Um esquiador é puxado por uma corda para o alto de uma encosta que faz um ângulo de 12° com a horizontal. A corda se move paralelamente à encosta com uma velocidade constante de 1,0 m/s. A força da corda realiza 900 J de trabalho sobre o esquiador quando este percorre uma distância de 8,0 m encosta acima. (a) Se a velocidade constante da corda fosse 2,0 m/s, que trabalho a força da corda teria realizado sobre o esquiador para o mesmo deslocamento? A que taxa a força da corda realiza trabalho sobre o esquiador quando a corda se desloca com uma velocidade de (b) 1,0 m/s e (c) 2,0 m/s?

•45 Um bloco de 100 kg é puxado com velocidade constante de 5,0 m/s sobre um piso horizontal por uma força de 122 N que faz um ângulo de 37° acima da horizontal. Qual é a taxa com a qual a força realiza trabalho sobre o bloco?

•46 Um elevador carregado tem uma massa de $3,0 \times 10^3$ kg e sobe 210 m em 23 s, com velocidade constante. Qual é a taxa média com a qual a força do cabo do elevador realiza trabalho sobre o elevador?

••47 Uma máquina transporta um pacote de 4,0 kg de uma posição inicial $\vec{d}_i = (0,50\text{ m})\hat{i} + (0,75\text{ m})\hat{j} + (0,20\text{ m})\hat{k}$ em $t = 0$ até uma posição final $\vec{d}_f = (7,50\text{ m})\hat{i} + (12,0\text{ m})\hat{j} + (7,20\text{ m})\hat{k}$ em $t = 12$ s. A força constante aplicada pela máquina ao pacote é $\vec{F} = (2,00\text{ N})\hat{i} + (4,00\text{ N})\hat{j} + (6,00\text{ N})\hat{k}$. Para esse deslocamento, determine (a) o trabalho realizado pela força da máquina sobre o pacote e (b) a potência média dessa força.

••48 Uma bandeja de 0,30 kg escorrega sobre uma superfície horizontal sem atrito presa a uma das extremidades de uma mola horizontal ($k = 500$ N/m) cuja outra extremidade é mantida fixa. A bandeja possui uma energia cinética de 10 J ao passar pela posição de equilíbrio (ponto em que a força elástica da mola é zero). (a) Com que taxa a mola está realizando trabalho sobre a bandeja quando esta passa pela posição de equilíbrio? (b) Com que taxa a mola está realizando trabalho sobre a bandeja quando a mola está comprimida de 0,10 m e a bandeja está se afastando da posição de equilíbrio?

••49 Um elevador de carga totalmente carregado tem uma massa total de 1200 kg, que deve içar 54 m em 3,0 min, iniciando e terminando a subida em repouso. O contrapeso do elevador tem uma massa de apenas 950 kg e, portanto, o motor do elevador deve ajudar. Que potência média é exigida da força que o motor exerce sobre o elevador através do cabo?

••50 (a) Em um certo instante, um objeto que se comporta como uma partícula sofre a ação de uma força $\vec{F} = (4,0\text{ N})\hat{i} - (2,0\text{ N})\hat{j} + (9,0\text{ N})\hat{k}$ quando sua velocidade é $\vec{v} = -(2,0\text{ m/s})\hat{i} + (4,0\text{ m/s})\hat{k}$. Qual é a taxa instantânea com a qual a força realiza trabalho sobre o objeto? (b) Em outro instante, a velocidade tem apenas a componente y. Se a força não muda e a potência instantânea é -12 W, qual é a velocidade do objeto nesse instante?

••51 Uma força $\vec{F} = (3,00\text{ N})\hat{i} + (7,00\text{ N})\hat{j} + (7,00\text{ N})\hat{k}$ age sobre um objeto de 2,00 kg que se move de uma posição inicial $\vec{d}_i = (3,00\text{ m})\hat{i} - (2,00\text{ m})\hat{j} + (5,00\text{ m})\hat{k}$ para uma posição final $\vec{d}_f = -(5,00\text{ m})\hat{i} + (4,00\text{ m})\hat{j} + (7,00\text{ m})\hat{k}$ em 4,00 s. Determine (a) o trabalho realizado pela força sobre o objeto no intervalo de 4,00 s, (b) a potência média desenvolvida pela força nesse intervalo e (c) o ângulo entre os vetores $\vec{d}_i$ e $\vec{d}_f$.

•••52 Um *funny car* acelera a partir do repouso, percorrendo uma certa distância no tempo T, com o motor funcionando com potência constante P. Se os mecânicos conseguem aumentar a potência do motor de um pequeno valor dP, qual é a variação do tempo necessário para percorrer a mesma distância?

Problemas Adicionais

53 A Fig. 7-41 mostra um pacote de cachorros-quentes escorregando para a direita em um piso sem atrito por uma distância $d = 20,0$ cm enquanto três forças agem sobre o pacote. Duas são horizontais e têm módulos $F_1 = 5,00$ N e $F_2 = 1,00$ N; a terceira faz um ângulo $\theta = 60,0°$ para baixo e tem um módulo $F_3 = 4,00$ N. (a) Qual é o trabalho *total* realizado sobre o pacote pelas três forças mais a força gravitacional e a força normal? (b) Se o pacote tem uma massa de 2,0 kg e uma energia cinética inicial igual a zero, qual é sua velocidade no final do deslocamento?

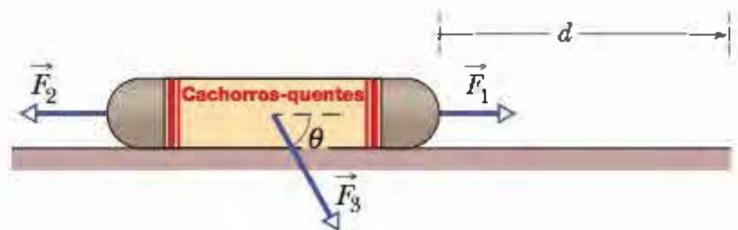



Figura 7-41 Problema 53.

54 A única força que age sobre um corpo de 2,0 kg quando o corpo se desloca ao longo de um eixo x varia da forma indicada na Fig. 7-42. A escala vertical do gráfico é definida por $F_s = 4,0$ N. A velocidade do corpo em $x = 0$ é 4,0 m/s. (a) Qual é a energia cinética do corpo em $x = 3,0$ m? (b) Para que valor de x o corpo possui uma energia cinética de 8,0 J? (c) Qual é a energia cinética máxima do corpo entre $x = 0$ e $x = 5,0$ m?

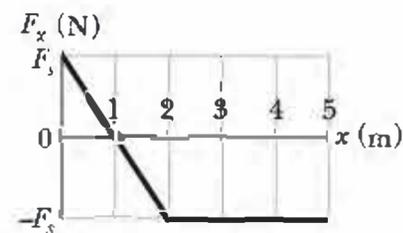



Figura 7-42 Problema 54.

55 Um cavalo puxa uma carroça com uma força de 40 lb que faz um ângulo de 30° para cima com a horizontal e se move com uma velocidade de 6,0 mi/h. (a) Que trabalho a força realiza em 10 min? (b) Qual é a potência média desenvolvida pela força em horsepower?

56 Um objeto de 2,0 kg inicialmente em repouso acelera uniformemente na horizontal até uma velocidade de 10 m/s em 3,0 s. (a) Nesse intervalo de 3,0 s, qual é o trabalho realizado sobre o objeto pela força que o acelera? Qual é a potência instantânea desenvolvida pela força (b) no fim do intervalo e (c) no fim da primeira metade do intervalo?

57 Um caixote de 230 kg está pendurado na extremidade de uma corda de comprimento $L = 12,0$ m. Você empurra o caixote horizontalmente com uma força variável $\vec{F}$, deslocando-o para o lado de uma distância $d = 4,00$ m (Fig. 7-43). (a) Qual é o módulo de $\vec{F}$ quando o caixote está na posição final? Neste deslocamento, quais são (b) o trabalho total realizado sobre o caixote, (c) o trabalho realizado pela força gravitacional sobre o caixote e (d) o trabalho realizado pela corda sobre o caixote? (e) Sabendo que o caixote está em repouso antes e depois do deslocamento, use as respostas dos itens (b), (c) e (d) para determinar o trabalho que a força $\vec{F}$ realiza sobre o caixote. (f) Por que o trabalho da força não é igual ao produto do deslocamento horizontal pela resposta do item (a)?

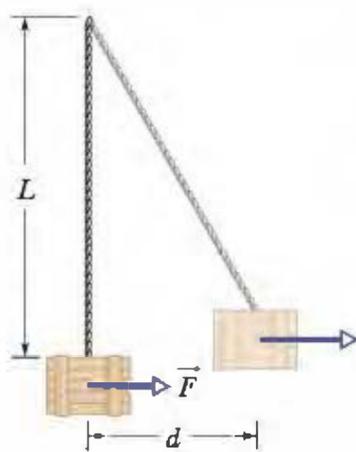



Figura 7-43 Problema 57.

58 Para puxar um engradado de 50 kg sobre um piso horizontal sem atrito, um operário aplica uma força de 210 N que faz um ângulo de 20° para cima com a horizontal. Em um deslocamento de 3,0 m, qual é o trabalho realizado sobre o engradado (a) pela força do operário, (b) pela força gravitacional e (c) pela força normal do piso? (d) Qual é o trabalho total realizado sobre o engradado?

59 Uma explosão no nível do solo produz uma cratera com um diâmetro proporcional à raiz cúbica da energia da explosão; uma explosão de 1 megaton de TNT deixa uma cratera de 1 km de diâmetro. Sob o lago Huron, em Michigan, existe uma cratera com 50 km de diâmetro, atribuída ao impacto de um asteroide no passado remoto. Qual é a energia cinética associada a esse impacto, em termos de (a) megatons de TNT (1 megaton equivale a $4,2 \times 10^{15}$ J) e (b) bombas de Hiroshima (uma bomba de Hiroshima equivale a 13 quilotons de TNT)? (Impactos de meteoritos e cometas podem ter alterado significativamente o clima da Terra no passado e contribuído para a extinção de dinossauros e outras formas de vida.)

60 Uma criança assustada desce por um escorrega de atrito desprezível em um parque de diversões apoiada pela mãe. A força da mãe sobre a criança é de 100 N para cima ao longo do escorrega e a energia cinética da criança aumenta de 30 J quando ela desce uma distância de 1,8 m. (a) Qual é o trabalho realizado sobre a criança pela força gravitacional durante a descida de 1,8 m? (b) Se a criança não tivesse o apoio da mãe, qual seria o aumento da energia cinética quando ela escorregasse a mesma distância de 1,8 m?

61 Qual é o trabalho realizado por uma força $\vec{F} = (2x\text{ N})\hat{\text{i}} + (3\text{ N})\hat{\text{j}}$, com x em metros, ao deslocar uma partícula de uma posição $\vec{r}_i = (2\text{ m})\hat{\text{i}} + (3\text{ m})\hat{\text{j}}$ para uma posição $\vec{r}_f = -(4\text{m})\hat{\text{i}} - (3\text{m})\hat{\text{j}}$?

62 Um bloco de 250 g é deixado cair em uma mola vertical, inicialmente relaxada, cuja constante elástica é $k = 2,5$ N/cm (Fig. 7-44). O bloco fica acoplado à mola, comprimindo-a em 12 cm até parar momentaneamente. Nessa compressão, que trabalho é realizado sobre o bloco (a) pela força gravitacional e (b) pela força elástica? (c) Qual é a velocidade do bloco imediatamente antes de se chocar com a mola? (d) Se a velocidade no momento do impacto é duplicada, qual é a compressão máxima da mola?

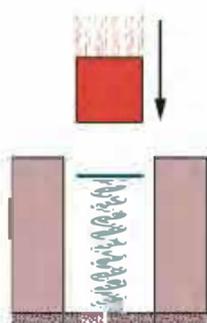



Figura 7-44 Problema 62.

63 Para empurrar um engradado de 25,0 kg para cima em um plano inclinado de 25° em relação à horizontal, um operário exerce uma força de 209 N paralela ao plano inclinado. Quando o engradado percorre 1,50 m, qual o trabalho realizado sobre ele (a) pela força aplicada pelo trabalhador, (b) pela força gravitacional e (c) pela força normal? (d) Qual é o trabalho total realizado sobre o engradado?

64 Caixas são transportadas de um local para outro de um armazém por meio de uma esteira que se move com uma velocidade constante de 0,50 m/s. Em um certo local, a esteira se move 2,0 m ao longo de uma rampa que faz um ângulo de 10° para cima com a horizontal, 2,0 m na horizontal e, finalmente, 2,0 m ao longo de uma rampa que faz um ângulo de 10° para baixo com a horizontal. Suponha que uma caixa de 2,0 kg é transportada pela esteira sem escorregar. Com que taxa a força da esteira sobre a caixa realiza trabalho quando a caixa se move (a) na rampa de 10° para cima, (b) horizontalmente e (c) na rampa de 10° para baixo?

65 Na Fig. 7-45, uma corda passa por duas polias ideais. Uma lata de massa $m = 20$ kg está pendurada em uma das polias e uma força $\vec{F}$ é aplicada à extremidade livre da corda. (a) Qual deve ser o módulo de $\vec{F}$ para que a lata seja levantada com velocidade constante? (b) Qual deve ser o deslocamento da corda para que a lata suba 2,0 cm? Durante esse deslocamento, qual é o trabalho realizado sobre a lata (c) pela força aplicada (através da corda) e (d) pela força gravitacional? (*Sugestão:* quando uma corda é usada da forma mostrada na figura, a força total com a qual a corda puxa a segunda polia é duas vezes maior que a tensão da corda.)

Figura 7-45 Problema 65.

66 Se um carro com uma massa de 1200 kg viaja a 120 km/h em uma rodovia, qual é a energia cinética do carro medida por alguém que está parado no acostamento?

67 Uma mola com um ponteiro está pendurada perto de uma régua graduada em milímetros. Três pacotes diferentes são pendurados na mola, um de cada vez, como mostra a Fig. 7-46. (a) Qual é a marca da régua indicada pelo ponteiro quando não há nenhum pacote pendurado na mola? (b) Qual é o peso P do terceiro pacote?

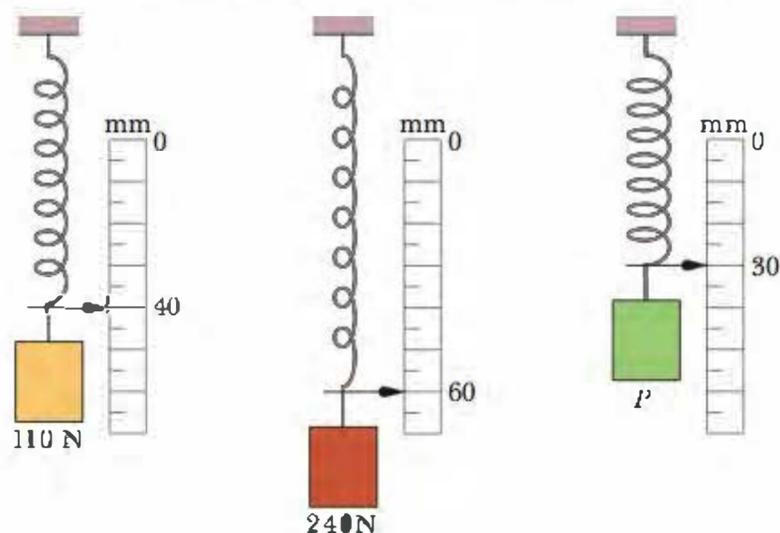



Figura 7-46 Problema 67.

68 Um trenó à vela está em repouso sobre a superfície de um lago congelado quando um vento repentino exerce sobre ele uma força constante de 200 N, na direção leste. Devido ao ângulo da vela, o vento faz com que o trenó se desloque em linha reta por uma distância de 8,0 m em uma direção 20° ao norte do leste. Qual é a energia cinética do trenó ao final desses 8,0 m?

69 Se um elevador de uma estação de esqui transporta 100 passageiros com um peso médio de 660 N até uma altura de 150 m em 60,0 s, com velocidade constante, que potência média é exigida da força que realiza este trabalho?

70 Uma força $\vec{F} = (4{,}0\text{N})\hat{\imath} + c\hat{\jmath}$ age sobre uma partícula enquanto a partícula sofre um deslocamento $\vec{d} = (3{,}0\text{ m})\hat{\imath} - (2{,}0\text{ m})\hat{\jmath}$. (Outras forças também agem sobre a partícula.) Qual é o valor de c se o trabalho realizado sobre a partícula pela força $\vec{F}$ é (a) 0, (b) 17 J e (c) −18 J?

71 Uma força constante de módulo 10 N faz um ângulo de 150° (no sentido anti-horário) com o sentido positivo do eixo x ao agir sobre um objeto de 2,0 kg que se move em um plano xy. Qual é o trabalho realizado pela força sobre o objeto quando ele se move da origem até o ponto cujo vetor posição é $(2{,}0\text{ m})\hat{\imath} - (4{,}0\text{ m})\hat{\jmath}$?

72 Na Fig. 7-47a, uma força de 2,0 N, que faz um ângulo θ para baixo e para a direita com a horizontal, é aplicada a um bloco de 4,0 kg enquanto o bloco desliza 1,0 m para a direita em um piso horizontal sem atrito. Escreva uma expressão para a velocidade v_f do bloco após ser percorrida essa distância, para uma velocidade inicial de (a) 0 e (b) 1,0 m/s para a direita. (c) A situação da Fig. 7-47b é semelhante à do item (b), pois o bloco está inicialmente se deslocando para a direita com uma velocidade de 1,0 m/s, mas agora a força de 2,0 N está dirigida para baixo e para a esquerda. Escreva uma expressão para a velocidade v_f do bloco após ser percorrida uma distância de 1,0 m. (d) Plote as três expressões de v_f em função do ângulo θ, de $\theta = 0$ a $\theta = 90°$. Interprete os gráficos.

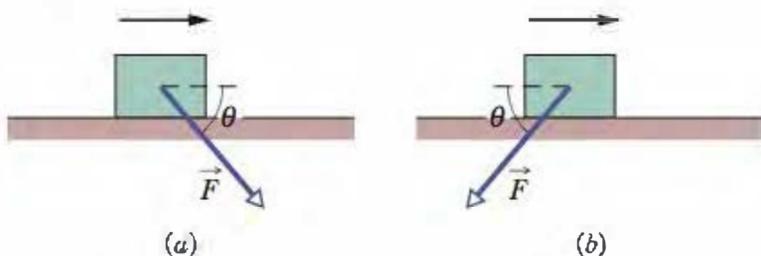



Figura 7-47 Problema 72.

73 Uma força $\vec{F}$ no sentido positivo de um eixo x age sobre um objeto que se move ao longo desse eixo. Se o módulo da força é $F = 10e^{-x/2{,}0}$ N, com x em metros, determine o trabalho realizado por $\vec{F}$ quando o objeto se desloca de $x = 0$ a $x = 2{,}0$ m (a) plotando $F(x)$ e estimando a área sob a curva e (b) integrando $F(x)$.

74 Uma partícula que se move em linha reta sofre um deslocamento retilíneo $\vec{d} = (8\text{ m})\hat{\imath} + c\hat{\jmath}$ sob a ação de uma força $\vec{F} = (2\text{N})\hat{\imath} - (4\text{N})\hat{\jmath}$. (Outras forças também agem sobre a partícula.) Qual é o valor de c se o trabalho realizado por $\vec{F}$ sobre a partícula é (a) zero, (b) positivo e (c) negativo?

75 Um elevador tem uma massa de 4500 kg e pode transportar uma carga máxima de 1800 kg. Se o elevador está subindo com a carga máxima a 3,80 m/s, que potência a força que move o elevador deve desenvolver para manter essa velocidade?

76 Um bloco de gelo de 45 kg desliza para baixo em um plano inclinado sem atrito de 1,5 m de comprimento e 0,91 m de altura. Um operário empurra o bloco para cima com uma força paralela ao plano inclinado, fazendo o bloco descer com velocidade constante. (a) Determine o módulo da força exercida pelo operário. Qual é o trabalho realizado sobre o bloco (b) pela força do operário, (c) pela força gravitacional, (d) pela força normal do plano inclinado e (e) pela força resultante?

77 Uma partícula que se move ao longo de um eixo x está submetida a uma força orientada no sentido positivo do eixo. A Fig. 7-48 mostra o módulo F da força em função da posição x da partícula. A curva é dada por $F = a/x^2$, com $a = 9{,}0\text{ N}\cdot\text{m}^2$. Determine o trabalho realizado pela força sobre a partícula quando a partícula se desloca de $x = 1{,}0$ m para $x = 3{,}0$ m (a) estimando o trabalho a partir do gráfico e (b) integrando a função da força.

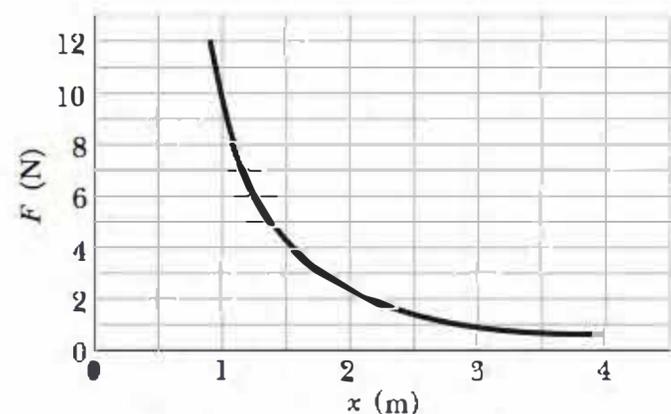



Figura 7-48 Problema 77.

78 Uma caixa de CD escorrega em um piso no sentido positivo de um eixo x enquanto uma força aplicada $\vec{F}_a$ age sobre a caixa. A força está orientada ao longo do eixo x e a componente x é dada por $F_{ax} = 9x - 3x^2$, com x em metros e F_{ax} em newtons. A caixa parte do repouso na posição $x = 0$ e se move até ficar novamente em repouso. (a) Plote o trabalho realizado por $\vec{F}_a$ sobre a caixa em função de x. (b) Em que posição o trabalho é máximo e (c) qual é o valor deste máximo trabalho? (d) Em que posição o trabalho se torna nulo? (e) Em que posição a caixa fica novamente em repouso?

79 Uma merendeira de 2,0 kg escorrega em uma superfície sem atrito no sentido positivo de um eixo x. A partir do instante $t = 0$, um vento constante aplica uma força à merendeira no sentido negativo do eixo x. A Fig. 7-49 mostra a posição x da merendeira em função do tempo t. A partir do gráfico, estime a energia cinética da merendeira (a) em $t = 1{,}0$ s e (b) em $t = 5{,}0$ s. (c) Qual é o trabalho realizado pelo vento sobre a merendeira entre $t = 1{,}0$ s e $t = 5{,}0$ s?

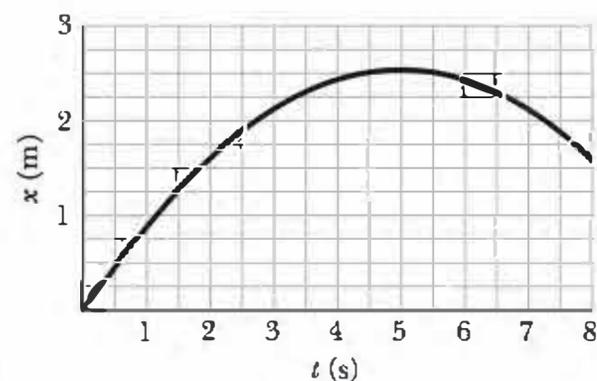



Figura 7-49 Problema 79.

80 *Integração numérica.* Uma caixa é deslocada ao longo de um eixo x de $x = 0{,}15$ m a $x = 1{,}20$ m por uma força cujo módulo é dado por $F = e^{-2x^2}$, com x em metros e F em newtons. Qual é o trabalho realizado pela força sobre a caixa?

CAPÍTULO

8 ENERGIA POTENCIAL E CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

8-1 O QUE É FÍSICA?

Uma das tarefas da física é identificar os diferentes tipos de energia que existem no mundo, especialmente os que têm utilidade prática. Um tipo comum de energia é a **energia potencial** U. Tecnicamente, energia potencial é qualquer energia que pode ser associada à configuração (arranjo) de um sistema de objetos que exercem forças uns sobre os outros.

Esta é uma definição muito formal para algo que na verdade é extremamente simples. Um exemplo pode ser mais esclarecedor que a definição. Um praticante de *bungee jump* salta de uma plataforma (Fig. 8-1). O sistema de objetos é formado pela Terra e o atleta. A força entre os objetos é a força gravitacional. A configuração do sistema varia (a distância entre o atleta e a Terra diminui, e isso, é claro, é que torna o salto emocionante). Podemos descrever o movimento do atleta e o aumento de sua energia cinética definindo uma **energia potencial gravitacional** U. Trata-se de uma energia associada ao estado de separação entre dois objetos que se atraem mutuamente através da força gravitacional, no caso o atleta e a Terra.

Figura 8-1 A energia cinética de um praticante de *bungee jump* aumenta durante a queda livre; em seguida, a corda começa a esticar, desacelerando o atleta. *(KOFUJIWARA/amana images/Getty Images News and Sport Services)*

Quando a corda elástica começa a esticar no final do salto, o sistema de objetos passa a ser formado pela corda e o atleta (a variação de energia potencial gravitacional passa a ser desprezível). A força entre os objetos é uma força elástica (como a de uma mola). A configuração do sistema varia (a corda estica). Podemos relacionar a diminuição da energia cinética do saltador ao aumento do comprimento da corda definindo uma **energia potencial elástica** U. Trata-se da energia associada ao estado de compressão ou distensão de um objeto elástico, a corda, no caso.

A física ensina como calcular a energia potencial de um sistema, o que ajuda a escolher a melhor forma de usá-la ou armazená-la. Antes que um praticante de *bungee jump* inicie um salto, por exemplo, alguém (provavelmente um engenheiro mecânico) precisa verificar se a corda que será usada é segura, determinando a energia potencial gravitacional e a energia potencial elástica que podem ser esperadas. Caso os cálculos sejam bem feitos, o salto pode ser emocionante, mas não fatal.

Trabalho negativo realizado pela força gravitacional

Trabalho positivo realizado pela força gravitacional

Figura 8-2 Um tomate é arremessado para cima. Enquanto sobe, a força gravitacional realiza um trabalho negativo sobre o tomate, diminuindo sua energia cinética. Quando desce, a força gravitacional realiza um trabalho positivo, aumentando a energia cinética do tomate.

8-2 Trabalho e Energia Potencial

No Capítulo 7, discutimos a relação entre o trabalho e a variação da energia cinética. Agora, vamos discutir a relação entre trabalho e a variação da energia potencial.

Suponha que um tomate seja arremessado para cima (Fig. 8-2). Já sabemos que, enquanto o tomate está subindo, o trabalho W_g realizado pela força gravitacional sobre o tomate é negativo porque a força extrai energia *da* energia cinética do tomate. Podemos agora concluir a história dizendo que essa energia é transferida pela força gravitacional da energia cinética do tomate *para* a energia potencial gravitacional do sistema tomate–Terra.

O tomate perde velocidade, para e começa a cair de volta por causa da força gravitacional. Durante a queda, a transferência se inverte: o trabalho W_g realizado sobre o tomate pela força gravitacional agora é positivo e a força gravitacional passa a transferir energia *da* energia potencial gravitacional do sistema tomate–Terra *para* a energia cinética do tomate.

Tanto na subida como na descida, a variação ΔU da energia potencial gravitacional é definida como o negativo do trabalho realizado sobre o tomate pela força gravitacional. Usando o símbolo geral W para o trabalho, podemos expressar essa definição através da seguinte equação:

$$\Delta U = -W. \tag{8-1}$$

Esta equação também se aplica a um sistema massa–mola como o da Fig. 8-3. Se empurramos bruscamente o bloco, movimentando-o para a direita, a força da mola atua para a esquerda e, portanto, realiza trabalho negativo sobre o bloco, transferindo energia da energia cinética do bloco para a energia potencial elástica do sistema bloco–mola. O bloco perde velocidade até parar; em seguida, começa a se mover para a esquerda, já que a força da mola ainda está dirigida para a esquerda. A partir desse momento, a transferência de energia se inverte: a energia passa a ser transferida da energia potencial do sistema bloco-mola para a energia cinética do bloco.

x
0
(a)

x
0
(b)

Figura 8-3 Um bloco, preso a uma mola e inicialmente em repouso em $x = 0$, é colocado em movimento para a direita. (*a*) Quando o bloco se move para a direita (no sentido indicado pela seta), a força elástica da mola realiza trabalho negativo sobre o bloco. (*b*) Mais tarde, quando o bloco se move para a esquerda, em direção ao ponto $x = 0$, a força da mola realiza trabalho positivo sobre o bloco.

Forças Conservativas e Dissipativas

Vamos fazer uma lista dos elementos principais das duas situações que acabamos de discutir:

1. O *sistema* é formado por dois ou mais objetos.
2. Uma *força* atua entre um objeto do sistema que se comporta como partícula (o tomate ou o bloco) e o resto do sistema.
3. Quando a configuração do sistema varia, a força realiza *trabalho* (W_1, digamos) sobre o objeto, transferindo energia cinética K do objeto para alguma outra forma de energia do sistema.
4. Quando a mudança da configuração se inverte, a força inverte o sentido da transferência de energia, realizando um trabalho W_2 no processo.

Nas situações em que a relação $W_1 = -W_2$ é sempre observada, a outra forma de energia é uma energia potencial e dizemos que a força é uma **força conservativa**. Como o leitor já deve ter desconfiado, a força gravitacional e a força elástica são conservativas (de outra forma, não poderíamos ter falado em energia potencial gravitacional e em energia potencial elástica, como fizemos anteriormente).

Uma força não conservativa é chamada de **força dissipativa**. A força de atrito cinético e a força de arrasto são forças dissipativas. Imagine, por exemplo, um bloco deslizando em um piso que não seja sem atrito. Durante o deslizamento, a força de atrito cinético exercida pelo piso realiza um trabalho negativo sobre o bloco, reduzindo sua velocidade e transferindo a energia cinética do bloco para outra forma de energia chamada de *energia térmica* (que está associada ao movimento aleatório de átomos e moléculas). Os experimentos mostram que esta transferência de energia não pode ser revertida (a energia térmica não pode ser convertida de volta em energia cinética do bloco pela força de atrito cinético). Assim, embora tenhamos um sistema (composto pelo bloco e pelo piso), uma força que atua entre partes do sistema e uma transferência de energia causada pela força, a força não é conservativa. Isso significa que a energia térmica não é uma energia potencial.

Quando um objeto que se comporta como uma partícula está sujeito apenas a forças conservativas, certos problemas que envolvem o movimento do objeto se tornam muito mais simples. Na próxima seção, em que apresentamos um método para identificar forças conservativas, será apresentado um exemplo deste tipo de simplificação.

8-3 Independência da Trajetória para o Trabalho de Forças Conservativas

O teste principal para determinar se uma força é conservativa ou dissipativa é o seguinte: deixa-se a força atuar sobre uma partícula que se move ao longo de um *percurso fechado*, começando em uma certa posição e retornando à mesma posição (ou seja, fazendo uma *viagem de ida e volta*). A força é conservativa se e apenas se a energia total transferida durante a viagem de ida e volta, ao longo deste ou de qualquer outro percurso fechado, for nula. Em outras palavras:

> O trabalho total realizado por uma força conservativa sobre uma partícula que se move ao longo de qualquer percurso fechado é nulo.

Sabemos, através de experimentos, que a força gravitacional passa neste *teste do percurso fechado*. Um exemplo é o tomate da Fig. 8-2. O tomate deixa o ponto de lançamento com velocidade v_0 e energia cinética $\frac{1}{2}mv_0^2$. A força gravitacional que age sobre o tomate reduz sua velocidade a zero e depois o faz cair de volta. Quando o tomate retorna ao ponto de partida, possui novamente uma velocidade v_0 e uma energia cinética $\frac{1}{2}mv_0^2$. Assim, a força gravitacional extrai tanta energia *do* tomate durante a subida quanto fornece energia *ao* tomate durante a descida. O trabalho total realizado sobre o tomate pela força gravitacional durante a viagem de ida e volta é, portanto, nulo.

Uma consequência importante do teste do percurso fechado é a seguinte:

> O trabalho realizado por uma força conservativa sobre uma partícula que se move entre dois pontos não depende da trajetória seguida pela partícula.

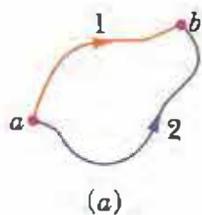
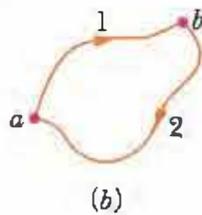
Suponha, por exemplo, que a partícula se move do ponto a para o ponto b da Fig. 8-4a seguindo a trajetória 1 ou da trajetória 2. Se todas as forças que agem sobre a

Se uma força é conservativa, o trabalho realizado pela força não depende da trajetória entre os pontos *a* e *b*.

E o trabalho realizado pela força em um percurso fechado é zero.

Figura 8-4 (*a*) Uma partícula pode se mover do ponto *a* ao ponto *b*, sob a ação de uma força conservativa, seguindo a trajetória 1 ou a trajetória 2. (*b*) A partícula descreve um percurso fechado, seguindo a trajetória 1 para ir do ponto *a* ao ponto *b* e a trajetória 2 para voltar ao ponto *a*.

partícula são conservativas, o trabalho realizado sobre a partícula é o mesmo para as duas trajetórias. Em símbolos, podemos escrever este resultado como

$$W_{ab,1} = W_{ab,2}, \quad (8\text{-}2)$$

onde o índice *ab* indica os pontos inicial e final, respectivamente, e os índices 1 e 2 indicam a trajetória.

Este resultado é importante porque permite simplificar problemas difíceis quando apenas uma força conservativa está envolvida. Suponha que você precise calcular o trabalho realizado por uma força conservativa ao longo de uma certa trajetória entre dois pontos e que o cálculo seja difícil ou mesmo impossível sem informações adicionais. Você pode determinar o trabalho substituindo a trajetória entre esses dois pontos por outra para a qual o cálculo seja mais fácil.

Demonstração da Equação 8-2

A Fig. 8-4*b* mostra um percurso fechado arbitrário de uma partícula sujeita à ação de uma única força. A partícula se desloca de um ponto inicial *a* para um ponto *b* seguindo a trajetória 1 e volta ao ponto *a* seguindo a trajetória 2. A força realiza trabalho sobre a partícula enquanto ela se desloca em cada uma das trajetórias. Sem nos preocuparmos em saber se o trabalho realizado é positivo ou negativo, vamos representar o trabalho realizado de *a* até *b* ao longo da trajetória 1 como $W_{ab,1}$ e o trabalho realizado de *b* até *a* ao longo da trajetória 2 como $W_{ba,2}$. Se a força é conservativa, o trabalho total realizado durante a viagem de ida e volta é zero:

$$W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0,$$

e, portanto,

$$W_{ab,1} = -W_{ba,2}. \quad (8\text{-}3)$$

Em palavras, o trabalho realizado ao longo da trajetória de ida é o negativo do trabalho realizado ao longo da trajetória de volta.

Consideremos agora o trabalho $W_{ab,2}$ realizado pela força sobre a partícula quando ela se move de *a* para *b* ao longo da trajetória 2 (Fig. 8-4*a*). Se a força é conservativa, este trabalho é o negativo de $W_{ba,2}$:

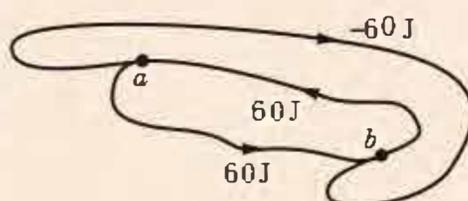
$$W_{ab,2} = -W_{ba,2}. \quad (8\text{-}4)$$

Substituindo $-W_{ba,2}$ por $W_{ab,2}$ na Eq. 8-3, obtemos

$$W_{ab,1} = W_{ab,2},$$

como queríamos demonstrar.

TESTE 1

A figura mostra três trajetórias ligando os pontos *a* e *b*. Uma única força $\vec{F}$ realiza o trabalho indicado sobre uma partícula que se move ao longo de cada trajetória no sentido indicado. Com base nessas informações, podemos afirmar que a força $\vec{F}$ é conservativa?

Exemplo

Trajetórias equivalentes para calcular o trabalho: queijo gorduroso

A Fig. 8-5*a* mostra um pedaço de 2,0 kg de queijo gorduroso que desliza por um trilho sem atrito do ponto *a* ao ponto *b*. O queijo percorre uma distância total de 2,0 m ao longo do trilho e uma distância vertical de 0,80 m. Qual é o trabalho realizado sobre o queijo pela força gravitacional durante o deslocamento?

IDEIAS-CHAVE

(1) *Não podemos* usar a Eq. 7-12 ($W_g = mgd \cos \phi$) para calcular o trabalho, já que o ângulo ϕ entre a força gravitacional $\vec{F}_g$ e o deslocamento $\vec{d}$ varia de ponto para ponto de forma desconhecida. (Mesmo que conhecêssemos a forma da trajetória e pudéssemos determinar o valor de ϕ para todos os pontos, o cálculo provavelmente seria muito difícil.) (2) Como $\vec{F}_g$ é uma força conservativa, podemos calcular o trabalho escolhendo outra trajetória entre *a* e *b* que torne os cálculos mais simples.

A força gravitacional é conservativa; o trabalho realizado não depende da trajetória.

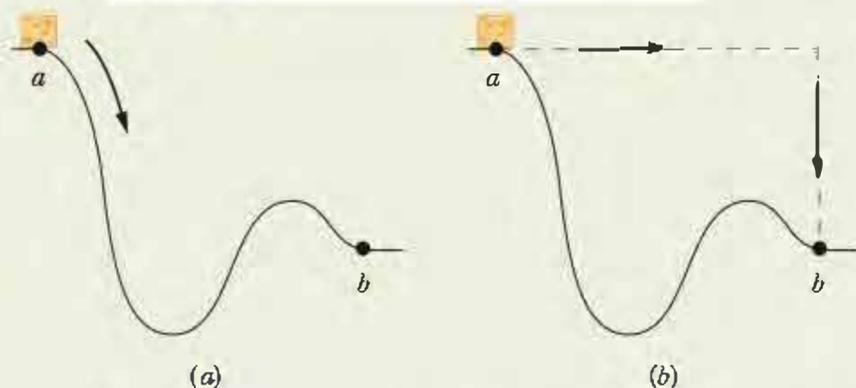



Figura 8-5 (*a*) Um pedaço de queijo desliza ao longo de uma superfície curva sem atrito do ponto *a* para o ponto *b*. (*b*) O trabalho realizado pela força gravitacional sobre o queijo é mais fácil de calcular para a trajetória tracejada do que para a trajetória real, mas o resultado é o mesmo nos dois casos.

Cálculos Vamos escolher o percurso tracejado da Fig. 8-5*b*, que é formado por dois segmentos de reta. Ao longo do segmento horizontal, o ângulo ϕ é constante e igual a 90°. Não conhecemos o deslocamento horizontal de *a* para *b*, mas, de acordo com a Eq. 7-12, o trabalho W_h realizado ao longo desse segmento é

$$W_h = mgd \cos 90° = 0.$$

No segmento vertical, o deslocamento *d* é 0,80 m e, com $\vec{F}_g$ e $\vec{d}$ apontando verticalmente para baixo, o ângulo ϕ é constante e igual a 0°. Assim, de acordo com a Eq. 7-12, o trabalho W_v realizado ao longo do trecho vertical do percurso tracejado é dado por

$$W_v = mgd \cos 0°$$
$$= (2{,}0 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2)(0{,}80 \text{ m})(1) = 15{,}7 \text{ J}.$$

O trabalho total realizado sobre o queijo por $\vec{F}_g$ quando o queijo se desloca do ponto *a* para o ponto *b* ao longo do percurso tracejado é, portanto,

$$W = W_h + W_v = 0 + 15{,}7 \text{ J} \approx 16 \text{ J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Este é também o trabalho realizado quando o queijo escorrega ao longo do trilho de *a* a *b*.

8-4 Cálculo da Energia Potencial

Os valores dos dois tipos de energia potencial discutidos neste capítulo, a energia potencial gravitacional e a energia potencial elástica, podem ser calculados com o auxílio de equações. Para chegar a essas equações, porém, precisamos obter primeiro uma relação geral entre uma força conservativa e a energia potencial a ela associada.

Considere um objeto que se comporta como uma partícula e que faz parte de um sistema no qual atua uma força conservativa $\vec{F}$. Quando essa força realiza um trabalho W sobre o objeto, a variação ΔU da energia potencial associada ao sistema é o negativo do trabalho realizado. Este fato é expresso pela Eq. 8-1 ($\Delta U = -W$). No caso mais geral em que a força varia com a posição, podemos escrever o trabalho W como na Eq. 7-32:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx. \qquad (8\text{-}5)$$

Esta equação permite calcular o trabalho realizado pela força quando o objeto se desloca do ponto x_i para o ponto x_f, mudando a configuração do sistema. (Como a força é conservativa, o trabalho é o mesmo para qualquer percurso entre os dois pontos.)

Substituindo a Eq. 8-5 na Eq. 8-1, descobrimos que a variação de energia potencial associada à mudança de configuração é dada pela seguinte equação:

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx. \tag{8-6}$$

Energia Potencial Gravitacional

Consideramos inicialmente uma partícula de massa m que se move verticalmente ao longo de um eixo y (com o sentido positivo para cima). Quando a partícula se move do ponto y_i para o ponto y_f, a força gravitacional $\vec{F}_g$ realiza trabalho sobre ela. Para determinar a variação correspondente da energia potencial gravitacional do sistema partícula–Terra, usamos a Eq. 8-6 com duas modificações: (1) Integramos ao longo do eixo y em vez do eixo x, já que a força gravitacional age na direção vertical. (2) Substituímos a força F por $-mg$, pois $\vec{F}_g$ possui módulo mg e está orientada no sentido negativo do y. Temos:

$$\Delta U = -\int_{y_i}^{y_f}(-mg)\,dy = mg\int_{y_i}^{y_f} dy = mg\Big[y\Big]_{y_i}^{y_f},$$

e, portanto,

$$\Delta U = mg(y_f - y_i) = mg\,\Delta y. \tag{8-7}$$

São apenas as *variações* ΔU da energia potencial gravitacional (ou de qualquer outro tipo de energia) que possuem significado físico. Entretanto, para simplificar um cálculo ou uma discussão, às vezes gostaríamos de dizer que um certo valor de energia potencial gravitacional U está associado a um certo sistema partícula–Terra quando a partícula está a uma certa altura y. Para isso, escrevemos a Eq. 8-7 na forma

$$U - U_i = mg(y - y_i). \tag{8-8}$$

e tomamos U_i como a energia potencial gravitacional do sistema quando o sistema se encontra em uma **configuração de referência** na qual a partícula está em um **ponto de referência** y_i. Normalmente, tomamos $U_i = 0$ e $y_i = 0$. Fazendo isso, a Eq. 8-8 se torna

$$U(y) = mgy \quad \text{(energia potencial gravitacional).} \tag{8-9}$$

Essa equação nos diz o seguinte:

A energia potencial gravitacional associada a um sistema partícula–Terra depende apenas da posição vertical y (ou altura) da partícula em relação à posição de referência $y = 0$.

Energia Potencial Elástica

Consideramos a seguir o sistema massa–mola da Fig. 8-3, com o bloco se movendo na extremidade de uma mola de constante elástica k. Enquanto o bloco se desloca do ponto x_i para o ponto x_f, a força elástica $F_x = -kx$ realiza trabalho sobre o bloco. Para determinar a variação correspondente da energia potencial elástica do sistema bloco-mola, substituímos $F(x)$ por $-kx$ na Eq. 8-6, obtendo

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f}(-kx)\,dx = k\int_{x_i}^{x_f} x\,dx = \tfrac{1}{2}k\Big[x^2\Big]_{x_i}^{x_f},$$

ou

$$\Delta U = \tfrac{1}{2}kx_f^2 - \tfrac{1}{2}kx_i^2. \tag{8-10}$$

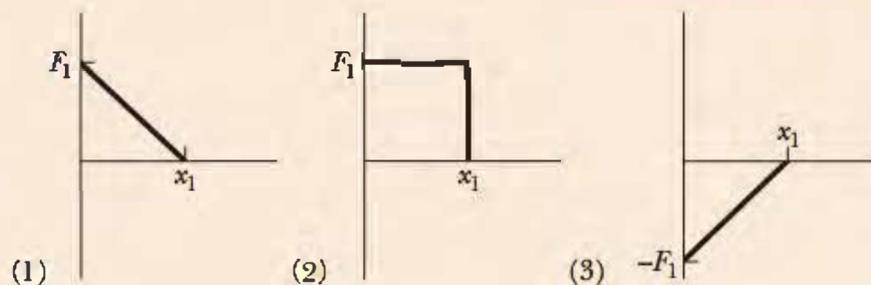
Para associar um valor de energia potencial U ao bloco na posição x, escolhemos a configuração de referência como aquela na qual a mola se encontra no estado relaxado e o bloco está em $x_i = 0$. Nesse caso, a energia potencial elástica U_i é zero e a Eq. 8-10 se torna

$$U - 0 = \tfrac{1}{2}kx^2 - 0,$$

o que nos dá

$$U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2 \quad \text{(energia potencial elástica)}. \tag{8-11}$$

TESTE 2

Uma partícula se move ao longo de um eixo x de $x = 0$ para $x = x_1$ enquanto uma força conservativa, orientada ao longo do eixo x, atua sobre a partícula. A figura mostra três situações nas quais a força varia com x. A força possui o mesmo módulo máximo F_1 nas três situações. Ordene as situações de acordo com a variação da energia potencial associada ao movimento da partícula, começando pela mais positiva.

Exemplo

Escolha do nível de referência para a energia potencial gravitacional de uma preguiça

Uma preguiça de 2,0 kg está pendurada a 5,0 m acima do solo (Fig. 8-6).

(a) Qual é a energia potencial gravitacional U do sistema preguiça–Terra se tomarmos o ponto de referência $y = 0$ como estando (1) no do solo, (2) no piso de uma varanda que está a 3,0 m acima do solo, (3) no galho onde está a preguiça e (4) 1,0 m acima do galho? Considere a energia potencial como nula em $y = 0$.

IDEIA-CHAVE

Uma vez escolhido o ponto de referência para $y = 0$, podemos calcular a energia potencial gravitacional U do sistema *em relação a esse ponto de referência* usando a Eq. 8-9.

Cálculos No caso da opção (1), a preguiça está em $y = 5{,}0$ m e

$$U = mgy = (2{,}0\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)(5{,}0\text{ m}) = 98\text{ J}. \quad \text{(Resposta)}$$

Para as outras escolhas, os valores de U são

(2) $U = mgy = mg(2{,}0\text{ m}) = 39\text{ J}$,

(3) $U = mgy = mg(0) = 0\text{ J}$,

(4) $U = mgy = mg(-1{,}0\text{ m}) = -19{,}6\text{ J} \approx -20\text{ J}$. (Resposta)

(b) A preguiça desce da árvore. Para cada escolha do ponto de referência, qual é a variação ΔU da energia potencial do sistema preguiça–Terra?

IDEIA-CHAVE

A *variação* da energia potencial não depende da escolha do ponto de referência, mas apenas de Δy, a variação de altura.

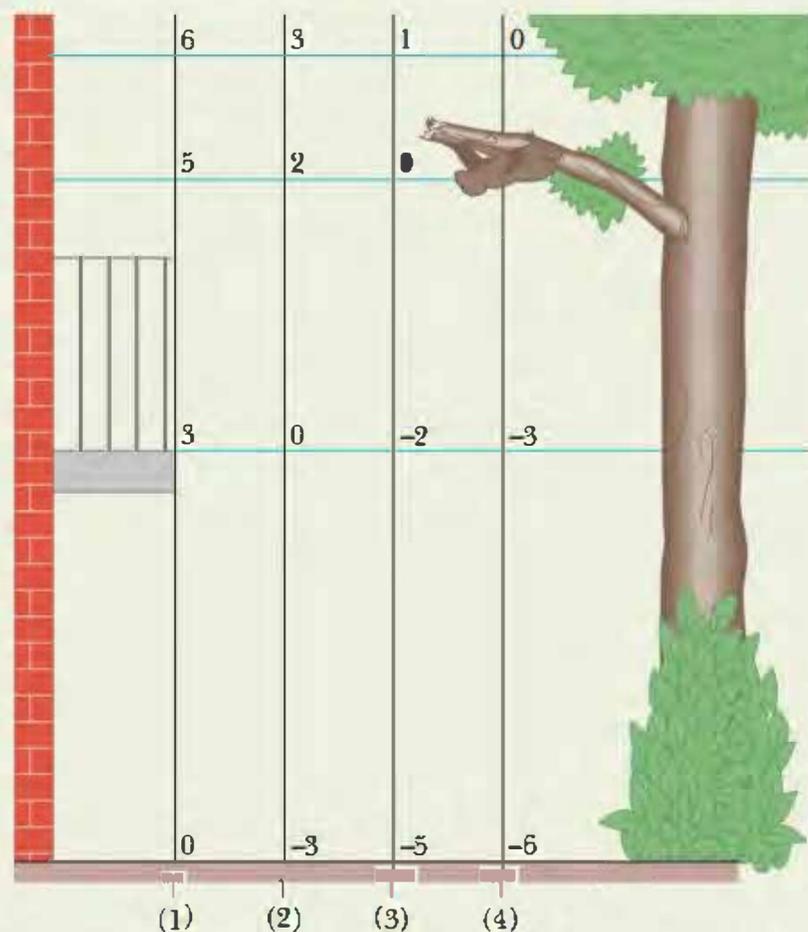



Figura 8-6 Quatro escolhas para o ponto de referência $y = 0$. Em cada eixo y estão assinalados alguns valores da altura em metros. A escolha afeta o valor da energia potencial U do sistema preguiç a-Terra, mas não a variação ΔU da energia potencial do sistema se a preguiça se mover, descendo da árvore, por exemplo.

Cálculo Nas quatro situações, temos o mesmo valor, $\Delta y = -5{,}0$ m. Assim, para as situações (1) a (4), de acordo com a Eq. 8-7,

$$\Delta U = mg\,\Delta y = (2{,}0\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)(-5{,}0\text{ m}) = -98\text{ J}. \quad \text{(Resposta)}$$

8-5 Conservação da Energia Mecânica

A **energia mecânica** E_{mec} de um sistema é a soma da energia potencial U do sistema com a energia cinética K dos objetos que compõem o sistema:

$$E_{mec} = K + U \quad \text{(energia mecânica).} \tag{8-12}$$

Nesta seção, vamos discutir o que acontece com esta energia mecânica quando as transferências de energia dentro do sistema são produzidas apenas por forças conservativas, ou seja, quando os objetos do sistema não estão sujeitos a forças de atrito e de arrasto. Além disso, vamos supor que o sistema está *isolado* do ambiente, isto é, que nenhuma *força externa* produzida por um objeto fora do sistema causa variações de energia dentro do sistema.

Quando uma força conservativa realiza um trabalho W sobre um objeto dentro do sistema, essa força é responsável por uma transferência de energia entre a energia cinética K do objeto e a energia potencial U do sistema. De acordo com a Equação 7-10, a variação ΔK da energia cinética é

$$\Delta K = W \tag{8-13}$$

e, de acordo com a Eq. 8-1, a variação ΔU da energia potencial é

$$\Delta U = -W. \tag{8-14}$$

Combinando as Eqs. 8-13 e 8-14, temos:

$$\Delta K = -\Delta U. \tag{8-15}$$

Em palavras, uma dessas energias aumenta exatamente da mesma quantidade que a outra diminui.

Podemos escrever a Eq. 8-15 na forma

$$K_2 - K_1 = -(U_2 - U_1), \tag{8-16}$$

onde os índices se referem a dois instantes diferentes e, portanto, a duas configurações distintas dos objetos do sistema. Reagrupando os termos da Eq. 8-16, obtemos a seguinte equação:

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1 \quad \text{(conservação da energia mecânica).} \tag{8-17}$$

Em palavras, esta equação diz o seguinte:

$$\begin{pmatrix}\text{soma de } K \text{ e } U \text{ para qualquer}\\ \text{estado do sistema}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{soma de } K \text{ e } U \text{ para qualquer}\\ \text{outro estado do sistema}\end{pmatrix},$$

quando o sistema é isolado e apenas forças conservativas atuam sobre os objetos do sistema. Em outras palavras:

> Em um sistema isolado no qual apenas forças conservativas causam variações de energia, a energia cinética e a energia potencial podem variar, mas a soma das duas energias, a energia mecânica E_{mec} do sistema, não pode variar.

Este resultado é conhecido como **princípio de conservação da energia mecânica**. (Agora você pode entender a origem do nome *força conservativa*.) Com o auxílio da Eq. 8-15, podemos escrever este princípio de outra forma:

$$\Delta E_{mec} = \Delta K + \Delta U = 0. \tag{8-18}$$

O princípio de conservação da energia mecânica permite resolver problemas que seriam muito difíceis de solucionar usando apenas as leis de Newton:

> Quando a energia mecânica de um sistema é conservada, podemos igualar a soma da energia cinética com a energia potencial em um instante à soma em outro instante *sem levar em conta o movimento intermediário e sem calcular o trabalho realizado pelas forças envolvidas.*

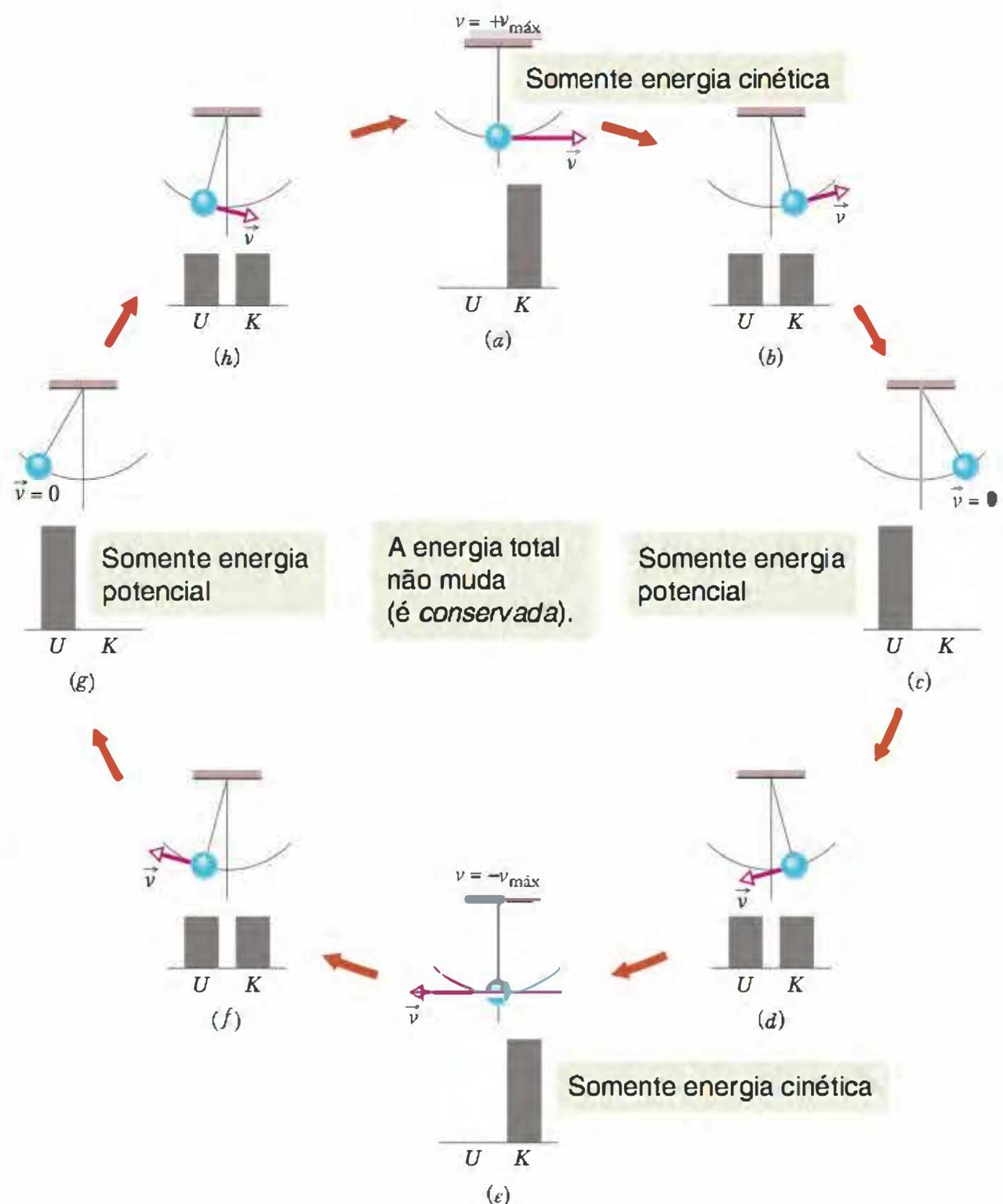
No passado, costumava-se arremessar as pessoas para o alto, usando um cobertor, para que pudessem enxergar mais longe. Hoje em dia, isso é feito apenas por diversão. Durante a subida da pessoa que aparece na fotografia, a energia é transferida da energia cinética para energia potencial gravitacional. A altura máxima é atingida quando a transferência se completa. Durante a queda, a transferência ocorre no sentido inverso. *(©AP/Wide World Photos)*

A Fig. 8-7 mostra um exemplo no qual o princípio de conservação da energia mecânica pode ser aplicado. Quando um pêndulo oscila, a energia do sistema pêndulo–Terra é transferida da energia cinética K para a energia potencial gravitacional U e vice-versa, com a soma $K + U$ permanecendo constante. Se conhecemos a energia potencial gravitacional quando o peso do pêndulo está no ponto mais alto (Fig. 8-7*c*), a Eq. 8-17 nos fornece a energia cinética do peso no ponto mais baixo (Fig. 8-7*e*).

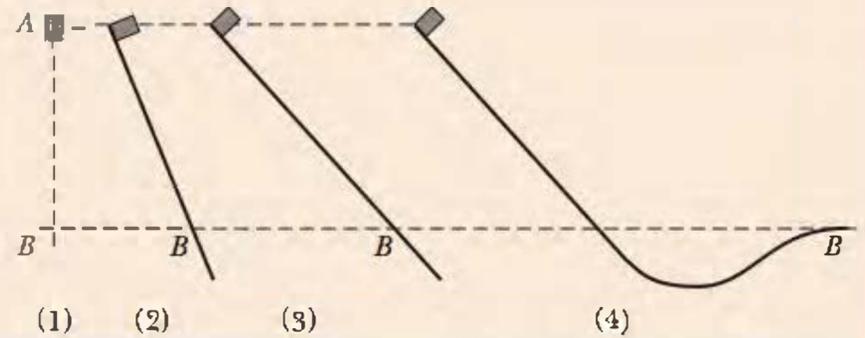
Vamos, por exemplo, escolher o ponto mais baixo como ponto de referência, com a energia potencial gravitacional $U_2 = 0$. Suponha que a energia potencial no ponto mais alto seja $U_1 = 20$ J em relação ao ponto de referência. Como o peso se imobiliza momentaneamente ao atingir o ponto mais alto, a energia cinética nesse ponto é $K_1 = 0$. Substituindo estes valores na Eq. 8-17, obtemos a energia cinética K_2 no ponto mais baixo:

$$K_2 + 0 = 0 + 20\text{ J} \quad \text{ou} \quad K_2 = 20\text{ J}.$$

Observe que obtivemos este resultado sem considerar o movimento entre os pontos mais baixo e mais alto (como na Fig. 8-7*d*) e sem determinar o trabalho realizado pelas forças responsáveis pelo movimento.

Figura 8-7 Um pêndulo, com a massa concentrada em um peso na extremidade inferior, oscila de um lado para o outro. É mostrado um ciclo completo do movimento. Durante o ciclo, os valores da energia potencial e cinética do sistema pêndulo-Terra variam quando o peso sobe e desce, mas a energia mecânica E_{mec} do sistema permanece constante. Pode-se dizer que a energia E_{mec} alterna continuamente entre as formas de energia cinética e energia potencial. Nas posições (*a*) e (*e*), toda a energia está na forma de energia cinética; o peso tem velocidade máxima e se encontra no ponto mais baixo de sua trajetória. Nas posições (*c*) e (*g*), toda a energia está na forma de energia potencial; o peso tem velocidade nula e se encontra no ponto mais alto da trajetória. Nas posições (*b*), (*d*), (*f*) e (*h*), metade da energia é energia cinética e a outra metade é energia potencial. Se a oscilação do pêndulo envolvesse uma força de atrito no ponto onde o pêndulo está preso ao teto ou uma força de arrasto devido ao ar, E_{mec} não seria conservada e o pêndulo acabaria parando.

TESTE 3

A figura mostra quatro situações: uma na qual um bloco inicialmente em repouso é deixado cair e três outras nas quais o bloco desce deslizando em rampas sem atrito. (a) Ordene as situações de acordo com a energia cinética do bloco no ponto B, em ordem decrescente. (b) Ordene as situações de acordo com a velocidade do bloco no ponto B, em ordem decrescente.

A B B B B
(1) (2) (3) (4)

Exemplo

Conservação de energia mecânica em um toboágua

Na Fig. 8-8, uma criança de massa m parte do repouso no alto de um toboágua, a uma altura h = 8,5 m acima da base do brinquedo. Supondo que a presença da água torna o atrito desprezível, determine a velocidade da criança ao chegar à base do brinquedo.

IDEIAS-CHAVE

(1) Não podemos calcular a velocidade da criança usando a aceleração durante o percurso, como fizemos em capítulos anteriores, porque não conhecemos a inclinação (ângulo) do toboágua. Entretanto, como a velocidade está relacionada à energia cinética, talvez possamos usar o princípio da conservação da energia mecânica para calcular a velocidade da criança. Nesse caso, não precisaríamos conhecer a inclinação do brinquedo. (2) A energia mecânica é conservada em um sistema *se* o sistema é isolado e *se* as transferências de energia dentro do sistema são causadas apenas por forças conservativas. Vamos verificar.

Forças Duas forças atuam sobre a criança. A *força gravitacional*, que é uma força conservativa, realiza trabalho sobre a criança. A *força normal* exercida pelo toboágua sobre a criança não realiza trabalho, pois a direção dessa força em qualquer ponto da descida é sempre perpendicular à direção em que a criança se move.

Sistema Como a única força que realiza trabalho sobre a criança é a força gravitacional, escolhemos o sistema

A energia mecânica total em cima é igual à energia mecânica total embaixo.
h

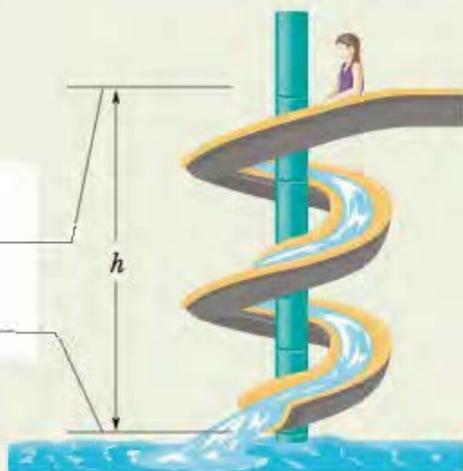



Figura 8-8 Uma criança desce uma altura h escorregando em um toboágua.

criança–Terra como o nosso sistema, que podemos considerar isolado.

Assim, temos apenas uma força conservativa realizando trabalho em um sistema isolado e, portanto, podemos usar o princípio de conservação da energia mecânica.

Cálculos Seja $E_{mec,a}$ a energia mecânica quando a criança está no alto do toboágua e $E_{mec,b}$ a energia mecânica quando a criança está na base. Nesse caso, de acordo com o princípio da conservação da energia mecânica,

$$E_{mec,b} = E_{mec,a}. \qquad (8\text{-}19)$$

Explicitando os dois tipos de energia mecânica, escrevemos

$$K_b + U_b = K_a + U_a, \qquad (8\text{-}20)$$

ou

$$\tfrac{1}{2}mv_b^2 + mgy_b = \tfrac{1}{2}mv_a^2 + mgy_a.$$

Dividindo a equação por m e reagrupando os termos, temos:

$$v_b^2 = v_a^2 + 2g(y_a - y_b).$$

Fazendo $v_a = 0$ e $y_a - y_b = h$, temos:

$$v_b = \sqrt{2gh} = \sqrt{(2)(9{,}8\ \text{m/s}^2)(8{,}5\ \text{m})}$$
$$= 13\ \text{m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Esta é a mesma velocidade que a criança teria se caísse verticalmente de uma altura de 8,5 m. Em um brinquedo de verdade, haveria algum atrito e a criança chegaria à base com uma velocidade um pouco menor.

Comentários Embora este problema seja difícil de ser resolvido aplicando diretamente as leis de Newton, o uso da conservação da energia mecânica torna a solução bem simples. Entretanto, se alguém quer saber qual é o tempo que a criança leva para chegar à base do toboágua, os métodos baseados em energia são inúteis; precisaríamos conhecer a forma exata do toboágua e, mesmo assim, teríamos um problema muito difícil pela frente.

8-6 Interpretação de uma Curva de Energia Potencial

Mais uma vez vamos considerar uma partícula pertencente a um sistema no qual atua uma força conservativa. Desta vez supomos que o movimento da partícula se dá ao longo de um eixo x enquanto uma força conservativa realiza trabalho sobre ela. Podemos obter muitas informações a respeito do movimento da partícula a partir do gráfico da energia potencial do sistema em função da posição da partícula, $U(x)$. Antes de discutir este tipo de gráfico, porém, precisamos de mais uma relação.

Cálculo da Força

A Eq. 8-6 pode ser usada para calcular a variação ΔU da energia potencial entre dois pontos em uma situação unidimensional a partir da força $F(x)$. Agora estamos interessados em fazer o contrário, ou seja, calcular a força a partir da função energia potencial $U(x)$.

No caso do movimento em uma dimensão, o trabalho W realizado por uma força que age sobre uma partícula quando a partícula percorre uma distância Δx é $F(x)$ Δx. Nesse caso, a Eq. 8-1 pode ser escrita na forma

$$\Delta U(x) = -W = -F(x)\,\Delta x. \tag{8-21}$$

Explicitando $F(x)$ e fazendo o acréscimo Δx tender a zero, temos:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad \text{(movimento em uma dimensão)}, \tag{8-22}$$

que é a equação procurada.

Podemos verificar se este resultado está correto fazendo $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, que é a função energia potencial elástica associada a uma força elástica. Nesse caso, o uso da Eq. 8-22 leva, como seria de se esperar, à equação $F(x) = -kx$, que é a lei de Hooke. Da mesma forma, podemos fazer $U(x) = mgx$, que é a energia potencial gravitacional de um sistema partícula–Terra, com uma partícula de massa m a uma altura x acima da superfície da Terra. Nesse caso, a Eq. 8-22 nos dá $F = -mg$, que é a força gravitacional a que a partícula está submetida.

A Curva de Energia Potencial

A Fig. 8-9*a* é um gráfico de uma função energia potencial $U(x)$ para um sistema no qual uma partícula se move em uma dimensão enquanto uma força conservativa $F(x)$ realiza trabalho sobre ela. Podemos facilmente calcular $F(x)$ determinando (graficamente) a inclinação da curva de $U(x)$ em vários pontos. [De acordo com a Eq. 8-22, $F(x)$ é o negativo da inclinação da curva $U(x)$.] A Fig. 8-9*b* é um gráfico de $F(x)$ obtido desta forma.

Pontos de Retorno

A energia mecânica E de um sistema com o da Fig. 8-9 tem um valor constante dado por

$$U(x) + K(x) = E_{mec}. \tag{8-23}$$

onde a energia potencial $U(x)$ e a energia cinética $K(x)$ são funções da posição x da partícula. Podemos reescrever a Eq. 8-23 na forma

$$K(x) = E_{mec} - U(x). \tag{8-24}$$

Suponha que E_{mec} (que, como sabemos, tem um valor constante) seja, por exemplo, igual a 5,0 J. Este valor pode ser representado na Fig. 8-9*a* por uma reta horizontal que intercepta o eixo da energia no ponto correspondente a 5,0 J. (A reta é mostrada na figura.)

(a) Este é um gráfico da energia potencial U em função da posição x.

(b) A força é igual ao negativo da inclinação do gráfico de $U(x)$.

Força maior no sentido $+x$

Força maior no sentido $-x$

(c) A reta horizontal representa um valor dado da energia mecânica total E_{mec}.

$E_{mec} = 5{,}0$ J

(d) A diferença entre a energia total e a energia potencial é a energia cinética K.

(e) Nesta posição, K é zero (*ponto de retorno*). A partícula não pode prosseguir para a esquerda.

Nesta posição, K é máxima e a velocidade da partícula também é máxima.

$K = 5{,}0$ J em x_2

$K = 1{,}0$ J em $x > x_5$

(f) Para esses três valores de E_{mec}, a partícula fica aprisionada (não pode escapar nem para a direita nem para a esquerda).

Figura 8-9 (*a*) Gráfico de $U(x)$, a função energia potencial de um sistema com uma partícula que se move ao longo de um eixo x. Como não existe atrito, a energia mecânica é conservada. (*b*) Gráfico da força $F(x)$ que age sobre a partícula, obtido a partir do gráfico da energia potencial determinando a inclinação do gráfico em vários pontos. (*c*)-(*e*) Como determinar a energia cinética. (*f*) O mesmo gráfico de (*a*), com três possíveis valores de E_{mec}.

Podemos usar a Eq. 8-24 e a Fig. 8-9*d* para determinar a energia cinética K correspondente a qualquer localização x da partícula a partir do gráfico de $U(x)$. Para isso, determinamos, na curva de $U(x)$, o valor de U para essa localização x e, em seguida, subtraímos U de E_{mec}. Na Fig. 8-9*e*, por exemplo, se a partícula se encontra em qualquer ponto à direita de x_5, $K = 1{,}0$ J. O valor de K é máximo (5,0 J) quando a partícula está em x_2 e mínimo (0 J) quando a partícula está em x_1.

Como K não pode ser negativa (pois v^2 é necessariamente um número positivo), a partícula não pode passar para a região à esquerda de x_1, na qual $E_{mec} - U$ é um número negativo. Quando a partícula se move a partir de x_2 em direção a x_1, K diminui (a velocidade da partícula diminui) até que $K = 0$ em $x = x_1$ (a velocidade da partícula se anula).

Observe que quando a partícula chega a x_1, a força que age sobre a partícula, dada pela Eq. 8-22, é positiva (pois a derivada dU/dx é negativa). Isso significa que a partícula não fica parada em x_1, mas começa a se mover para a direita, invertendo seu movimento. Assim, x_1 é um **ponto de retorno,** um lugar onde $K = 0$ (já que $U = E$) e a partícula inverte o sentido de movimento. Não existe ponto de retorno (em que $K = 0$) no lado direito do gráfico. Quando a partícula se desloca para a direita, ela continua a se mover indefinidamente neste sentido.

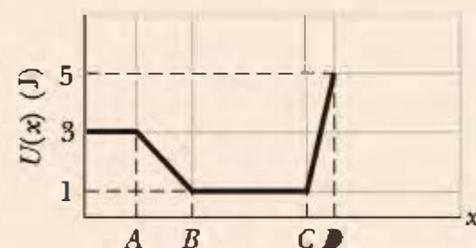
Pontos de Equilíbrio

A Fig. 8-9*f* mostra três valores diferentes de E_{mec} superpostos ao gráfico da função energia potencial $U(x)$ da Fig. 8-9*a*. Vejamos como esses valores alteram a situação. Se $E_{mec} = 4{,}0$ J (reta violeta), o ponto de retorno muda de x_1 para um ponto entre x_1 e x_2. Além disso, em qualquer ponto à direita de x_5, a energia mecânica do sistema é igual à energia potencial; assim, a partícula não possui energia cinética e (de acordo com a Eq. 8-22) nenhuma força atua sobre a mesma, de modo que permanece em repouso. Diz-se que uma partícula nesta situação está em **equilíbrio neutro**. (Uma bola de gude sobre uma mesa horizontal é um exemplo deste tipo de equilíbrio.)

Se $E_{mec} = 3{,}0$ J (reta cor-de-rosa), existem dois pontos de retorno, um entre x_1 e x_2 e o outro entre x_4 e x_5. Além disso, x_3 é um terceiro ponto no qual $K = 0$. Se a partícula estiver exatamente neste ponto, a força sobre ela também será nula e a partícula permanecerá em repouso. Entretanto, se a partícula for ligeiramente deslocada em qualquer sentido, uma força a empurrará no mesmo sentido e a partícula continuará a se mover, afastando-se cada vez mais do ponto inicial. Diz-se que uma partícula nesta situação está em **equilíbrio instável**. (Uma bola de gude equilibrada no alto de uma bola de boliche é um exemplo deste tipo de equilíbrio.)

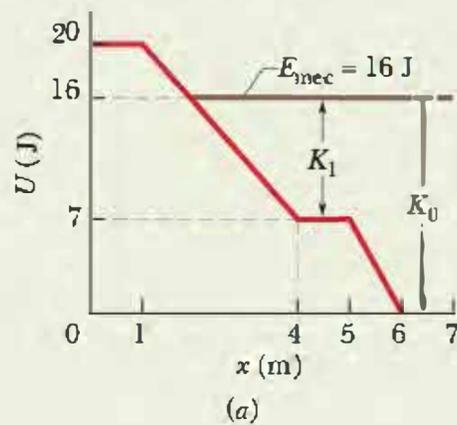
Considere agora o comportamento da partícula se $E_{mec} = 1{,}0$ J (reta verde). Se a partícula é colocada em x_4, fica indefinidamente nessa posição. Ela não pode se mover nem para a direita nem para a esquerda, pois para isso seria necessária uma energia cinética negativa. Se a empurramos ligeiramente para a esquerda ou para a direita, surge uma força restauradora que a faz retornar ao ponto x_4. Diz-se que uma partícula nesta situação está em **equilíbrio estável**. (Uma bola de gude no fundo de uma tigela hemisférica é um exemplo deste tipo de equilíbrio.) Se colocarmos a partícula no *poço de potencial* em forma de taça com centro em x_2, ela estará entre dois pontos de retorno. Poderá se mover, mas apenas entre x_1 e x_3.

TESTE 4

A figura mostra a função energia potencial $U(x)$ de um sistema no qual uma partícula se move em uma dimensão. (a) Ordene as regiões AB, BC e CD de acordo com o módulo da força que age sobre a partícula, em ordem decrescente. (b) Qual é o sentido da força quando a partícula está na região AB?

Exemplo

Interpretação de um gráfico de energia potencial

Uma partícula de 2,00 kg se move ao longo de um eixo x, em um movimento unidimensional, sob a ação de uma força conservativa. A Fig. 8-10a mostra a energia potencial $U(x)$ associada à força. De acordo com o gráfico, se a partícula for colocada em qualquer posição entre $x = 0$ e $x = 7{,}00$ m, terá o valor indicado de U. Em $x = 6{,}5$ m, a velocidade da partícula é $\vec{v}_0 = (-4{,}00 \text{ m/s})\hat{\text{i}}$.

(a) Use os dados da Fig. 8-10a para determinar a velocidade da partícula em $x_1 = 4{,}5$ m.

IDEIAS-CHAVE

(1) A energia cinética da partícula é dada pela Eq. 7-1 ($K = \frac{1}{2}mv^2$). (2) Como apenas uma força conservativa age sobre a partícula, a energia mecânica E_{mec} ($= K + U$) é conservada quando a partícula se move. (3) Assim, em um gráfico de $U(x)$ como o da Fig. 8-10a, a energia cinética é igual à diferença entre E_{mec} e U.

Cálculos Em $x = 6{,}5$, a energia cinética da partícula é dada por

$$K_0 = \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \tfrac{1}{2}(2{,}00 \text{ kg})(4{,}00 \text{ m/s})^2$$
$$= 16{,}0 \text{ J}.$$

Como a energia potencial neste ponto é $U = 0$, a energia mecânica é

$$E_{mec} = K_0 + U_0 = 16{,}0 \text{ J} + 0 = 16{,}0 \text{ J}.$$

Este valor de E_{mec} está plotado como uma reta horizontal na Fig. 8-10a. Como se pode ver na figura, em $x = 4{,}5$ m a energia potencial é $U_1 = 7{,}0$ J. A energia cinética K_1 é a diferença entre E_{mec} e U_1:

$$K_1 = E_{mec} - U_1 = 16{,}0 \text{ J} - 7{,}0 \text{ J} = 9{,}0 \text{ J}.$$

Como $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$, temos:

$$v_1 = 3{,}0 \text{ m/s}. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a localização do ponto de retomo da partícula?

IDEIA-CHAVE

O ponto de retomo é o ponto em que a força anula momentaneamente e depois inverte o movimento da partícula. Nesse ponto, $v = 0$ e, portanto, $K = 0$.

Cálculos Como K é a diferença entre E_{mec} e U, estamos interessados em determinar o ponto da Fig. 8-10a em que o gráfico de U encontra a reta horizontal de E_{mec}, como mostra a Fig. 8-10b. Como o gráfico de U é uma linha reta na Fig. 8-10b, podemos traçar dois triângulos retângulos semelhantes e usar o fato de que a razão entre os catetos é a mesma nos dois triângulos:

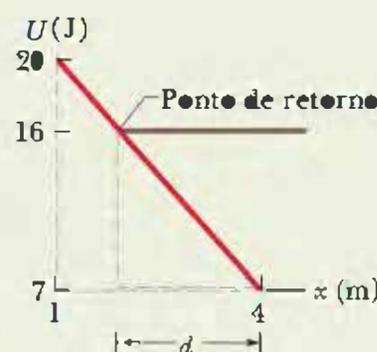



Figura 8-10 (a) Gráfico da energia potencial U em função da posição x. (b) Parte do gráfico usada para determinar o ponto de retomo da partícula.

$$\frac{16 - 7{,}0}{d} = \frac{20 - 7{,}0}{4{,}0 - 1{,}0},$$

o que nos dá $d = 2{,}08$ m. Assim, o ponto de retomo está localizado em

$$x = 4{,}0 \text{ m} - d = 1{,}9 \text{ m}. \quad \text{(Resposta)}$$

(c) Determine a força que age sobre a partícula quando ela se encontra na região 1,9 m $< x <$ 4,0 m.

IDEIA-CHAVE

A força é dada pela Eq. 8-22 [$F(x) = -dU(x)/dx$]. De acordo com a equação, a força é o negativo da inclinação da curva de $U(x)$.

Cálculos Examinando o gráfico da Fig. 8-10b, vemos que na região 1,0 m $< x <$ 4,0 m a força é

$$F = -\frac{20 \text{ J} - 7{,}0 \text{ J}}{1{,}0 \text{ m} - 4{,}0 \text{ m}} = 4{,}3 \text{ N}. \quad \text{(Resposta)}$$

Assim, a força tem módulo 4,3 N e está orientada no sentido positivo do eixo x. Este resultado é coerente com o fato de que a partícula, que inicialmente está se movendo para a esquerda, é freada pela força e depois passa a se mover para a direita.

Sistema

W positivo

(*a*)

Sistema

W negativo

(*b*)

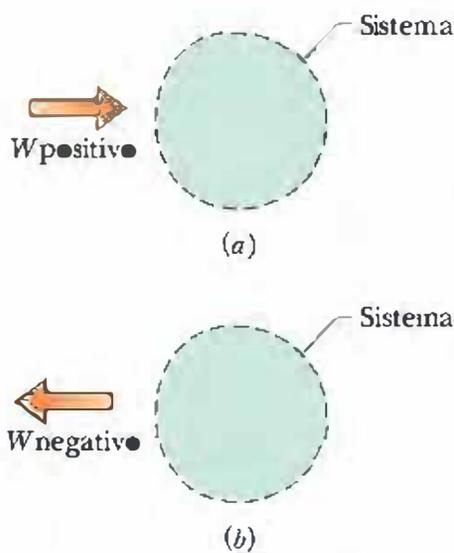



Figura 8-11 (*a*) O trabalho positivo W realizado sobre um sistema corresponde a uma transferência de energia para o sistema. (*b*) O trabalho negativo W corresponde a uma transferência de energia para fora do sistema.

8-7 Trabalho Realizado por uma Força Externa sobre um Sistema

No Capítulo 7, definimos o trabalho como a energia transferida para um objeto ou de um objeto através de uma força que age sobre o sistema. Podemos agora estender essa definição para uma força externa que age sobre um sistema de objetos.

> Trabalho é a energia transferida para um sistema ou de um sistema através de uma força externa que age sobre o sistema.

A Fig. 8-11*a* mostra um trabalho positivo (uma transferência de energia *para* um sistema) e a Fig. 8-11*b* mostra um trabalho negativo (uma transferência de energia *de* um sistema). Quando mais de uma força age sobre um sistema, o *trabalho total* dessas forças é igual à energia transferida para o sistema ou retirada do sistema.

Essas transferências são semelhantes à movimentação de dinheiro em uma conta bancária através de depósitos e saques. Se um sistema contém uma única partícula ou um único objeto que se comporta como uma partícula, como no Capítulo 7, o trabalho realizado por uma força sobre o sistema pode mudar apenas a energia cinética do sistema. Essa mudança é governada pelo teorema do trabalho e energia cinética expresso pela Eq. 7-10 ($\Delta K = W$), ou seja, uma partícula isolada possui um único tipo de energia na conta, a energia cinética. Forças externas podem apenas transferir energia para essa conta ou retirar energia dessa conta. Se um sistema é mais complicado, porém, uma força externa pode alterar outras formas de energia (como a energia potencial), ou seja, um sistema mais complexo pode ter várias contas de energia.

Vamos examinar as trocas de energia nesses sistemas mais complexos tomando como exemplo duas situações básicas, uma que não envolve o atrito e outra que envolve o atrito.

Sem Atrito

Em uma competição de arremesso de bolas de boliche, você se agacha e coloca as mãos em concha debaixo da bola. Em seguida, levanta-se rapidamente e ao mesmo tempo levanta os braços, lançando a bola quando as mãos atingem o nível do rosto. Durante o movimento para cima, a força que você aplica à bola obviamente realiza trabalho. Trata-se de uma força externa à bola que transfere energia, mas para que sistema?

Para responder a essa pergunta, vamos verificar quais são as energias que mudam. Há uma variação ΔK da energia cinética da bola e, como a bola e a Terra ficaram mais afastadas uma da outra, há também uma variação ΔU da energia potencial gravitacional do sistema bola–Terra. Para levar em conta as duas variações, é preciso considerar o sistema bola–Terra. Assim, a força que você aplica é uma força externa que realiza trabalho sobre o sistema bola–Terra e esse trabalho é dado por

$$W = \Delta K + \Delta U, \tag{8-25}$$

ou

$$W = \Delta E_{mec} \quad \text{(trabalho realizado sobre um sistema sem atrito)}, \tag{8-26}$$

onde ΔE_{mec} é a variação da energia mecânica do sistema. Essas duas equações, que estão representadas na Fig. 8-12, são equivalentes no caso de um trabalho realizado por uma força externa sobre o sistema na ausência de atrito.

A força usada para levantar a bola transfere energia para energia cinética e energia potencial.

Sistema bola–Terra

$\Delta E_{mec} = \Delta K + \Delta U$

W

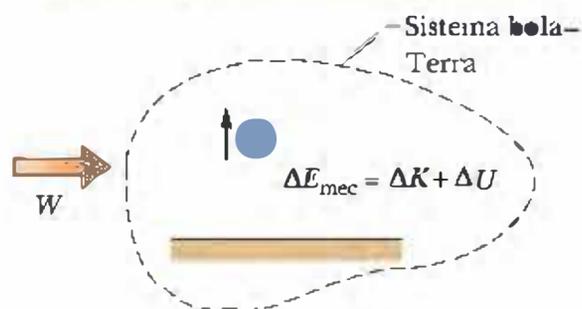



Figura 8-12 Um trabalho positivo W é realizado sobre um sistema composto por uma bola de boliche e a Terra, causando uma variação ΔE_{mec} da energia mecânica do sistema, uma variação ΔK da energia cinética da bola e uma variação ΔU da energia potencial gravitacional do sistema.

Com Atrito

Vamos agora considerar o exemplo da Fig. 8-13*a*. Uma força horizontal constante $\vec{F}$ puxa um bloco ao longo de um eixo x, deslocando-o de uma distância d e aumentando

A força aplicada fornece energia. A força de atrito transfere dessa energia para energia térmica.

O trabalho realizado pela força aplicada modifica a energia mecânica e a energia térmica.

Sistema bloco-piso

(a) (b)

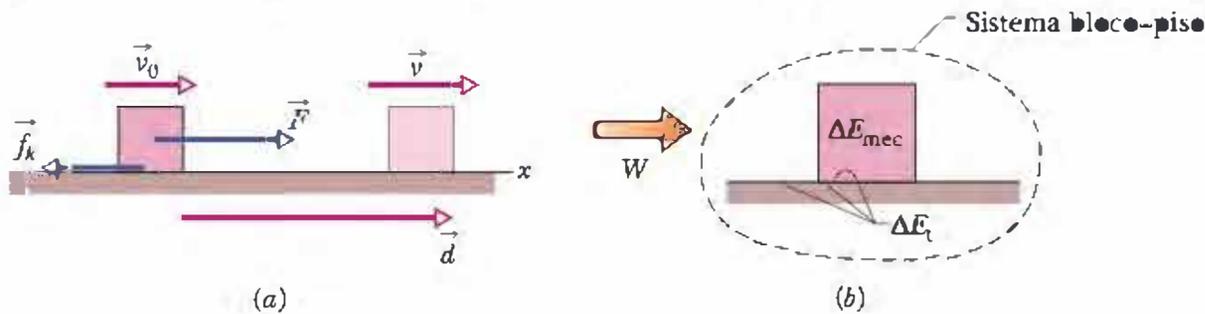



Figura 8-13 (*a*) Um bloco é puxado por uma força $\vec{F}$ enquanto uma força de atrito cinético $\vec{f}_k$ se opõe ao movimento. O bloco tem uma velocidade $\vec{v}_0$ no início do deslocamento e uma velocidade $\vec{v}$ no final do deslocamento. (*b*) Um trabalho positivo W é realizado pela força $\vec{F}$ sobre o sistema bloco–piso, produzindo uma variação ΔE_{mec} da energia mecânica do bloco e uma variação ΔE_t da energia térmica do bloco e do piso.

a velocidade do bloco de $\vec{v}_0$ para $\vec{v}$. Durante o movimento, o piso exerce uma força de atrito cinético constante $\vec{f}_k$ sobre o bloco. Inicialmente, vamos escolher o bloco como nosso sistema e aplicar a ele a segunda lei de Newton. Podemos escrever a lei para as componentes ao longo do eixo x ($F_{res,x} = ma_x$) na forma

$$F - f_k = ma. \tag{8-27}$$

Como as forças são constantes, a aceleração $\vec{a}$ também é constante. Assim, podemos usar a Eq. 2-16 para escrever

$$v^2 = v_0^2 + 2ad.$$

Explicitando a nesta equação, substituindo o resultado na Eq. 8-27 e reagrupando os termos, obtemos

$$Fd = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 + f_k d \tag{8-28}$$

ou, como $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \Delta K$ para o bloco,

$$Fd = \Delta K + f_k d. \tag{8-29}$$

Em uma situação mais geral (na qual, por exemplo, o bloco está se movendo sobre uma rampa), pode haver uma variação da energia potencial. Para levar em conta essa possível variação, generalizamos a Eq. 8-29, escrevendo

$$Fd = \Delta E_{mec} + f_k d. \tag{8-30}$$

Observamos experimentalmente que o bloco e a parte do piso ao longo da qual o bloco se desloca ficam mais quentes quando o bloco está se movendo. Como vamos ver no Capítulo 18, a temperatura de um objeto está relacionada à sua energia térmica E_t (energia associada ao movimento aleatório dos átomos e moléculas do objeto). Neste caso, a energia térmica do bloco e do piso aumenta porque (1) existe atrito e (2) há movimento. Lembre-se de que o atrito é causado por soldas a frio entre as duas superfícies. Quando o bloco desliza sobre o piso, as soldas são repetidamente rompidas e refeitas, aquecendo o bloco e o piso. Assim, o deslizamento aumenta a energia térmica E_t do bloco e do piso.

Experimentalmente, observa-se que o aumento ΔE_t da energia térmica é igual ao produto do módulo da força de atrito cinético, f_k, por d, o módulo do deslocamento:

$$\Delta E_t = f_k d \quad \text{(aumento da energia térmica causado pelo atrito).} \tag{8-31}$$

Assim, podemos escrever a Eq. 8-30 na forma

$$Fd = \Delta E_{mec} + \Delta E_t. \tag{8-32}$$

Fd é o trabalho W realizado pela força externa $\vec{F}$ (a energia transferida pela força), mas sobre que sistema o trabalho é realizado (onde são feitas as transferências de energia)? Para responder a essa pergunta, verificamos quais são as energias que

variam. A energia mecânica do bloco varia e as energias térmicas do bloco e do piso também variam. Assim, o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ é realizado sobre o sistema bloco-piso. Esse trabalho é dado por

$$W = \Delta E_{mec} + \Delta E_t \quad \text{(trabalho realizado em um sistema com atrito).} \qquad (8\text{-}33)$$

Esta equação, que está representada na Fig. 8-13*b*, é a definição do trabalho realizado por uma força externa sobre um sistema no qual existe atrito.

TESTE 5

Em três experimentos, um bloco é empurrado por uma força horizontal em um piso com atrito, como na Fig. 8-13*a*. O módulo F da força aplicada e o efeito da força sobre a velocidade do bloco são mostrados na tabela. Nos três experimentos, o bloco percorre a mesma distância d. Ordene os três experimentos de acordo com a variação da energia térmica do bloco e do piso, em ordem decrescente.

Tentativa	F	Velocidade do Bloco
a	5,0 N	diminui
b	7,0 N	permanece constante
c	8,0 N	aumenta

Exemplo

Trabalho, atrito e variação da energia térmica de um caixote de repolhos

Um operário empurra um caixote de repolhos (massa total $m = 14$ kg) sobre um piso de concreto com uma força horizontal constante $\vec{F}$ de módulo 40 N. Em um deslocamento retilíneo de módulo $d = 0{,}50$ m, a velocidade do caixote diminui de $v_0 = 0{,}60$ m/s para $v = 0{,}20$ m/s.

(a) Qual foi o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ e sobre que sistema o trabalho foi realizado?

IDEIA-CHAVE

Como a força aplicada $\vec{F}$ é constante, podemos calcular o trabalho realizado pela força usando a Eq. 7-7 ($W = Fd\cos\phi$).

Cálculo Substituindo os valores conhecidos e levando em conta o fato de que a força $\vec{F}$ e o deslocamento $\vec{d}$ apontam na mesma direção, temos:

$$W = Fd\cos\phi = (40\text{ N})(0{,}50\text{ m})\cos 0° = 20\text{ J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Raciocínio Para determinar qual é o sistema sobre o qual o trabalho é realizado, devemos examinar quais são as energias que variam. Como a velocidade do caixote varia, certamente existe uma variação ΔK da energia cinética do caixote. Existe atrito entre o piso e o caixote e, portanto, uma variação da energia térmica? Observe que $\vec{F}$ e a velocidade do caixote apontam no mesmo sentido. Assim, se não existisse atrito, $\vec{F}$ aceleraria o caixote, fazendo a velocidade *aumentar*. Como a velocidade do caixote está *diminuindo*, deve existir atrito e, portanto, deve ocorrer uma variação ΔE_t da energia térmica do caixote e do piso. Assim, o sistema sobre o qual o trabalho é realizado é o sistema caixote-piso, já que as variações de energia ocorrem nesse sistema.

(b) Qual é o aumento ΔE_t da energia térmica do caixote e do piso?

IDEIA-CHAVE

Podemos relacionar ΔE_t ao trabalho W realizado pela força $\vec{F}$ usando a definição de energia da Eq. 8-33 para um sistema no qual existe atrito:

$$W = \Delta E_{mec} + \Delta E_t. \qquad (8\text{-}34)$$

Cálculos O valor de W foi calculado no item (a). Como a energia potencial não variou, a variação ΔE_{mec} da energia mecânica do caixote é igual à variação da energia cinética e podemos escrever:

$$\Delta E_{mec} = \Delta K = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2.$$

Substituindo esta expressão na Eq. 8-34 e explicitando ΔE_t, obtemos

$$\Delta E_t = W - (\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2) = W - \tfrac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$$
$$= 20\text{ J} - \tfrac{1}{2}(14\text{ kg})[(0{,}20\text{ m/s})^2 - (0{,}60\text{ m/s})^2]$$
$$= 22{,}2\text{ J} \approx 22\text{ J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

8-8 Conservação da Energia

Já discutimos várias situações nas quais a energia era transferida entre objetos e sistemas, da mesma forma como o dinheiro é movimentado entre contas bancárias. Em cada uma dessas situações, supusemos que a energia envolvida não variava, ou seja, que uma parte da energia não podia aparecer ou desaparecer magicamente. Em termos mais formais, supusemos (corretamente) que a energia obedecia a uma lei conhecida como **lei de conservação da energia**, que se refere à **energia total** E de um sistema. A energia total é a soma da energia mecânica com a energia térmica e qualquer outro tipo de *energia interna* do sistema além da energia térmica. (Esses outros tipos de energia interna ainda não foram discutidos.) De acordo com a lei de conservação da energia,

> A energia total E de um sistema pode mudar apenas através da transferência de energia para dentro do sistema ou para fora do sistema.

O único tipo de transferência de energia que consideramos até agora foi o trabalho W realizado sobre um sistema. Assim, para nós, neste ponto, a lei de conservação da energia estabelece que

$$W = \Delta E = \Delta E_{mec} + \Delta E_t + \Delta E_{int}, \tag{8-35}$$

onde ΔE_{mec} é a variação da energia mecânica do sistema, ΔE_t é a variação da energia térmica do sistema e ΔE_{int} é uma variação de qualquer outro tipo de energia interna do sistema. Em ΔE_{mec} estão incluídas as variações ΔK da energia cinética e as variações ΔU da energia potencial (elástica, gravitacional, ou qualquer outra forma que exista).

Esta lei de conservação da energia *não é* algo que deduzimos a partir de princípios básicos da física, mas se baseia em resultados experimentais. Os cientistas e engenheiros nunca encontraram uma exceção.

Sistema Isolado

Um sistema isolado não pode trocar energia com o ambiente. Nesse caso, a lei de conservação da energia pode ser expressa da seguinte forma:

> A energia total, E, de um sistema isolado não pode variar.

Muitas transferências de energia podem acontecer *dentro* de um sistema isolado, como, por exemplo, entre energia cinética e alguma forma de energia potencial ou entre energia cinética e energia térmica. Entretanto, a energia total do sistema não pode variar.

Para dar um exemplo, considere a alpinista da Fig. 8-14, seu equipamento e a Terra como um sistema isolado. Enquanto a jovem desce a encosta da montanha, fazendo variar a configuração do sistema, precisa controlar a transferência de energia potencial do sistema. (Essa energia não pode simplesmente desaparecer.) Parte da energia potencial é convertida em energia cinética. Entretanto, a alpinista não quer transferir muita energia para esta forma, pois, nesse caso, passaria a se mover muito depressa. Por essa razão, passa a corda por argolas de metal de modo a produzir atrito entre a corda e as argolas durante a descida. A passagem da corda pelas argolas transfere energia potencial gravitacional do sistema para energia térmica das argolas e da corda de uma forma controlável. A energia total do sistema alpinista–equipamento–Terra (a soma das energias potencial gravitacional, cinética e térmica) não varia durante a descida.

Figura 8-14 Para descer, a alpinista precisa transferir energia da energia potencial gravitacional de um sistema formado por ela, seu equipamento e a Terra. Ela enrolou a corda em anéis de metal para que haja atrito entre a corda e os anéis. Isso faz com que a maior parte da energia potencial gravitacional seja transferida para a energia térmica da corda e dos anéis e não para a energia cinética da alpinista. *(Tyler Stableford/The Image Bank/Getty Images)*

No caso de um sistema isolado, a lei de conservação da energia pode ser escrita de duas formas. Primeiro, fazendo $W = 0$ na Eq. 8-35, obtemos

$$\Delta E_{mec} + \Delta E_t + \Delta E_{int} = 0 \quad \text{(sistema isolado).} \tag{8-36}$$

Podemos também fazer $\Delta E_{mec} = E_{mec,2} - E_{mec,1}$, onde os índices 1 e 2 se referem a dois instantes diferentes, antes e depois da ocorrência de um certo processo, digamos. Nesse caso, a Eq. 8-36 se torna

$$E_{mec,2} = E_{mec,1} - \Delta E_t - \Delta E_{int}. \tag{8-37}$$

De acordo com a Eq. 8-37:

Em um sistema isolado, podemos relacionar a energia total em um dado instante à energia total em outro instante *sem considerar a energia em instantes intermediários.*

Este fato pode ser uma ferramenta poderosa para a solução de problemas que envolvem sistemas isolados quando precisamos relacionar as formas de energia que um sistema possui antes e depois de um certo processo.

Na Seção 8-5, discutimos uma situação especial de sistemas isolados, aquela na qual forças dissipativas (como a força de atrito cinético) não atuavam no sistema. Nesse caso especial, ΔE_t e ΔE_{int} são nulas e a Eq. 8-37 se reduz à Eq. 8-18. Em outras palavras, a energia mecânica de um sistema isolado é conservada quando não existem forças dissipativas atuando no sistema.

Forças Externas e Transferências Internas de Energia

Uma força externa pode mudar a energia cinética ou a energia potencial de um objeto sem realizar trabalho sobre o objeto, ou seja, sem transferir energia para o objeto. Em vez disso, a força se limita a transferir energia de uma forma para outra no interior do objeto.

A Fig. 8-15 mostra um exemplo. Uma patinadora, inicialmente em repouso, empurra uma barra e passa a deslizar sobre o gelo (Figs. 8-15*a* e *b*). A energia cinética da patinadora aumenta porque a barra exerce uma força externa $\vec{F}$ sobre a patinadora. Entretanto, a força não transfere energia da barra para a patinadora e, portanto, não realiza trabalho sobre a patinadora; o aumento da energia cinética se deve a transferências internas a partir da energia bioquímica dos músculos da moça.

A Fig. 8-16 mostra outro exemplo. Um motor de combustão interna aumenta a velocidade de um carro que possui tração nas quatro rodas (as quatro rodas são acionadas pelo motor). Durante a aceleração, o motor faz os pneus empurrarem o pavimento para trás. Este empurrão dá origem a uma força de atrito $\vec{f}$ que empurra os pneus para a frente. A força externa resultante $\vec{F}$ exercida pelo pavimento, que é a soma dessas forças de atrito, acelera o carro, aumentando sua energia cinética. En-

Figura 8-15 (*a*) Quando uma patinadora empurra uma barra, a barra exerce uma força $\vec{F}$ sobre a patinadora. (*b*) Quando a patinadora larga a barra, adquiriu uma velocidade $\vec{v}$. (*c*) A força externa $\vec{F}$ age sobre a patinadora, formando um ângulo ϕ com o eixo horizontal x. Quando a patinadora sofre um deslocamento $\vec{d}$, sua velocidade muda de $\vec{v}_0(= 0)$ para $\vec{v}$ por causa da componente horizontal de $\vec{F}$.

tretanto, $\vec{F}$ não transfere energia do pavimento para o carro e, portanto, não realiza trabalho; o aumento da energia cinética do carro se deve à transferência de energia interna armazenada no combustível.

Em situações semelhantes a essas duas, às vezes podemos relacionar a força externa $\vec{F}$ que age sobre um objeto à variação da energia mecânica do objeto se conseguirmos simplificar a situação. Considere o exemplo da patinadora no gelo. Enquanto ela empurra o corrimão e percorre a distância d da Fig. 8-15c, podemos simplificar a situação supondo que a aceleração é constante, com a velocidade variando de $v_0 = 0$ para v. (Isso equivale a supor que o módulo e a orientação de $\vec{F}$ são constantes.) Após o empurrão, podemos simplificar a situação considerando a patinadora como uma partícula e desprezando o fato de que o esforço muscular aumentou a energia térmica do corpo da patinadora, além de alterar outros parâmetros fisiológicos. Sendo assim, podemos aplicar a Eq. 7-5 ($\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_x d$) e escrever

$$K - K_0 = (F\cos\phi)d,$$

ou

$$\Delta K = Fd\cos\phi. \tag{8-38}$$

Se a situação também envolve uma mudança da altura em que se encontra o objeto, podemos levar em conta a variação ΔU da energia potencial gravitacional escrevendo

$$\Delta U + \Delta K = Fd\cos\phi. \tag{8-39}$$

A força do lado direito desta equação não realiza trabalho sobre o objeto, mas é responsável pelas variações de energia que aparecem do lado esquerdo da equação.

Figura 8-16 Um carro acelera para a direita usando tração nas quatro rodas. O pavimento exerce quatro forças de atrito (duas das quais aparecem na figura) sobre a parte inferior dos pneus. A soma dessas quatro forças é a força externa resultante $\vec{F}$ que age sobre o carro.

Potência

Agora que sabemos que uma força pode transferir energia de uma forma para outra sem realizar trabalho, podemos ampliar a definição de potência apresentada no capítulo anterior. Na Seção 7-9, a potência foi definida como a taxa com a qual uma força realiza trabalho. Em um sentido mais geral, a potência P é a taxa com a qual uma força transfere energia de uma forma para outra. Se uma certa quantidade de energia ΔE é transferida durante um intervalo de tempo Δt, a **potência média** desenvolvida pela força é dada por

$$P_{méd} = \frac{\Delta E}{\Delta t}. \tag{8-40}$$

Analogamente, a **potência instantânea** desenvolvida pela força é dada por

$$P = \frac{dE}{dt}. \tag{8-41}$$

Exemplo

Energia, atrito, mola e pamonha

Na Fig. 8-17, um pacote com 2,0 kg de pamonha, depois de deslizar sobre um piso com velocidade $v_1 = 4{,}0$ m/s, choca-se com uma mola, comprimindo-a até ficar momentaneamente em repouso. Até o ponto em que o pacote entra em contato com a mola inicialmente relaxada, o piso não possui atrito, mas enquanto o pacote está comprimindo a mola, o piso exerce sobre o pacote uma força de atrito cinético de módulo 15 N. Se k = 10.000 N/m, qual é a variação d do comprimento da mola entre o instante em que começa a ser comprimida e o instante em que o pacote para?

IDEIAS-CHAVE

Precisamos examinar todas as forças para determinar se temos um sistema isolado ou um sistema no qual uma força externa está realizando trabalho.

Forças A força normal exercida pelo piso sobre o pacote não realiza trabalho porque a direção da força é sempre

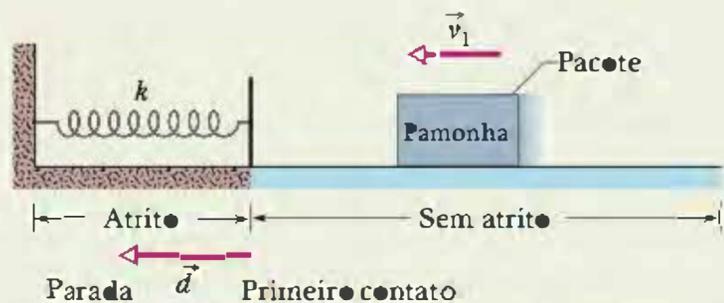



Figura 8-17 Um pacote desliza sobre um piso sem atrito com velocidade $\vec{v}_1$ em direção a uma mola de constante elástica k. Quando o pacote entra em contato com a mola, uma força de atrito do piso passa a atuar sobre o pacote.

perpendicular à direção de deslocamento do pacote. Pela mesma razão, a força gravitacional também não realiza trabalho sobre o pacote. Entretanto, enquanto a mola está sendo comprimida, uma força elástica realiza trabalho sobre o pacote, transferindo energia para a energia potencial elástica da mola. A força da mola também empurra uma parede rígida. Como existe atrito entre o pacote e o piso, o deslizamento do pacote sobre o piso aumenta a energia térmica do pacote e do piso.

Sistema O sistema pacote–mola–piso-parede, que inclui todas essas forças e transferências de energia, é um sistema isolado. Assim, a energia total não varia e podemos aplicar ao sistema a lei de conservação da energia na forma da Eq. 8-37:

$$E_{mec,2} = E_{mec,1} - \Delta E_t. \tag{8-42}$$

Cálculos Na Eq. 8-42, vamos supor que o índice 1 corresponde ao estado inicial do pacote e o índice 2 corresponde ao estado no qual o pacote está momentaneamente em repouso e a mola foi comprimida de uma distância d. Para os dois estados, a energia mecânica do sistema é a soma da energia cinética do pacote ($K = \frac{1}{2}mv^2$) com a energia potencial da mola ($U = \frac{1}{2}kx^2$). No estado 1, $U = 0$ (pois a mola não está comprimida) e a velocidade do pacote é v_1. Assim, temos:

$$E_{mec,1} = K_1 + U_1 = \tfrac{1}{2}mv_1^2 + 0.$$

No estado 2, $K = 0$ (pois o pacote está parado) e a variação de comprimento da mola é d. Assim, temos:

$$E_{mec,2} = K_2 + U_2 = 0 + \tfrac{1}{2}kd^2.$$

Finalmente, usando a Eq. 8-31, podemos substituir a variação ΔE_t da energia térmica do pacote e do piso por $f_k d$. Nesse caso, a Eq. 8-42 se torna

$$\tfrac{1}{2}kd^2 = \tfrac{1}{2}mv_1^2 - f_k d.$$

Reagrupando os termos e substituindo os valores conhecidos, temos:

$$5000d^2 + 15d - 16 = 0.$$

Resolvendo esta equação do segundo grau, obtemos:

$$d = 0{,}055 \text{ m} = 5{,}5 \text{ cm}. \qquad \text{(Resposta)}$$

REVISÃO E RESUMO

Forças Conservativas Uma força é uma **força conservativa** se o trabalho que realiza sobre uma partícula se anula ao longo de um percurso fechado. Podemos dizer também que uma força é conservativa se o trabalho que realiza sobre uma partícula que se move entre dois pontos não depende da trajetória seguida pela partícula. A força gravitacional e a força elástica são forças conservativas; a força de atrito cinético é uma **força dissipativa** (não conservativa).

Energia Potencial A **energia potencial** é a energia associada à configuração de um sistema submetido à ação de uma força conservativa. Quando a força conservativa realiza um trabalho W sobre uma partícula do sistema, a variação ΔU da energia potencial do sistema é dada por

$$\Delta U = -W. \tag{8-1}$$

Se a partícula se desloca do ponto x_i para o ponto x_f, a variação de energia potencial do sistema é

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx. \tag{8-6}$$

Energia Potencial Gravitacional A energia potencial associada a um sistema constituído pela Terra e uma partícula próxima é chamada de **energia potencial gravitacional**. Se uma partícula se desloca de uma altura y_i para uma altura y_f, a variação da energia potencial gravitacional do sistema partícula–Terra é dada por

$$\Delta U = mg(y_f - y_i) = mg\,\Delta y. \tag{8-7}$$

Se o **ponto de referência** de uma partícula é tomado como $y_i = 0$ e a energia potencial gravitacional correspondente do sistema é tomada como $U_i = 0$, a energia potencial gravitacional U de uma partícula a uma altura y é dada por

$$U(y) = mgy. \tag{8-9}$$

Energia Potencial Elástica A **Energia potencial elástica** é a energia associada ao estado de compressão ou distensão de um objeto elástico. No caso de uma mola que exerce uma força elástica $F = -kx$ quando a extremidade livre sofre um deslocamento x, a energia potencial elástica é dada por

$$U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2. \tag{8-11}$$

Na **configuração de referência**, quando a mola está no estado relaxado, $x = 0$ e $U = 0$.

Energia Mecânica A **energia mecânica** E_{mec} de um sistema é a soma da energia cinética K com a energia potencial U do sistema:

$$E_{mec} = K + U. \quad (8\text{-}12)$$

Sistema isolado é um sistema no qual nenhuma *força externa* produz variações de energia. Se apenas forças conservativas realizam trabalho em um sistema isolado, a energia mecânica E_{mec} do sistema não pode variar. Este **princípio de conservação da energia mecânica** pode ser escrito na forma

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1, \quad (8\text{-}17)$$

onde os índices se referem a diferentes instantes de um processo de transferência de energia. Este princípio de conservação pode também ser escrito na forma

$$\Delta E_{mec} = \Delta K + \Delta U = 0. \quad (8\text{-}18)$$

Curvas de Energia Potencial Se conhecemos a função energia potencial $U(x)$ de um sistema no qual uma força unidimensional $F(x)$ age sobre uma partícula, podemos determinar a força usando a equação

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}. \quad (8\text{-}22)$$

Se $U(x)$ é dada na forma de um gráfico, para qualquer valor de x, a força $F(x)$ é o negativo da inclinação da curva no ponto considerado e a energia cinética da partícula é dada por

$$K(x) = E_{mec} - U(x), \quad (8\text{-}24)$$

onde E_{mec} é a energia mecânica do sistema. Um **ponto de retorno** é um ponto x no qual o movimento de uma partícula muda de sentido (nesse ponto, $K = 0$). A partícula se encontra em **equilíbrio** nos pontos onde a inclinação da curva de $U(x)$ é nula [nesses pontos, $F(x) = 0$].

Trabalho Realizado sobre um Sistema por uma Força Externa O trabalho W é a energia transferida para um sistema ou de um sistema por uma força externa que age sobre o sistema. Quando mais de uma força externa age sobre o sistema, o *trabalho total* dessas forças é igual à energia transferida. Quando não existe atrito, o trabalho realizado sobre o sistema e a variação ΔE_{mec} da energia mecânica do sistema são iguais:

$$W = \Delta E_{mec} = \Delta K + \Delta U. \quad (8\text{-}26, 8\text{-}25)$$

Quando uma força de atrito cinético age dentro do sistema, a energia térmica E_t do sistema varia. (Esta energia está associada ao movimento aleatório dos átomos e moléculas do sistema.) Nesse caso, o trabalho realizado sobre o sistema é dado por

$$W = \Delta E_{mec} + \Delta E_t. \quad (8\text{-}33)$$

A variação ΔE_t está relacionada ao módulo f_k da força de atrito e ao módulo d do deslocamento causado pela força externa através da equação

$$\Delta E_t = f_k d. \quad (8\text{-}31)$$

Conservação da Energia A **energia total** E de um sistema (a soma da energia mecânica e das energias internas, incluindo a energia térmica) só pode variar se uma certa quantidade de energia é transferida para o sistema ou retirada do sistema. Este fato experimental é conhecido como **lei de conservação da energia**. Se um trabalho W é realizado sobre o sistema,

$$W = \Delta E = \Delta E_{mec} + \Delta E_t + \Delta E_{int}. \quad (8\text{-}35)$$

Se o sistema é isolado ($W = 0$), isso nos dá

$$\Delta E_{mec} + \Delta E_t + \Delta E_{int} = 0 \quad (8\text{-}36)$$

e

$$E_{mec,2} = E_{mec,1} - \Delta E_t - \Delta E_{int}, \quad (8\text{-}37)$$

onde os índices 1 e 2 indicam dois instantes diferentes.

Potência A **potência** desenvolvida por uma força é a *taxa* com a qual essa força transfere energia. Se uma certa quantidade de energia ΔE é transferida por uma força em um intervalo de tempo Δt, a **potência média** desenvolvida pela força é dada por

$$P_{méd} = \frac{\Delta E}{\Delta t}. \quad (8\text{-}40)$$

A **potência instantânea** desenvolvida por uma força é dada por

$$P = \frac{dE}{dt}. \quad (8\text{-}41)$$

PERGUNTAS

1 Na Fig. 8-18, um bloco que se move horizontalmente pode seguir três caminhos sem atrito, que diferem apenas na altura, para chegar à linha de chegada tracejada. Ordene os caminhos de acordo (a) com a velocidade do bloco na linha de chegada e (b) o tempo de percurso do bloco até a linha de chegada, em ordem decrescente.

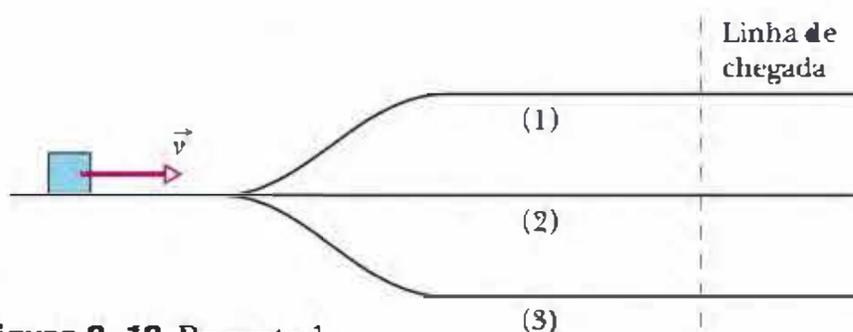



Figura 8-18 Pergunta 1.

2 A Fig. 8-19 mostra a função energia potencial de uma partícula. (a) Ordene as regiões AB, BC, CD e DE de acordo com o módulo da força que atua sobre a partícula, em ordem decrescente. Qual é o maior valor permitido para a energia mecânica E_{mec} para que a

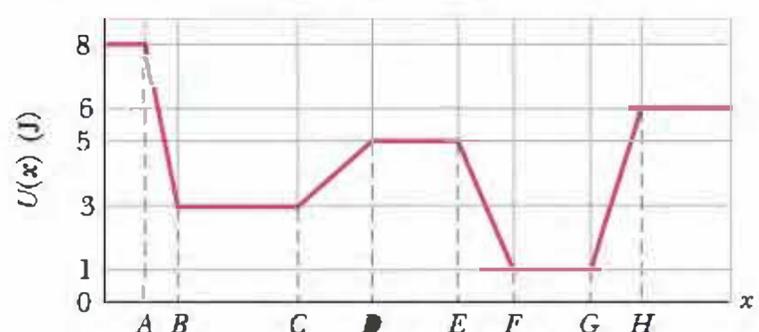



Figura 8-19 Pergunta 2.

partícula (b) fique aprisionada no poço de potencial da esquerda, (c) fique aprisionada no poço de potencial da direita e (d) seja capaz de se mover entre os dois poços, mas sem ultrapassar o ponto H? Para a situação do item (d), em qual das regiões BC, DE e FG a partícula possui (e) a maior energia cinética e (f) a menor velocidade?

3 A Fig. 8-20 mostra um caminho direto e quatro caminhos indiretos do ponto i ao ponto f. Ao longo do caminho direto e de três dos caminhos indiretos, apenas uma força conservativa F_c age sobre um certo objeto. Ao longo do quarto caminho indireto, tanto F_c como uma força dissipativa F_d agem sobre o objeto. A variação ΔE_{mec} da energia mecânica do objeto (em joules) ao se deslocar de i para f está indicada ao lado de cada segmento dos caminhos indiretos. Qual é o valor de ΔE_{mec} (a) de i para f ao longo do caminho direto e (b) produzida por F_d ao longo do caminho em que essa força atua?

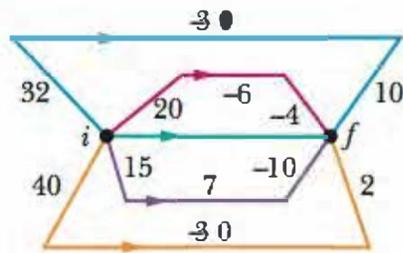



Figura 8-20 Pergunta 3.

4 Na Fig. 8-21, um pequeno bloco, inicialmente em repouso, é liberado em uma rampa sem atrito a uma altura de 3,0 m. As alturas das elevações ao longo da rampa estão indicadas na figura. Os cumes das elevações são todos iguais, de forma circular, e o bloco não perde contato com o piso em nenhuma das elevações. (a) Qual é a primeira elevação que o bloco não consegue superar? (b) O que acontece com o bloco em seguida? No cume de que elevação (c) a aceleração centrípeta do bloco é máxima e (d) a força normal sobre o bloco é mínima?

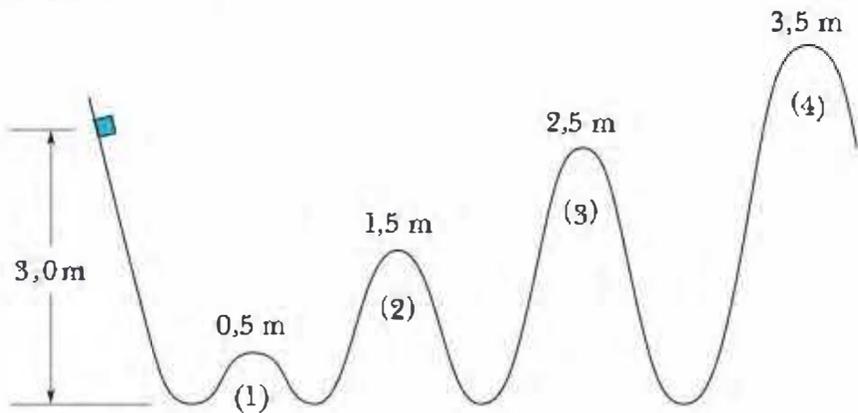



Figura 8-21 Pergunta 4.

5 Na Fig. 8-22, um bloco desliza de A para C em uma rampa sem atrito e depois passa para uma região horizontal CD onde está sujeito a uma força de atrito. A energia cinética do bloco aumenta, diminui ou permanece constante (a) na região AB, (b) na região BC e (c) na região CD? (d) A energia mecânica do bloco aumenta, diminui ou permanece constante nessas regiões?

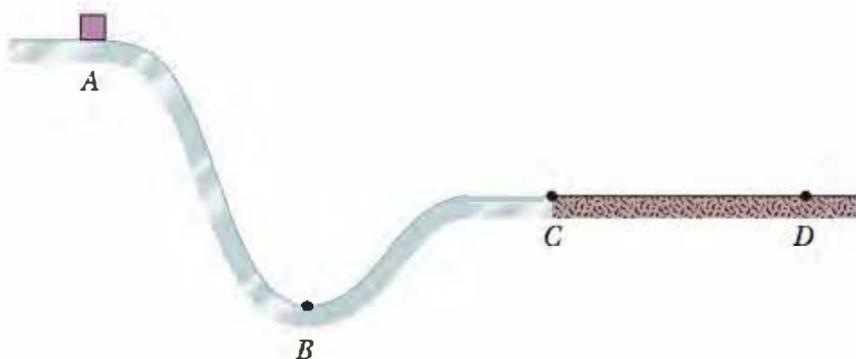



Figura 8-22 Pergunta 5.

6 Na Fig. 8-23a, você puxa para cima uma corda presa a um cilindro que desliza em relação a uma haste central. Como o cilindro e a haste se encaixam sem folga, o atrito é considerável. A força que você aplica realiza um trabalho $W = +100$ J sobre o sistema cilindro-eixo-Terra (Fig. 8-23b). Um "balanço de energia" do sistema é mostrado na Fig. 8-23c: a energia cinética K aumenta de 50 J e a energia potencial gravitacional U_g aumenta de 20 J. A única outra variação da energia dentro do sistema é a da energia térmica E_t. Qual é a variação ΔE_t?

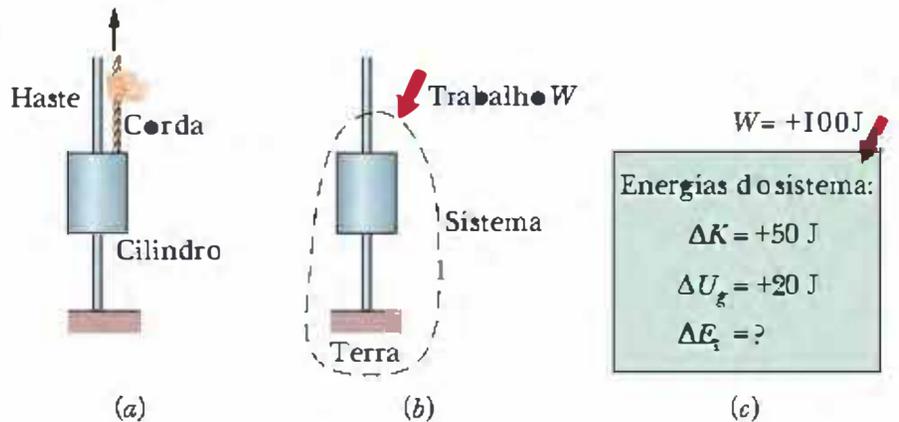



Figura 8-23 Pergunta 6.

7 O arranjo da Fig. 8-24 é semelhante ao da Pergunta 6. Agora, você puxa para baixo uma corda que está presa ao cilindro que desliza com atrito em relação à haste central. Além disso, ao descer, o cilindro puxa um bloco através de uma segunda corda e o faz deslizar em uma bancada. Considere novamente o sistema cilindro–eixo–Terra, semelhante ao da Fig. 8-23b. O trabalho que você realiza sobre o sistema é 200 J. O sistema realiza um trabalho de 60 J sobre o bloco. Dentro do sistema, a energia cinética aumenta de 130 J e a energia potencial gravitacional diminui de 20 J. (a) Escreva um "balanço de energia" para o sistema, semelhante ao da Fig. 8-23c. (b) Qual é a variação da energia térmica dentro do sistema?

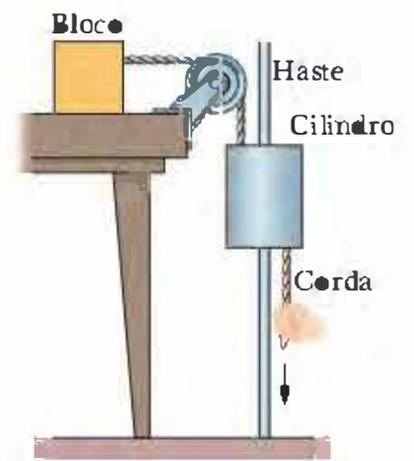



Figura 8-24 Pergunta 7.

8 Na Fig. 8-25, um bloco desliza em uma pista que desce uma altura h. A pista não possui atrito, exceto na parte mais baixa. Nessa parte, o bloco desliza até parar, devido ao atrito, depois de percorrer uma distância D. (a) Se diminuímos h, o bloco percorre uma distância maior, menor ou igual a D até parar? (b) Se, em vez disso, aumentamos a massa do bloco, a distância que o bloco percorre até parar é maior, menor ou igual a D?

Figura 8-25 Pergunta 8.

9 A Fig. 8-26 mostra três situações que envolvem um plano com atrito e um bloco que desliza sobre um plano. O bloco começa com a mesma velocidade nas três situações e desliza até que a força de atrito cinético o faça parar. Ordene as situações de acordo com o aumento da energia térmica devido ao deslizamento, em ordem decrescente.

(1) (2) (3)

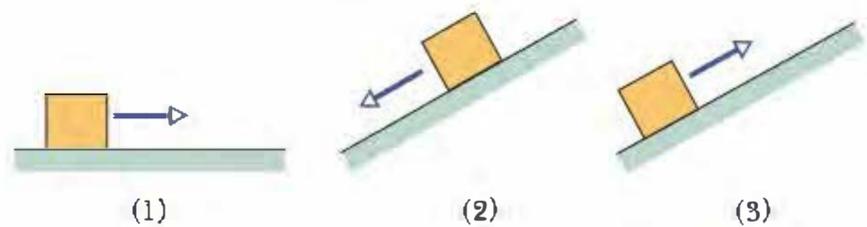



Figura 8-26 Pergunta 9.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física* de Jearl Walker, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

Seção 8-4 Cálculo da Energia Potencial

•1 Qual é a constante elástica de uma mola que armazena 25 J de energia potencial ao ser comprimida 7,5 cm?

•2 Na Fig. 8-27, um carro de montanha-russa de massa $m = 825$ kg atinge o cume da primeira elevação com uma velocidade $v_0 = 17,0$ m/s a uma altura $h = 42,0$ m. O atrito é desprezível. Qual é o trabalho realizado sobre o carro pela força gravitacional entre este ponto e (a) o ponto A, (b) o ponto B e (c) o ponto C? Se a energia potencial gravitacional do sistema carro–Terra é tomada como nula em C, qual é o seu valor quando o carro está (d) em B e (e) em A? Se a massa m é duplicada, a variação da energia potencial gravitacional do sistema entre os pontos A e B aumenta, diminui ou permanece a mesma?

Primeira elevação $\vec{v}_0$ A B C h h h/2

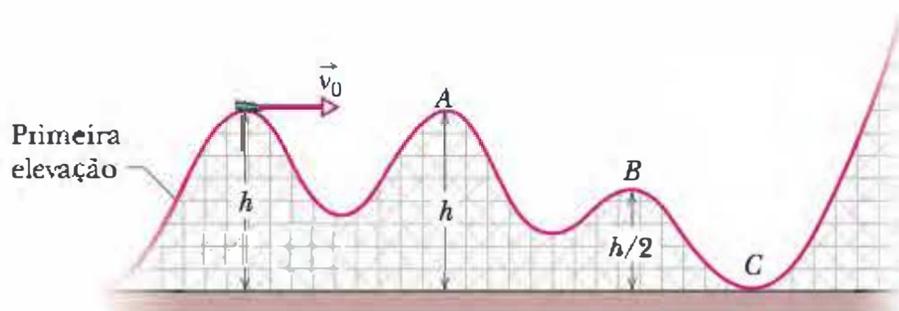



Figura 8-27 Problemas 2 e 9.

•3 Você deixa cair um livro de 2,00 kg para uma amiga que está na calçada, a uma distância $D = 10,0$ m abaixo de você. Se as mãos estendidas da sua amiga estão a uma distância $d = 1,5$ m acima do solo (Fig. 8-28), (a) qual é o trabalho W_g realizado sobre o livro pela força gravitacional até o livro cair nas mãos da sua amiga? (b) Qual é a variação ΔU da energia potencial gravitacional do sistema livro–Terra durante a queda? Se a energia potencial gravitacional U do sistema é considerada nula no nível do solo, qual é o valor de U (c) quando você deixa cair o livro e (d) quando o livro chega às mãos da sua amiga? Suponha agora que o valor de U seja 100 J ao nível do solo e calcule novamente (e) W_g, (f) ΔU, (g) U no ponto onde você deixou cair o livro e (h) U no ponto em que o livro chegou às mãos da sua amiga.

D d

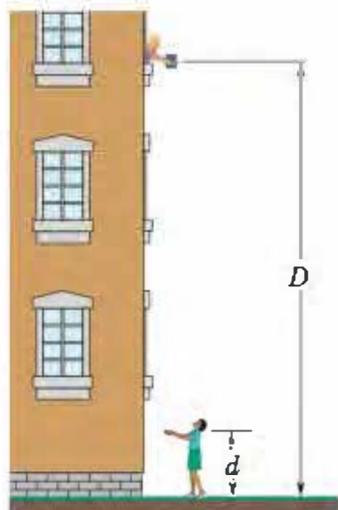



Figura 8-28 Problemas 3 e 10.

•4 A Fig. 8-29 mostra uma bola de massa $m = 0,341$ kg presa à extremidade de uma haste fina de comprimento $L = 0,452$ m e massa desprezível. A outra extremidade da haste é articulada, de modo que a bola pode se mover em uma circunferência vertical. A haste é mantida na posição horizontal, como na figura, e depois recebe um impulso para baixo com força suficiente para que a bola passe pelo ponto mais baixo da circunferência e continue em movimento até chegar ao ponto mais alto com velocidade nula. Qual é o trabalho realizado sobre a bola pela força gravitacional do ponto inicial até (a) o ponto mais baixo, (b) o ponto mais alto, (c) o ponto à direita na mesma altura que o ponto inicial? Se a energia potencial gravitacional do sistema bola–Terra é tomada como zero no ponto inicial, determine o seu valor quando a bola atinge (d) o ponto mais baixo, (e) o ponto mais alto e (f) o ponto à direita na mesma altura que o ponto inicial. (g) Suponha que a haste tenha recebido um impulso maior e passe pelo ponto mais alto com uma velocidade diferente de zero. A variação ΔU_g do ponto mais baixo ao ponto mais alto é maior, menor ou a mesma que quando a bola chegava ao ponto mais alto com velocidade zero?

L

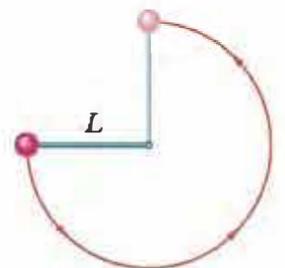



Figura 8-29 Problemas 4 e 14.

•5 Na Fig. 8-30, um floco de gelo de 2,00 g é liberado na borda de uma taça hemisférica com 22,0 cm de raio. Não há atrito no contato do floco com a taça. (a) Qual é o trabalho realizado sobre o floco pela força gravitacional durante a descida do floco até o fundo da taça? (b) Qual é a variação da energia potencial do sistema floco-Terra durante a descida? (c) Se essa energia potencial é tomada como nula no fundo da taça, qual é seu valor quando o floco é solto? (d) Se, em vez disso, a energia potencial é tomada como nula no ponto onde o floco é solto, qual é o seu valor quando o floco atinge o fundo da taça? (e) Se a massa do floco fosse duplicada, os valores das respostas dos itens de (a) a (d) aumentariam, diminuiriam ou permaneceriam os mesmos?

Floco de gelo r

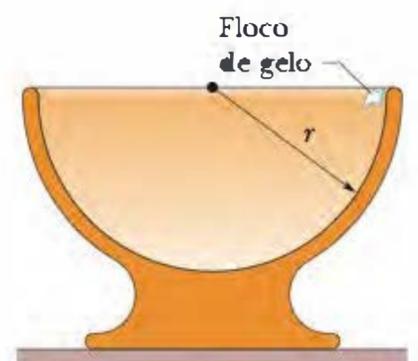



Figura 8-30 Problemas 5 e 11.

••6 Na Fig. 8-31, um pequeno bloco de massa $m = 0,032$ kg pode deslizar em uma pista sem atrito que forma um *loop* de raio $R = 12$ cm. O bloco é liberado a partir do repouso no ponto P, a uma altura $h = 5.0R$ acima do ponto mais baixo do *loop*. Qual é o trabalho realizado sobre o bloco pela força gravitacional quando o bloco se desloca do ponto P para (a) o ponto Q e (b) o ponto mais alto do *loop*? Se a energia potencial gravitacional do sistema bloco-Terra é tomada como zero no ponto mais baixo do *loop*, qual é a energia potencial quando o bloco se encontra (c) no ponto P, (d) no ponto Q e (e) no ponto mais alto do *loop*? (f) Se, em vez de ser simplesmente liberado, o bloco recebe uma velocidade inicial para baixo ao longo da pista, as respostas dos itens de (a) a (e) aumentam, diminuem ou permanecem as mesmas?

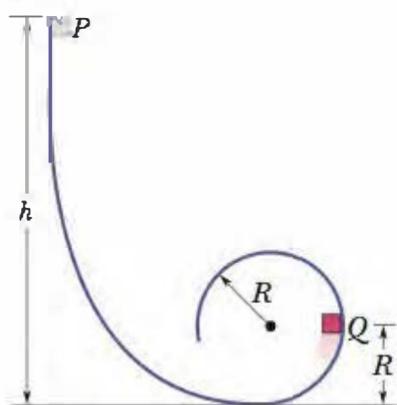



Figura 8-31 Problemas 6 e 17.

••7 A Fig. 8-32 mostra uma haste fina, de comprimento $L = 2,00$ m e massa desprezível, que pode girar em torno de uma das extremidades para descrever uma circunferência vertical. Uma bola de massa $m = 5,00$ kg está presa na outra extremidade. A haste é puxada lateralmente até fazer um ângulo $\theta_0 = 30,0°$ com a vertical e liberada com velocidade inicial $\vec{v}_0 = 0$. Quando a bola desce até o ponto mais baixo da circunferência, (a) qual é o trabalho realizado sobre a bola pela força gravitacional e (b) qual é a variação da energia potencial do sistema bola–Terra? (c) Se a energia potencial gravitacional é tomada como zero no ponto mais baixo da circunferência, qual é seu valor no momento em que a bola é liberada? (d) Os valores das respostas dos itens de (a) a (c) aumentam, diminuem ou permanecem os mesmos se o ângulo θ_0 é aumentado?

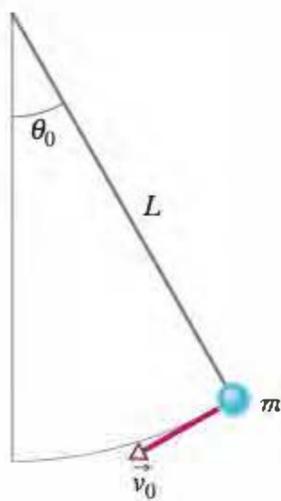



Figura 8-32 Problemas 7, 18 e 21.

••8 Uma bola de neve de 1,50 kg é lançada de um penhasco de 12,5 m de altura. A velocidade inicial da bola de neve é 14,0 m/s, 41,0° acima da horizontal. (a) Qual é o trabalho realizado sobre a bola de neve pela força gravitacional durante o percurso até um terreno plano, abaixo do penhasco? (b) Qual é a variação da energia potencial do sistema bola de neve–Terra durante o percurso? (c) Se a energia potencial gravitacional é tomada como nula na altura do penhasco, qual é o seu valor quando a bola de neve chega ao solo?

Seção 8-5 Conservação da Energia Mecânica

•9 No Problema 2, qual é a velocidade do carro (a) no ponto A, (b) no ponto B e (c) no ponto C? (d) Que altura o carro alcança na última elevação, que é alta demais para ser transposta? (e) Se o carro tivesse uma massa duas vezes maior, quais seriam as respostas dos itens (a) a (d)?

•10 (a) No Problema 3, qual é a velocidade do livro ao chegar às mãos da sua amiga? (b) Se o livro tivesse uma massa duas vezes maior, qual seria a velocidade? (c) Se o livro fosse arremessado para baixo, a resposta do item (a) aumentaria, diminuiria ou permaneceria a mesma?

•11 (a) No Problema 5, qual é a velocidade do floco de gelo ao chegar ao fundo da taça? (b) Se o floco de gelo tivesse o dobro da massa, qual seria a velocidade? (c) Se o floco de gelo tivesse uma velocidade inicial para baixo, a resposta do item (a) aumentaria, diminuiria ou permaneceria a mesma?

•12 (a) No Problema 8, usando técnicas de energia em vez das técnicas do Capítulo 4, determine a velocidade da bola de neve ao chegar ao solo. Qual seria essa velocidade (b) se o ângulo de lançamento fosse mudado para 41,0° *abaixo* da horizontal e (c) se a massa fosse aumentada para 2,50 kg?

•13 Uma bola de gude de 5,0 g é lançada verticalmente para cima usando uma espingarda de mola. A mola deve ser comprimida de exatamente 8,0 cm para que a bola alcance um alvo colocado 20 m acima da posição da bola de gude na mola comprimida. (a) Qual é a variação ΔU_g da energia potencial gravitacional do sistema bola de gude–Terra durante a subida de 20 m? (b) Qual é a variação ΔU_s da energia potencial elástica da mola durante o lançamento da bola de gude? (c) Qual é a constante elástica da mola?

•14 (a) No Problema 4, qual deve ser a velocidade inicial da bola para que ela chegue ao ponto mais alto da circunferência com velocidade escalar zero? Nesse caso, qual é a velocidade da bola (b) no ponto mais baixo e (c) no ponto à direita na mesma altura que o ponto inicial? (d) Se a massa da bola fosse duas vezes maior, as respostas dos itens (a) a (c) aumentariam, diminuiriam ou permaneceriam as mesmas?

•15 Na Fig. 8-33, um caminhão perdeu os freios quando estava descendo uma ladeira a 130 km/h e o motorista dirigiu o veículo para uma rampa de emergência sem atrito com uma inclinação $\theta = 15°$. A massa do caminhão é $1,2 \times 10^4$ kg. (a) Qual é o menor comprimento L que a rampa deve ter para que o caminhão pare (momentaneamente) antes de chegar ao final? (Suponha que o caminhão pode ser tratado como uma partícula e justifique essa suposição.) O comprimento mínimo L aumenta, diminui ou permanece o mesmo (b) se a massa do caminhão for menor e (c) se a velocidade for menor?

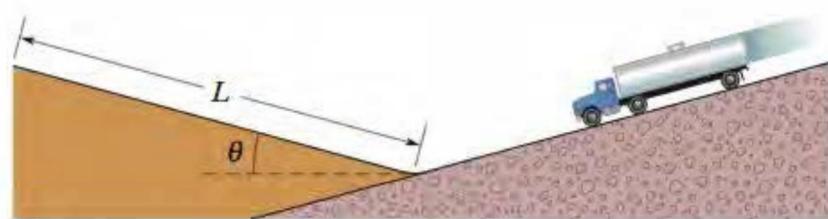



Figura 8-33 Problema 15.

••16 Um bloco de 700 g é liberado a partir do repouso de uma altura h_0 acima de uma mola vertical com constante elástica $k = 400$ N/m e massa desprezível. O bloco se choca com a mola e para momentaneamente depois de comprimir a mola 19,0 cm. Qual é o

trabalho realizado (a) pelo bloco sobre a mola e (b) pela mola sobre o bloco? (c) Qual é o valor de h_0? (d) Se o bloco fosse solto de uma altura $2{,}00h_0$ acima da mola, qual seria a máxima compressão da mola?

••17 No Problema 6, qual é o módulo da componente (a) horizontal e (b) vertical da força *resultante* que atua sobre o bloco no ponto Q? (c) De que altura h o bloco deveria ser liberado, a partir do repouso, para ficar na iminência de perder contato com a superfície no alto do *loop*? (*Iminência de perder o contato* significa que a força normal exercida pelo *loop* sobre o bloco é nula nesse instante.) (d) Plote o módulo da força normal que age sobre o bloco no alto do *loop* em função da altura inicial h, para o intervalo de $h = 0$ a $h = 6R$.

••18 (a) No Problema 7, qual é a velocidade da bola no ponto mais baixo? (b) Essa velocidade aumenta, diminui ou permanece a mesma se a massa aumenta?

••19 A Fig. 8-34 mostra uma pedra de 8,00 kg em repouso sobre uma mola. A mola é comprimida 10,0 cm pela pedra. (a) Qual é a constante elástica da mola? (b) A pedra é empurrada mais 30 cm para baixo e liberada. Qual é a energia potencial elástica da mola comprimida antes de ser liberada? (c) Qual é a variação da energia potencial gravitacional do sistema pedra-Terra quando a pedra se desloca do ponto onde foi liberada até a altura máxima? (d) Qual é essa altura máxima, medida a partir do ponto onde a pedra foi liberada?

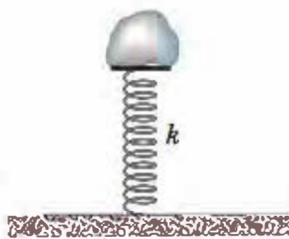



Figura 8-34 Problema 19.

••20 Um pêndulo é formado por uma pedra de 2,0 kg oscilando na extremidade de uma corda de 4,0 m de comprimento e massa desprezível. A pedra tem uma velocidade de 8,0 m/s ao passar pelo ponto mais baixo da trajetória. (a) Qual é a velocidade da pedra quando a corda forma um ângulo de 60° com a vertical? (b) Qual é o maior ângulo com a vertical que a corda assume durante o movimento da pedra? (c) Se a energia potencial do sistema pêndulo–Terra é tomada sendo nula na posição mais baixa da pedra, qual é a energia mecânica total do sistema?

••21 A Fig. 8-32 mostra um pêndulo de comprimento L = 1,25 m. O peso do pêndulo (no qual está concentrada, para efeitos práticos, toda a massa) tem velocidade v_0 quando a corda faz um ângulo $\theta_0 = 40{,}0°$ com a vertical. (a) Qual é a velocidade do peso quando está na posição mais baixa se $v_0 = 8{,}00$ m/s? Qual é o menor valor de v_0 para o qual o pêndulo oscila para baixo e depois para cima (b) até a posição horizontal e (c) até a posição vertical com a corda esticada? (d) As respostas dos itens (b) e (c) aumentam, diminuem ou permanecem as mesmas se θ_0 aumentar de alguns graus?

••22 Um esquiador de 60 kg parte do repouso a uma altura H = 20 m acima da extremidade de uma rampa para saltos de esqui (Fig. 8-35) e deixa a rampa fazendo um ângulo $\theta = 28°$ com a horizontal. Despreze os efeitos da resistência do ar e suponha que a rampa não tenha atrito. (a) Qual é a altura máxima h do salto em relação à extremidade da rampa? (b) Se o esquiador aumentasse o próprio peso colocando uma mochila nas costas, h seria maior, menor ou igual?

Figura 8-35 Problema 22.

••23 A corda da Fig. 8-36, de comprimento L = 120 cm, possui uma bola presa em uma das extremidades e está fixa na outra extremidade. A distância d da extremidade fixa a um pino no ponto P é 75,0 cm. A bola, inicialmente em repouso, é liberada com o fio na posição horizontal, como mostra a figura, e percorre a trajetória indicada pelo arco tracejado. Qual é a velocidade da bola ao atingir (a) o ponto mais baixo da trajetória e (b) o ponto mais alto depois que a corda encosta no pino?

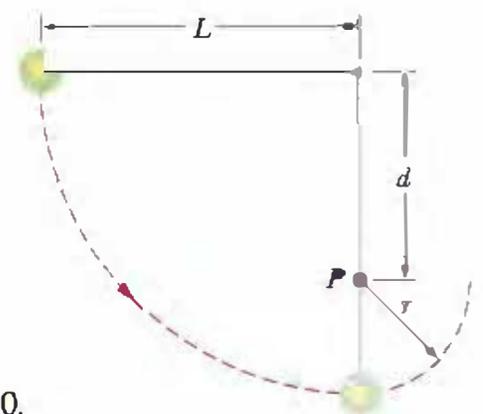



Figura 8-36 Problemas 23 e 70.

••24 Um bloco de massa m = 2,0 kg é deixado cair de uma altura h = 40 cm sobre uma mola de constante elástica k = 1960 N/m (Fig. 8-37). Determine a variação máxima de comprimento da mola ao ser comprimida.

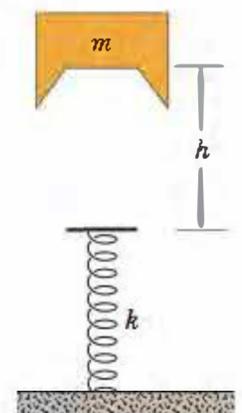



Figura 8-37 Problema 24.

••25 Em t = 0, uma bola de 1,0 kg é atirada de uma torre com $\vec{v} = (18\text{ m/s})\hat{\imath} + (24\text{ m/s})\hat{\jmath}$. Quanto é ΔU do sistema bola-Terra entre t = 0 e t = 6,0 s (ainda em queda livre)?

••26 Uma força conservativa $\vec{F} = (6{,}0x - 12)\hat{\imath}$ N, onde x está em metros, age sobre uma partícula que se move ao longo de um eixo x. A energia potencial U associada a essa força recebe o valor de 27 J em x = 0. (a) Escreva uma expressão para U como uma função de x, com U em joules e x em metros. (b) Qual é o máximo valor positivo da energia potencial? Para que valor (c) negativo e (d) positivo de x a energia potencial é nula?

••27 Tarzan, que pesa 688 N, salta de um penhasco pendurado na extremidade de um cipó com 18 m de comprimento (Fig. 8-38). Do alto do penhasco até o ponto mais baixo da trajetória, ele desce 3,2 m. O cipó se romperá se a força exercida sobre ele exceder 950 N. (a) O cipó se rompe? Se a resposta for negativa, qual é a maior força a que

é submetido o cipó? Se a resposta for afirmativa, qual é o ângulo que o cipó está fazendo com a vertical no momento em que se rompe?

Figura 8-38 Problema 27.

••28 A Fig. 8-39*a* se refere à mola de uma espingarda de rolha (Fig. 8-39*b*); ela mostra a força da mola em função da distensão ou compressão da mola. A mola é comprimida 5,5 cm e usada para impulsionar uma rolha de 3,8 g. (a) Qual é a velocidade da rolha se ela se separa da mola quando esta passa pela posição relaxada? (b) Suponha que, em vez disso, a rolha permaneça ligada à mola e a distenda 1,5 cm antes de ocorrer a separação. Qual é, nesse caso, a velocidade da rolha no momento da separação?

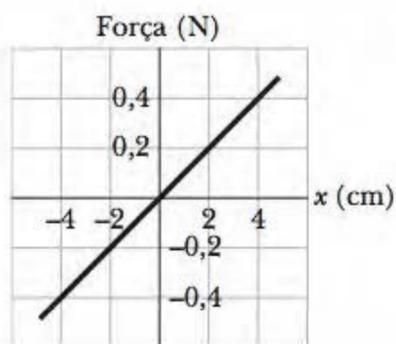
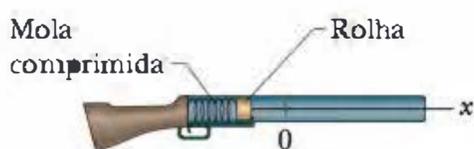



Figura 8-39 Problema 28.

••29 Na Fig. 8-40, um bloco de massa m = 12 kg é liberado a partir do repouso em um plano inclinado sem atrito de ângulo θ = 30°. Abaixo do bloco há uma mola que pode ser comprimida 2,0 cm por uma força de 270 N. O bloco para momentaneamente após comprimir a mola 5,5 cm. (a) Que distância o bloco desce ao longo do plano da posição de repouso inicial até o ponto em que para momentaneamente? (b) Qual é a velocidade do bloco no momento em que entra em contato com a mola?

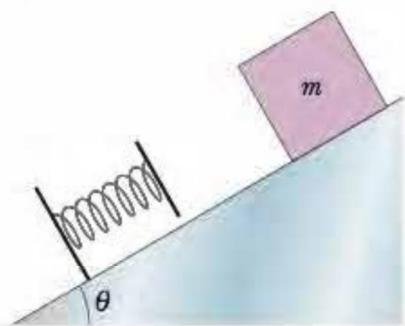



Figura 8-40 Problemas 29 e 35.

••30 Uma caixa de pão de 2,0 kg sobre um plano inclinado sem atrito de ângulo θ = 40,0° está presa, por uma corda que passa por uma polia, a uma mola de constante elástica k = 120 N/m, como mostra a Fig. 8-41. A caixa é liberada a partir do repouso quando a mola se encontra relaxada. Suponha que a massa e o atrito da polia sejam desprezíveis. (a) Qual é a velocidade da caixa após percorrer 10 cm? (b) Que distância o bloco percorre do ponto em que foi liberado até o ponto em que para momentaneamente e quais são (c) o módulo e (d) o sentido (para cima ou para baixo ao longo do plano) da aceleração do bloco no instante em que para momentaneamente?

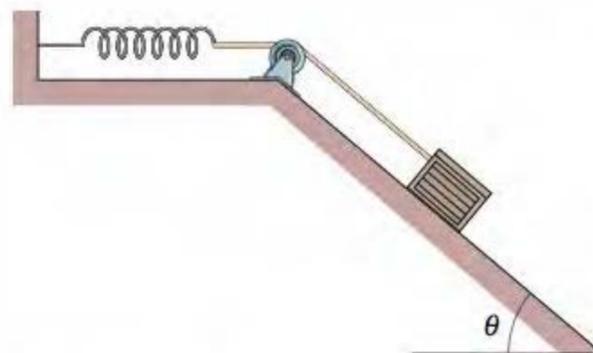



Figura 8-41 Problema 30.

••31 Um bloco de massa m = 2,00 kg é apoiado em uma mola em um plano inclinado sem atrito de ângulo θ = 30,0° (Fig. 8-42). (O bloco não está preso à mola.) A mola, de constante elástica k = 19,6 N/cm, é comprimida 20 cm e depois liberada. (a) Qual é a energia potencial elástica da mola comprimida? (b) Qual é a variação da energia potencial gravitacional do sistema bloco−Terra quando o bloco se move do ponto em que foi liberado até o ponto mais alto que atinge no plano inclinado? (c) Qual é a distância percorrida pelo bloco ao longo do plano inclinado até atingir a altura máxima?

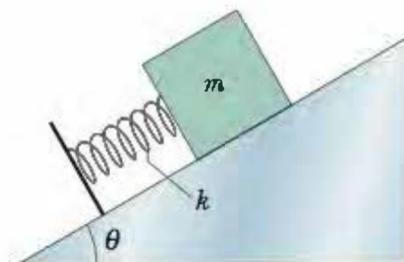



Figura 8-42 Problema 31.

••32 Na Fig. 8-43, uma corrente é mantida sobre uma mesa sem atrito com um quarto do comprimento pendurado fora da mesa. Se a corrente tem um comprimento L = 28 cm e massa m = 0,012 kg, qual é o trabalho necessário para puxar a parte pendurada de volta para cima da mesa?

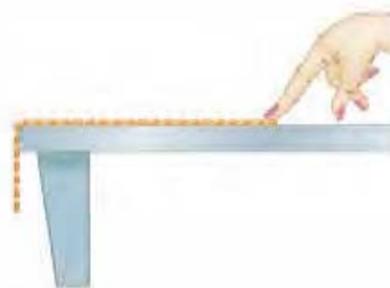



Figura 8-43 Problema 32.

•••33 Na Fig. 8-44, uma mola com k = 170 N/m está presa no alto de um plano inclinado sem atrito de ângulo θ = 37,0°. A extremidade inferior do plano inclinado está a uma distância D = 1,00 m da extremidade da mola, a qual se encontra relaxada. Uma lata de 2,00 kg é empurrada contra a mola até a mola ser comprimida 0,200 m e depois liberada a partir do repouso. (a) Qual é a velocidade da lata

no instante em que a mola retorna ao comprimento relaxado (que é o momento em que a lata perde contato com a mola)? (b) Qual é a velocidade da lata ao atingir a extremidade inferior do plano inclinado?

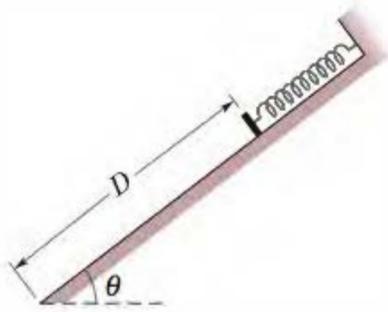



Figura 8-44 Problema 33.

•••**34** Um menino está inicialmente sentado no alto de um monte hemisférico de gelo de raio R = 13,8 m. Ele começa a deslizar para baixo com uma velocidade inicial tão pequena que pode ser desprezada (Fig. 8-45). Suponha que o atrito com o gelo seja desprezível. Em que altura o menino perde contato com o gelo?

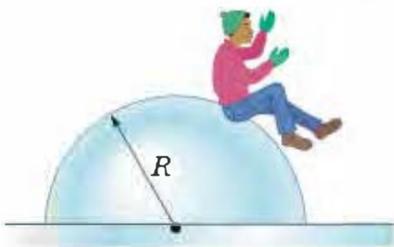



Figura 8-45 Problema 34.

•••**35** Na Fig. 8-40, um bloco de massa m = 3,20 kg desliza para baixo, a partir do repouso, percorre uma distância d em um plano inclinado de ângulo θ = 30,0° e se choca com uma mola de constante elástica 431 N/m. Quando o bloco para momentaneamente, a mola fica comprimida 21,0 cm. Quais são (a) a distância d e (b) a distância entre o ponto do primeiro contato do bloco com a mola e o ponto onde a velocidade do bloco é máxima?

•••**36** Duas meninas estão disputando um jogo no qual tentam acertar uma pequena caixa no chão com uma bola de gude lançada por um canhão de mola montado em uma mesa. A caixa está a uma distância horizontal D = 2,20 m da borda da mesa; veja a Fig. 8-46. Lia comprime a mola 1,10 cm, mas o centro da bola de gude cai 27,0 cm antes do centro da caixa. De quanto Rosa deve comprimir a mola para acertar a caixa? Suponha que o atrito da mola e da bola com o canhão seja desprezível.

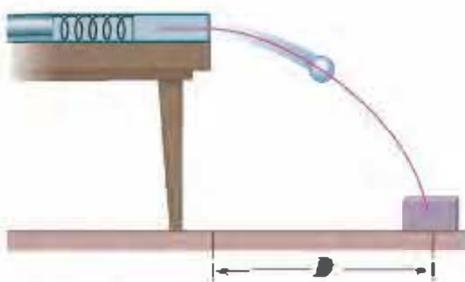



Figura 8-46 Problema 36.

•••**37** Uma corda uniforme com 25 cm de comprimento e 15 g de massa está presa horizontalmente em um teto. Mais tarde, é pendurada verticalmente, com apenas uma das extremidades presa no teto. Qual é a variação da energia potencial da corda devido a esta mudança de posição? (*Sugestão:* considere um trecho infinitesimal da corda e use uma integral.)

Seção 8-6 Interpretação de uma Curva de Energia Potencial

••**38** A Fig. 8-47 mostra um gráfico da energia potencial U em função da posição x para uma partícula de 0,200 kg que pode se deslocar apenas ao longo de um eixo x sob a influência de uma força conservativa. Três dos valores mostrados no gráfico são U_A = 9,00 J, U_C = 20,00 J e U_D = 24,00 J. A partícula é liberada no ponto onde U forma uma "barreira de potencial" de "altura" U_B = 12,00 J, com uma energia cinética de 4,00 J. Qual é a velocidade da partícula (a) em x = 3,5 m e (b) em x = 6,5 m? Qual é a posição do ponto de retorno (c) do lado direito e (d) do lado esquerdo?

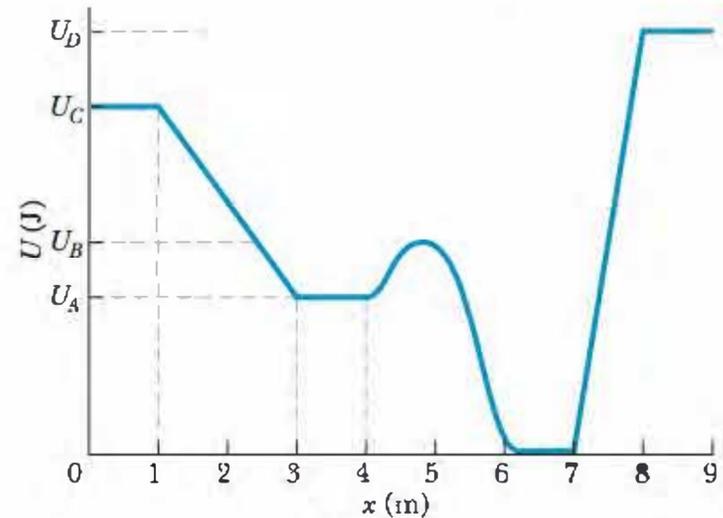



Figura 8-47 Problema 38.

••**39** A Fig. 8-48 mostra um gráfico da energia potencial U em função da posição x para uma partícula de 0,90 kg que pode se deslocar apenas ao longo de um eixo x. (Forças dissipativas não estão envolvidas.) Os três valores mostrados no gráfico são U_A = 15,0 J, U_B = 35,0 J e U_C = 45,0 J. A partícula é liberada em x = 4,5 m com uma velocidade inicial de 7,0 m/s, no sentido negativo de x. (a) Se a partícula puder chegar ao ponto x = 1,0 m, qual será sua velocidade nesse ponto? Se não puder, qual será o ponto de retorno? Quais são (b) o módulo e (c) a orientação da força experimentada pela partícula quando ela começa a se mover para a esquerda do ponto x = 4,0 m? Suponha que a partícula seja liberada no mesmo ponto e com a mesma velocidade, mas o sentido da velocidade seja o sentido positivo de x. (d) Se a partícula puder chegar ao ponto x = 7,0 m, qual será sua velocidade nesse ponto? Se não puder, qual será o ponto de retorno? Quais são (e) o módulo e (f) a orientação da força experimentada pela partícula quando ela começa a se mover para a direita do ponto x = 5,0 m?

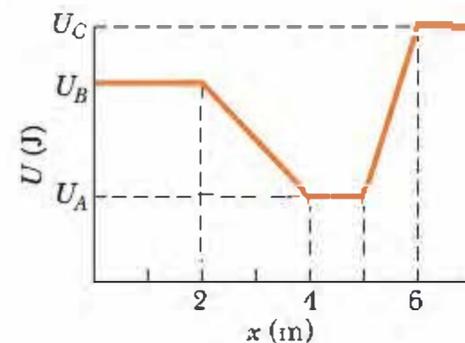



Figura 8-48 Problema 39.

••**40** A energia potencial de uma molécula diatômica (um sistema de dois átomos, como H_2 ou O_2) é dada por

$$U = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6},$$

onde r é a distância entre os átomos da molécula e A e B são constantes positivas. Esta energia potencial está associada à força de ligação entre os dois átomos. (a) Determine a *distância de equilíbrio*, ou seja, a distância entre os átomos para a qual as forças a que os átomos estão submetidos é nula. A força é repulsiva ou atrativa se a distância é (b) menor e (c) maior que a distância de equilíbrio?

•••41 Uma única força conservativa $F(x)$ age sobre uma partícula de 1,0 kg que se move ao longo de um eixo x. A energia potencial $U(x)$ associada a $F(x)$ é dada por

$$U(x) = -4x\,e^{-x/4}\ \text{J},$$

onde x está em metros. Em $x = 5{,}0$ m, a partícula possui uma energia cinética de 2,0 J. (a) Qual é a energia mecânica do sistema? (b) Faça um gráfico de $U(x)$ em função de x para $0 \leq x \leq 10$ m e plote, no mesmo gráfico, a reta que representa a energia mecânica do sistema. Use o gráfico do item (b) para determinar (c) o menor valor de x que a partícula pode atingir e (d) o maior valor de x que a partícula pode atingir. Use o gráfico do item (b) para determinar (e) a energia cinética máxima da partícula e (f) o valor de x para o qual a energia cinética atinge este valor. (g) Escreva uma expressão para $F(x)$, em newtons, em função de x, em metros. (h) $F(x) = 0$ para que valor (finito) de x?

Seção 8-7 Trabalho Realizado por uma Força Externa sobre um Sistema

•42 Um operário empurra um caixote de 27 kg, com velocidade constante, por 9,2 m, ao longo de um piso plano, com uma força orientada 32° abaixo da horizontal. Se o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o piso é 0,20, quais são (a) o trabalho realizado pelo operário e (b) o aumento da energia térmica do sistema bloco-piso?

•43 Um collie arrasta a caixa de dormir em um piso, aplicando uma força horizontal de 8,0 N. O módulo da força de atrito cinético que age sobre a caixa é 5,0 N. Quando a caixa é arrastada por uma distância de 0,7 m, quais são (a) o trabalho realizado pela força do cão e (b) o aumento de energia térmica da caixa e do piso?

••44 Uma força horizontal de módulo 35,0 N empurra um bloco de massa 4,00 kg em um piso no qual o coeficiente de atrito cinético é 0,600. (a) Qual é o trabalho realizado por essa força sobre o sistema bloco–piso quando o bloco sofre um deslocamento de 3,00 m? (b) Durante esse deslocamento, a energia térmica do bloco aumenta de 40,0 J. Qual é o aumento da energia térmica do piso? (c) Qual é o aumento da energia cinética do bloco?

••45 Uma corda é usada para puxar um bloco de 3,57 kg com velocidade constante, por 4,06 m, em um piso horizontal. A força que a corda exerce sobre o bloco é 7,68 N, 15,0° acima da horizontal. Quais são (a) o trabalho realizado pela força da corda, (b) o aumento na energia térmica do sistema bloco-piso e (c) o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o piso?

Seção 8-8 Conservação da Energia

•46 Um jogador de beisebol arremessa uma bola com uma velocidade inicial de 81,8 mi/h. Imediatamente antes de outro jogador segurar a bola na mesma altura, sua velocidade é 110 pés/s. De quanto é reduzida, em pés-libras, a energia mecânica do sistema bola–Terra devido ao arrasto do ar? (A massa de uma bola de beisebol é 9,0 onças.)

•47 Um disco de plástico de 75 g é arremessado de um ponto 1,1 m acima do solo, com uma velocidade escalar de 12 m/s. Quando o disco atinge uma altura de 2,1 m, sua velocidade é 10,5 m/s. Qual é a redução da E_{mec} do sistema disco-Terra devido ao arrasto do ar?

•48 Na Fig. 8-49, um bloco desliza para baixo em um plano inclinado. Enquanto se move do ponto A para o ponto B, que estão separados por uma distância de 5,0 m, uma força $\vec{F}$, com módulo de 2,0 N e dirigida para baixo ao longo do plano inclinado, age sobre o bloco. O módulo da força de atrito que age sobre o bloco é 10 N. Se a energia cinética do bloco aumenta de 35 J entre A e B, qual é o trabalho realizado pela força gravitacional sobre o bloco enquanto ele se move de A até B?

A
B

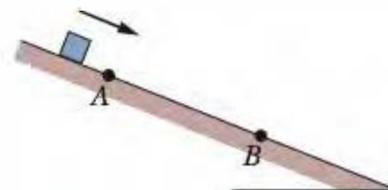



Figura 8-49 Problemas 48 e 71.

•49 Um urso de 25 kg escorrega, a partir do repouso, 12 m para baixo em um tronco de pinheiro, movendo-se com uma velocidade de 5,6 m/s imediatamente antes de chegar ao chão. (a) Qual é a variação da energia potencial gravitacional do sistema urso–Terra durante o deslizamento? (b) Qual é a energia cinética do urso imediatamente antes de chegar ao chão? (c) Qual é a força de atrito média que age sobre o urso enquanto está escorregando?

•50 Um esquiador de 60 kg deixa a extremidade de uma rampa de salto de esqui com uma velocidade de 24 m/s 25° acima da horizontal. Suponha que, devido ao arrasto do ar, o esquiador retorne ao solo com uma velocidade de 22 m/s, aterrissando 14 m verticalmente abaixo da extremidade da rampa. Do início do salto até o retorno ao solo, de quanto a energia mecânica do sistema esquiador–Terra foi reduzida devido ao arrasto do ar?

•51 Durante uma avalanche, uma pedra de 520 kg desliza a partir do repouso, descendo a encosta de uma montanha que tem 500 m de comprimento e 300 m de altura. O coeficiente de atrito cinético entre a pedra e a encosta é 0,25. (a) Se a energia potencial gravitacional U do sistema rocha–Terra é nula na base da montanha, qual é o valor de U imediatamente antes de começar a avalanche? (b) Qual é a energia transformada em energia térmica durante a avalanche? (c) Qual é a energia cinética da pedra ao chegar à base da montanha? (d) Qual é a velocidade da pedra nesse instante?

••52 Um biscoito de mentira, deslizando em uma superfície horizontal, está preso a uma das extremidades de uma mola horizontal de constante elástica $k = 400$ N/m; a outra extremidade da mola está fixa. O biscoito possui uma energia cinética de 20,0 J ao passar pela posição de equilíbrio da mola. Enquanto o biscoito desliza, uma força de atrito de módulo 10,0 N age sobre ele. (a) Que distância o biscoito desliza a partir da posição de equilíbrio antes de parar momentaneamente? (b) Qual é a energia cinética do biscoito quando ele passa de volta pela posição de equilíbrio?

••53 Na Fig. 8-50, um bloco de 3,5 kg é acelerado a partir do repouso por uma mola comprimida de constante elástica 640 N/m. O bloco deixa a mola no seu comprimento relaxado e se desloca em um piso horizontal com um coeficiente de atrito cinético $\mu_k = 0{,}25$. A força de atrito para o bloco em uma distância $D = 7{,}8$ m. Determine (a) o aumento de energia térmica do sistema bloco-piso, (b) a energia cinética máxima do bloco e (c) o comprimento da mola quando estava comprimida.

Sem atrito D (μ_k)

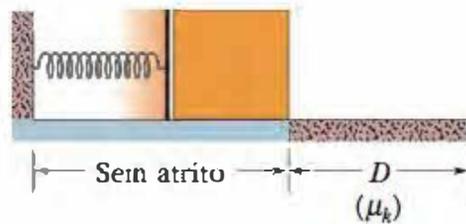



Figura 8-50 Problema 53.

••**54** Uma criança que pesa 267 N desce em um escorrega de 6,1 m que faz um ângulo de 20° com a horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre o escorrega e a criança é 0,10. (a) Qual é a energia transformada em energia térmica? (b) Se a criança começa a descida no alto do escorrega com uma velocidade de 0,457 m/s, qual é sua velocidade ao chegar ao chão?

••**55** Na Fig. 8-51, um bloco de massa m = 2,5 kg desliza de encontro a uma mola de constante elástica k = 320 N/m. O bloco para após comprimir a mola 7,5 cm. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o piso é 0,25. Enquanto o bloco está em contato com a mola e sendo levado ao repouso, determine (a) o trabalho realizado pela mola e (b) o aumento da energia térmica do sistema bloco–piso. (c) Qual é a velocidade do bloco imediatamente antes de se chocar com a mola?

x

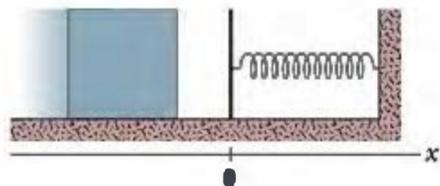



Figura 8-51 Problema 55.

••**56** Você empurra um bloco de 2,0 kg contra uma mola horizontal, comprimindo-a 15 cm. Em seguida, solta o bloco e a mola o faz deslizar sobre uma mesa. O bloco para depois de percorrer 75 cm a partir do ponto em que foi solto. A constante elástica da mola é 200 N/m. Qual é o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a mesa?

••**57** Na Fig. 8-52, um bloco desliza ao longo de uma pista, de um nível para outro mais elevado, passando por um vale intermediário. A pista não possui atrito até o bloco atingir o nível mais alto, onde uma força de atrito para o bloco depois que ele percorre uma distância d. A velocidade inicial v_0 do bloco é 6,0 m/s, a diferença de altura h é 1,1 m e μ_k é 0,60. Determine o valor de d.

$\vec{v}_0$ $\mu = 0$ h d μ_k

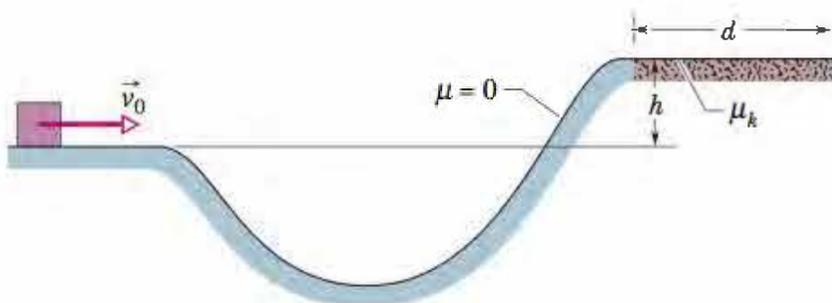



Figura 8-52 Problema 57.

••**58** Um pote de biscoitos está subindo um plano inclinado de 40°. Em um ponto a 55 cm de distância da base do plano inclinado (medidos ao longo do plano), o pote possui uma velocidade de 1,4 m/s. O coeficiente de atrito cinético entre o pote e o plano inclinado é 0,15. (a) Que distância o pacote ainda sobe ao longo do plano? (b) Qual é a velocidade do bloco ao chegar novamente à base do plano inclinado? (c) As respostas dos itens (a) e (b) aumentam, diminuem ou permanecem as mesmas quando o coeficiente de atrito cinético é reduzido (sem alterar a velocidade e a posição do pote)?

••**59** Uma pedra que pesa 5,29 N é lançada verticalmente a partir do nível do solo com uma velocidade inicial de 20,0 m/s e o arrasto do ar sobre ela é de 0,265 N durante todo o percurso. Determine (a) a altura máxima alcançada pela pedra e (b) sua velocidade imediatamente antes de se chocar com o solo.

••**60** Um pacote de 4,0 kg começa a subir um plano inclinado de 30° com uma energia cinética de 128 J. Que distância percorre antes de parar se o coeficiente de atrito cinético entre o pacote e o plano é 0,30?

••**61** Quando um besouro salta-martim está deitado de costas, pode pular encurvando bruscamente o corpo, o que converte a energia armazenada em um músculo em energia mecânica, produzindo um estalo audível. O videoteipe de um desses pulos mostra que um besouro de massa $m = 4{,}0 \times 10^{-6}$ kg se desloca 0,77 mm na vertical durante um salto e consegue atingir uma altura máxima h = 0,30 m. Qual é o valor médio, durante o salto, (a) do módulo da força externa exercida pelo piso sobre as costas do besouro e (b) do módulo da aceleração do besouro em unidades de g?

•••**62** Na Fig. 8-53, um bloco desliza em uma pista sem atrito até chegar a um trecho de comprimento L = 0,75 cm, que começa a uma altura h = 2,0 m em uma rampa de ângulo θ = 30°. Nesse trecho, o coeficiente de atrito cinético é 0,40. O bloco passa pelo ponto A com uma velocidade de 8,0 m/s. Se o bloco pode chegar ao ponto B (onde o atrito acaba), qual é sua velocidade neste ponto e, se não pode, qual é a maior altura que atinge acima de A?

B L h θ A

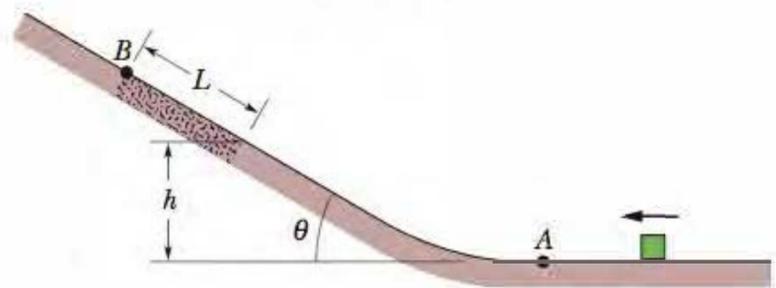



Figura 8-53 Problema 62.

•••**63** O cabo do elevador de 1800 kg da Fig. 8-54 se rompe quando o elevador está parado no primeiro andar, onde o piso se encontra a uma distância d = 3,7 m acima de uma mola de constante elástica k = 0,15 MN/m. Um dispositivo de segurança prende o elevador aos trilhos laterais, de modo que uma força de atrito constante de 4,4 kN passa a se opor ao movimento. (a) Determine a velocidade do elevador no momento em que se choca com a mola. (b) Determine a máxima redução x do comprimento da mola (a força de atrito continua a agir enquanto a mola está sendo comprimida). (c) Determine a distância que o elevador sobe de volta no poço. (d) Usando a lei de conservação da energia, determine a distância total aproximada que o elevador percorre antes de parar. (Suponha que a força de atrito sobre o elevador seja desprezível quando o elevador está parado.)

d k

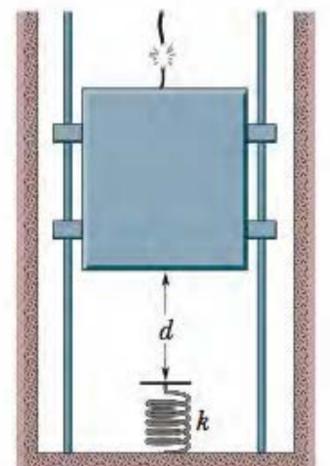



Figura 8-54 Problema 63.

•••**64** Na Fig. 8-55, um bloco é liberado a partir do repouso a uma altura d = 40 cm, desce uma rampa sem atrito e chega a um

primeiro trecho plano, de comprimento d, onde o coeficiente de atrito cinético é 0,50. Se o bloco ainda está se movendo, desce uma segunda rampa sem atrito, de altura $d/2$, e chega a um segundo trecho plano, onde o coeficiente de atrito cinético também é 0,50. Se o bloco ainda está se movendo, sobe uma rampa sem atrito até parar (momentaneamente). Onde o bloco para? Se a parada final é em um trecho plano, diga em qual deles e calcule a distância L que o bloco percorre a partir da extremidade esquerda desse platô. Se o bloco alcança a rampa, calcule a altura H acima do trecho plano mais baixo onde o bloco para momentaneamente.

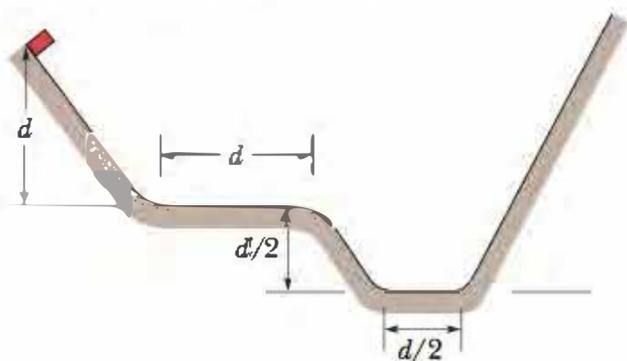



Figura 8-55 Problema 64.

•••65 Uma partícula pode deslizar em uma pista com extremidades elevadas e uma parte central plana, como mostra a Fig. 8-56. A parte plana tem um comprimento $L = 40$ cm. Os trechos curvos da pista não possuem atrito, mas na parte plana o coeficiente de atrito cinético é $\mu_k = 0,20$. A partícula é liberada a partir do repouso no ponto A, que está a uma altura $L/2$. A que distância da extremidade esquerda da parte plana a partícula finalmente para?

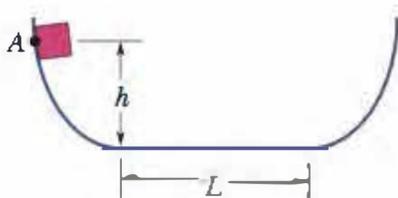



Figura 8-56 Problema 65.

Problemas Adicionais

66 Uma preguiça de 3,2 kg está pendurada em uma árvore, 3,0 m acima do solo. (a) Qual é a energia potencial gravitacional do sistema preguiça–Terra se tomarmos o ponto de referência $y = 0$ como o nível do solo? Se a preguiça cai da árvore e o arrasto do ar é desprezível, quais são (b) a energia cinética e (c) a velocidade da preguiça no momento em que chega ao solo?

67 Uma mola ($k = 200$ N/m) está presa no alto de um plano inclinado sem atrito com $\theta = 40°$ (Fig. 8-57). Um bloco de 1,0 kg é lançado para cima ao longo do plano, de uma posição inicial que está a uma distância $d = 0,60$ m da extremidade da mola relaxada, com uma energia cinética inicial de 16 J. (a) Qual é a energia cinética do bloco no instante em que comprime a mola 0,20 m? (b) Com que energia cinética o bloco deve ser lançado ao longo do plano para que fique momentaneamente parado depois de comprimir a mola 0,40 m?

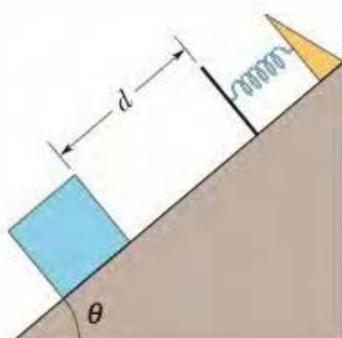



Figura 8-57 Problema 67.

68 Um projétil de 0,55 kg é lançado da borda de um penhasco com uma energia cinética inicial de 1550 J. A maior distância vertical para cima que o projétil atinge em relação ao ponto de lançamento é +140 m. Qual é a componente (a) horizontal e (b) vertical da velocidade de lançamento? (c) No instante em que a componente vertical da velocidade é 65 m/s, qual é o deslocamento vertical em relação ao ponto de lançamento?

69 Na Fig. 8-58, a polia tem massa desprezível e tanto ela como o plano inclinado não possuem atrito. O bloco A tem uma massa de 1,0 kg, o bloco B tem uma massa de 2,0 kg e o ângulo θ é 30°. Se os blocos são liberados a partir do repouso com o fio que os conecta esticado, qual é a energia cinética total após o bloco B ter descido 25 cm?

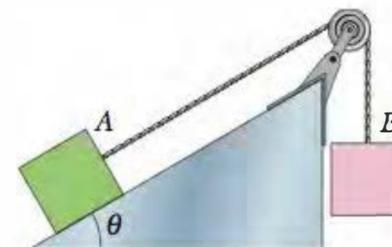



Figura 8-58 Problema 69.

70 Na Fig. 8-36, a corda tem um comprimento $L = 120$ cm e possui uma bola presa em uma das extremidades, enquanto a outra está fixa. Existe um pino no ponto P. Liberada a partir do repouso, a bola desce até a corda tocar o pino; em seguida, a bola sobe e começa a girar em torno do pino. Qual é o menor valor da distância d para que a bola dê uma volta completa em torno do pino? (*Sugestão:* a bola deve ainda estar se movendo no ponto mais alto da volta. Você sabe por quê?)

71 Na Fig. 8-49, um bloco desce uma rampa sem atrito com uma certa velocidade inicial. A velocidade do bloco nos pontos A e B é 2,00 m/s e 2,60 m/s, respectivamente. Em seguida, é novamente lançado para baixo, mas desta vez sua velocidade no ponto A é 4,00 m/s. Qual é a velocidade do bloco no ponto B?

72 Dois picos nevados estão $H = 850$ m e $h = 750$ m acima do vale que os separa. Uma pista de esquiação, com um comprimento total de 3,2 km e uma inclinação média $\theta = 30°$, liga os dois picos (Fig. 8-59). (a) Um esquiador parte do repouso no cume do monte mais alto. Com que velocidade chega ao cume do monte mais baixo se não usar os bastões para dar impulso? Ignore o atrito. (b) Qual é o valor aproximado do coeficiente de atrito cinético entre a neve e os esquis para que o esquiador pare exatamente no cume do monte mais baixo?

Figura 8-59 Problema 72.

73 A temperatura de um cubo de plástico é medida enquanto o cubo é empurrado 3,0 m em um piso, com velocidade constante, por uma força horizontal de 15 N. As medidas revelam que a energia térmica do cubo aumentou 20 J. Qual foi o aumento da energia térmica do piso ao longo do qual o cubo deslizou?

74 Uma esquiadora que pesa 600 N passa pelo alto de um morro circular sem atrito de raio $R = 20$ m (Fig. 8-60). Suponha que os

efeitos da resistência do ar sejam desprezíveis. Na subida, a esquiadora passa pelo ponto B, onde o ângulo é $\theta = 20°$, com uma velocidade de 8,0 m/s. (a) Qual é a velocidade da esquiadora no alto do morro (ponto A) se ela esquia sem usar os bastões? (b) Qual a menor velocidade que a esquiadora deve ter em B para conseguir chegar ao alto do monte? (c) As respostas dos itens anteriores serão maiores, menores ou iguais se o peso da esquiadora for aumentado para 700N?

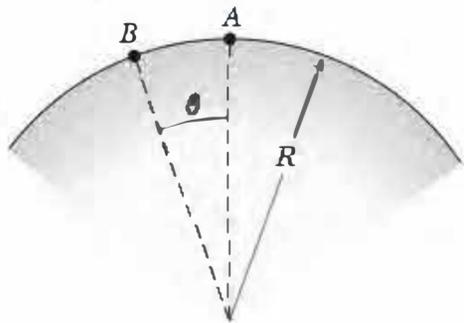



Figura 8-60 Problema 74.

75 Para formar um pêndulo, uma bola de 0,092 kg é presa em uma das extremidades de uma haste de 0,62 m de comprimento e massa desprezível; a outra extremidade da haste é montada em um eixo. A haste é levantada até a bola ficar verticalmente acima do eixo e liberada a partir do repouso. Quando a bola atinge o ponto mais baixo, quais são (a) a velocidade da bola e (b) a tensão da haste? Em seguida, a haste é colocada na horizontal e liberada a partir do repouso. (c) Para que ângulo em relação à vertical a tensão da haste é igual ao peso da bola? (d) Se a massa da bola aumenta, a resposta do item (c) aumenta, diminui ou permanece a mesma?

76 Uma partícula se desloca ao longo de um eixo x, primeiro no sentido positivo, do ponto $x = 1,0$ m até o ponto $x = 4,0$ m, e depois no sentido negativo, de volta ao ponto $x = 1,0$ m, enquanto uma força externa age sobre a partícula. A força é paralela ao eixo x e pode ter valores diferentes no caso de deslocamentos no sentido positivo e no sentido negativo do eixo. A tabela a seguir mostra os valores (em newtons) em quatro situações, onde x está em metros:

Para fora	Para dentro
(a) $+3,0$	$-3,0$
(b) $+5,0$	$+5,0$
(c) $+2,0x$	$-2,0x$
(d) $+3,0x^2$	$+3,0x^2$

Determine o trabalho total realizado sobre a partícula pela força externa *durante a viagem de ida e volta* nas quatro situações. (e) Em que situações a força externa é conservativa?

77 Uma força conservativa $F(x)$ age sobre uma partícula de 2,0 kg que se move ao longo de um eixo x. A energia potencial $U(x)$ associada a $F(x)$ está plotada na Fig. 8-61. Quando a partícula se encontra em $x = 2,0$ m, a velocidade é $-1,5$ m/s. Quais são (a) o módulo e (b) o sentido de $F(x)$ nesta posição? Entre que posições (c) à esquerda e (d) à direita a partícula se move? (e) Qual é a velocidade da partícula em $x = 7,0$ m?

78 Em uma fábrica, caixotes de 300 kg são deixados cair verticalmente de uma máquina de empacotamento em uma esteira transportadora que se move a 1,20 m/s (Fig. 8-62). (A velocidade da esteira é mantida constante por um motor.) O coeficiente de atrito cinético entre a esteira e cada caixote é 0,400. Após um pequeno intervalo de tempo, deixa de haver deslizamento entre a esteira e o caixote, que passa a se mover com a mesma velocidade que a esteira. Para o intervalo de tempo no qual o caixote está deslizando sobre a esteira, calcule, tomando como referência um sistema de coordenadas em repouso em relação à fábrica, (a) a energia cinética total fornecida ao caixote, (b) o módulo da força de atrito cinético que age sobre o caixote e (c) a energia total fornecida pelo motor. (d) Explique por que as respostas dos itens (a) e (c) são diferentes.

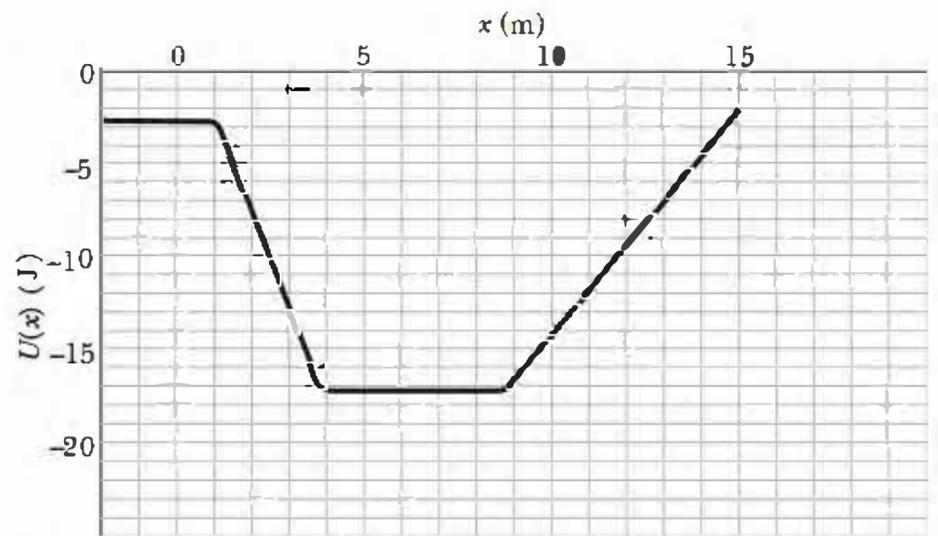



Figura 8-61 Problema 77.

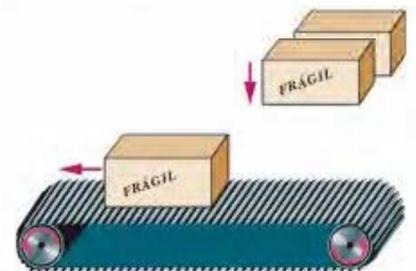



Figura 8-62 Problema 78.

79 Um carro de 1500 kg começa a descer, a 30 km/h, uma ladeira com uma inclinação de 5,0°. O motor do carro está desligado e as únicas forças presentes são a força de atrito exercida pela estrada e a força gravitacional. Após o veículo ter se deslocado 50 m, a velocidade é 40 km/h. (a) De quanto a energia mecânica do carro foi reduzida pela força de atrito? (b) Qual é o módulo da força de atrito?

80 Na Fig. 8-63, um bloco de granito de 1400 kg é puxado para cima por um cabo, em um plano inclinado, com uma velocidade constante de 1,34 m/s. As distâncias indicadas são $d_1 = 40$ m e $d_2 = 30$ m. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano inclinado é 0,40. Qual é a potência desenvolvida pela força aplicada pelo cabo?

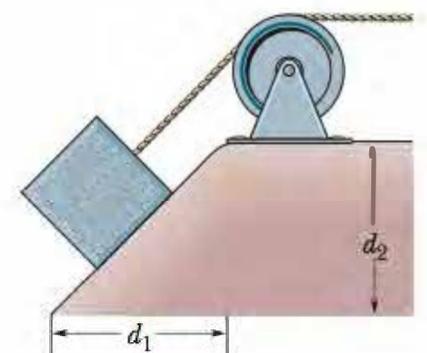



Figura 8-63 Problema 80.

81 Uma partícula pode se mover apenas ao longo de um eixo x, sob a ação de forças conservativas (Fig. 8-64 e tabela). A partícula é liberada em $x = 5,00$ m com uma energia cinética $K = 14,0$ J e uma energia potencial $U = 0$. Se a partícula se move no sentido negativo do eixo x, qual é o valor (a) de K e (b) de U em $x = 2,00$ m e o valor (c) de K e (d) de U em $x = 0$? Se a partícula se move

no sentido positivo do eixo x, qual é o valor (e) de K e (f) de U em $x = 11{,}0$ m, o valor (g) de K e (h) de U em $x = 12{,}0$ m e o valor (i) de K e (j) de U em $x = 13{,}0$ m? (k) Plote $U(x)$ em função de x para o intervalo de $x = 0$ a $x = 13{,}0$ m.

Figura 8-64 Problemas 81 e 82.

A partícula é liberada a partir do repouso em $x = 0$. Quais são (l) a energia cinética em $x = 5{,}0$ m e (m) o valor máximo de x, $x_{máx}$, atingido pela partícula? (n) O que acontece com a partícula após atingir $x_{máx}$?

Intervalo	Força
0 a 2,00 m	$\vec{F}_1 = +(3{,}00\ \text{N})\hat{i}$
2,00 m a 3,00 m	$\vec{F}_2 = +(5{,}00\ \text{N})\hat{i}$
3,00 m a 8,00 m	$F = 0$
8,00 m a 11,0 m	$\vec{F}_3 = -(4{,}00\ \text{N})\hat{i}$
11,0 m a 12,0 m	$\vec{F}_4 = -(1{,}00\ \text{N})\hat{i}$
12,0 m a 15,0 m	$F = 0$

82 Com o arranjo de forças do Problema 81, uma partícula de 2,00 kg é liberada em $x = 5{,}00$ m, com uma velocidade de 3,45 m/s, no sentido negativo do eixo x. (a) Se a partícula pode chegar ao ponto $x = 0$ m, qual é a velocidade da partícula nesse ponto; se não pode, qual é o ponto de retorno? Suponha que a partícula se move no sentido positivo de x quando é liberada em $x = 5{,}00$ m com uma velocidade de 3,45 m/s. (b) Se a partícula pode chegar ao ponto $x = 13{,}0$ m, qual é a velocidade da partícula nesse ponto; se não pode, qual é o ponto de retorno?

83 Um bloco de 15 kg sofre uma aceleração de 2,0 m/s² em uma superfície horizontal sem atrito que faz sua velocidade aumentar de 10 m/s para 30 m/s. Qual é (a) a variação da energia mecânica do bloco e (b) a taxa média com a qual a energia é transferida para o bloco? Qual é a taxa instantânea de transferência de energia quando a velocidade do bloco é (c) 10 m/s e (d) 30 m/s?

84 Uma certa mola *não obedece* à lei de Hooke. A força (em newtons) que a mola exerce quando está distendida de um comprimento x (em metros) tem um módulo de $52{,}8x + 38{,}4x^2$ e o sentido oposto ao da força responsável pela distensão. (a) Calcule o trabalho necessário para distender a mola de $x = 0{,}500$ m para $x = 1{,}00$ m. (b) Com uma extremidade da mola fixa, uma partícula de massa 2,17 kg é presa à outra extremidade quando a mola está distendida de $x = 1{,}00$ m. Se a partícula é liberada a partir do repouso, qual é a velocidade da partícula no instante em que a distensão da mola é $x = 0{,}500$ m? (c) A força exercida pela mola é conservativa ou não conservativa? Justifique sua resposta.

85 A cada segundo, 1200 m³ de água passam por uma queda d'água de 100 m de altura. Três quartos da energia cinética ganha pela água ao cair são transformados em energia elétrica por um gerador hidrelétrico. A que taxa o gerador produz energia elétrica? (A massa de 1 m³ de água é 1000 kg.)

86 Na Fig. 8-65, um pequeno bloco parte do ponto A com uma velocidade de 7,0 m/s. O percurso é sem atrito até chegar o trecho de comprimento $L = 12$ m, onde o coeficiente de atrito cinético é 0,70. As alturas indicadas são $h_1 = 6{,}0$ m e $h_2 = 2{,}0$ m. Qual é a velocidade do bloco (a) no ponto B e (b) no ponto C? (c) O bloco atinge o ponto D? Caso a resposta seja afirmativa, determine a velocidade do bloco nesse ponto; caso a resposta seja negativa, calcule a distância que o bloco percorre na parte com atrito.

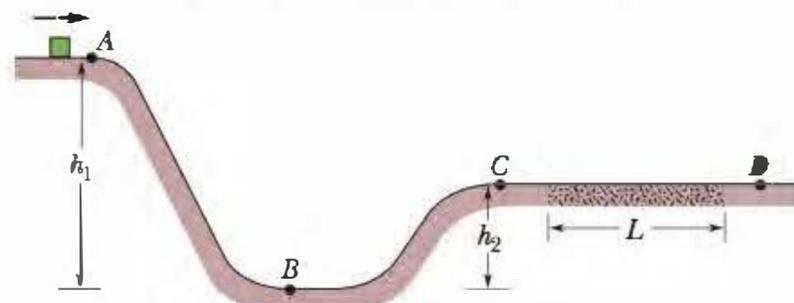



Figura 8-65 Problema 86.

87 Uma haste rígida de massa desprezível e comprimento L possui uma bola de massa m presa a uma das extremidades (Fig. 8-66). A outra extremidade está presa a um eixo de tal forma que a bola pode se mover em uma circunferência vertical. Primeiro, suponha que não existe atrito no eixo. A bola é lançada para baixo a partir da posição horizontal A com velocidade v_0 e para exatamente no ponto D. (a) Escreva uma expressão para v_0 em termos de L, m e g. (b) Qual é a tensão da haste quando a bola passa pelo ponto B? (c) Coloca-se um pouco de areia no eixo para aumentar o atrito. Depois disso, a bola chega apenas ao ponto C quando é lançada a partir de A com a mesma velocidade de antes. Qual é o decréscimo de energia mecânica durante o movimento? (d) Qual é o decréscimo de energia mecânica quando a bola finalmente entra em repouso no ponto B após várias oscilações?

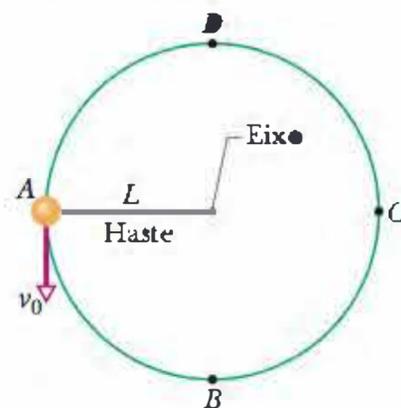



Figura 8-66 Problema 87.

88 Uma bola de aniversário cheia d'água, com uma massa de 1,50 kg, é lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 3,00 m/s. (a) Qual é a energia cinética da bola no momento em que é lançada? (b) Qual é o trabalho realizado pela força gravitacional sobre a bola durante toda a subida? (c) Qual é a variação da energia potencial gravitacional do sistema bola–Terra durante toda a subida? (d) Se a energia potencial gravitacional é tomada como nula no ponto de lançamento, qual é seu valor quando a bola chega à altura máxima? (e) Se a energia potencial gravitacional é considerada nula na altura máxima, qual é seu valor no ponto do lançamento? (f) Qual é a altura máxima?

89 Uma lata de refrigerante de 2,50 kg é lançada verticalmente para baixo de uma altura de 4,00 m, com uma velocidade inicial de 3,00 m/s. O arrasto do ar sobre a lata é desprezível. Qual é a energia cinética da lata (a) quando chega ao solo no final da queda e (b) quando se encontra a meio caminho do solo? Qual é (c) a energia cinética da lata e (d) a energia potencial gravitacional do sistema lata–Terra 0,200 s antes de a lata chegar ao solo? Tome o ponto de referência $y = 0$ como o solo.

90 Uma força horizontal constante faz um baú de 50 kg subir 6,0 m em um plano inclinado de 30° com velocidade constante. O coeficiente de atrito cinético entre o baú e o plano inclinado é 0,20. Qual é (a) o trabalho realizado pela força e (b) o aumento da energia térmica do baú e do plano inclinado?

91 Dois blocos, de massas $M = 2{,}0$ kg e $2M$, estão presos a uma mola de constante elástica $k = 200$ N/m que tem uma das extremidades fixa, como mostra a Fig. 8-67. A superfície horizontal e a polia não possuem atrito e a polia tem massa desprezível. Os blocos são liberados a partir do repouso com a mola na posição relaxada. (a) Qual é a energia cinética total dos dois blocos após o bloco que está pendurado ter descido 0,090 m? (b) Qual é a energia cinética do bloco que está pendurado depois de descer 0,090 m? (c) Qual é a distância que o bloco pendurado percorre antes de parar momentaneamente pela primeira vez?

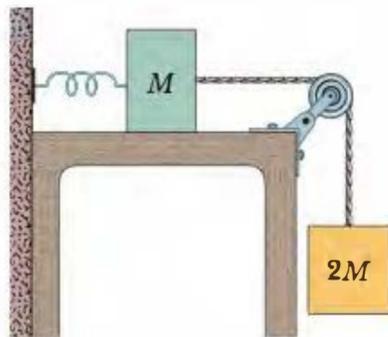



Figura 8-67 Problema 91.

92 Uma nuvem de cinzas vulcânicas está se movendo horizontalmente em solo plano quando encontra uma encosta com uma inclinação de 10°. A nuvem sobe 920 m antes de parar. Suponha que os gases aprisionados fazem as cinzas flutuarem, tornando assim desprezível a força de atrito exercida pelo solo; suponha também que a energia mecânica da nuvem é conservada. Qual era a velocidade inicial da nuvem?

93 Um escorrega de parquinho tem a forma de um arco de circunferência com 12 m de raio. A altura do escorrega é $h = 4{,}0$ m e o chão é tangente à circunferência (Fig. 8-68). Uma criança de 25 kg escorrega do alto do brinquedo, a partir do repouso, e ao chegar ao chão está com uma velocidade de 6,2 m/s. (a) Qual é o comprimento do escorrega? (b) Qual é a força de atrito média que age sobre a criança? Se, em vez do solo, uma reta vertical passando pelo *alto do escorrega* é tangente à circunferência, qual é (c) o comprimento do escorrega e (d) a força de atrito média que age sobre a criança?

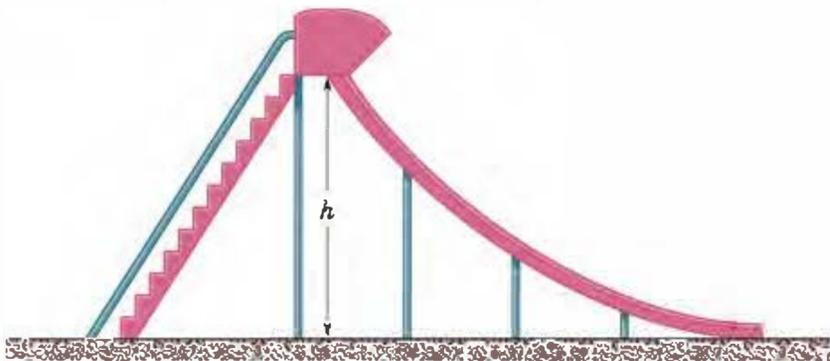



Figura 8-68 Problema 93.

94 O transatlântico de luxo *Queen Elizabeth 2* possui uma central elétrica a diesel com uma potência máxima de 92 MW a uma velocidade de cruzeiro de 32,5 nós. Que força propulsora é exercida sobre o navio a esta velocidade? (1 nó = 1,852 km/h.)

95 Um operário de uma fábrica deixa cair acidentalmente um caixote de 180 kg que estava sendo mantido em repouso no alto de uma rampa de 3,7 m de comprimento inclinada 39° em relação à horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre o caixote e a rampa e entre o caixote e o piso horizontal da fábrica é 0,28. (a) Qual é a velocidade do caixote ao chegar ao final da rampa? (b) Que distância adicional o caixote percorre no piso? (Suponha que a energia cinética do caixote não se altera com a passagem da rampa para o piso.) (c) As respostas dos itens (a) e (b) aumentam, diminuem ou permanecem as mesmas se a massa do caixote é reduzida à metade?

96 Se um jogador de beisebol de 70 kg chega a uma base depois de escorregar pelo chão com uma velocidade inicial de 10 m/s, (a) qual é o decréscimo da energia cinética do jogador e (b) qual é o aumento da energia térmica do corpo do jogador e do chão no qual escorrega?

97 Uma banana de 0,50 kg é arremessada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 4,00 m/s e alcança uma altura máxima de 0,80 m. Qual é a variação da energia mecânica do sistema banana–Terra causada pelo arrasto do ar durante a subida?

98 Uma ferramenta de metal é pressionada contra uma pedra de amolar giratória por uma força de 180 N para ser amolada. As forças de atrito entre a pedra de amolar e a ferramenta removem pequenos fragmentos da ferramenta. A pedra de amolar tem um raio de 20,0 cm e gira a 2,50 revoluções/s. O coeficiente de atrito cinético entre a pedra de amolar e a ferramenta é 0,320. A que taxa a energia está sendo transferida do motor que faz a pedra girar para a energia térmica da pedra e da ferramenta e para a energia cinética dos fragmentos removidos da ferramenta?

99 Um nadador se desloca na água a uma velocidade média de 0,22 m/s. A força de arrasto média é 110 N. Que potência média o nadador está desenvolvendo?

100 Um automóvel com passageiros pesa 16.400 N e está se movendo a 113 km/h quando o motorista pisa bruscamente no freio, bloqueando as rodas. A força de atrito exercida pela estrada sobre as rodas tem um módulo de 8230 N. Determine a distância que o automóvel percorre até parar.

101 Uma bola de 0,63 kg, atirada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 14 m/s, atinge uma altura máxima de 8,1 m. Qual é a variação da energia mecânica do sistema bola–Terra durante a subida da bola até a altura máxima?

102 O cume do monte Everest está 8850 acima do nível do mar. (a) Qual seria a energia gasta por um alpinista de 90 kg para escalar o monte Everest a partir do nível do mar, se a única força que tivesse que vencer fosse a força gravitacional? (b) Quantas barras de chocolate, a 1,25 MJ por barra, supririam essa energia? A resposta mostra que o trabalho usado para vencer a força gravitacional é uma fração muito pequena da energia necessária para escalar uma montanha.

103 Um velocista que pesa 670 N corre os primeiros 7,0 m de uma prova em 1,6 s, partindo do repouso e acelerando uniformemente. Qual é (a) a velocidade e (b) a energia cinética do velocista ao final dos 1,6 s? (c) Qual é a potência média desenvolvida pelo velocista durante o intervalo de 1,6 s?

104 Um objeto de 20 kg sofre a ação de uma força conservativa dada por $F = -3{,}0x - 5{,}0x^2$, com F em newtons e x em metros. Tome a energia potencial associada a essa força como nula quando o objeto está em $x = 0$. (a) Qual é a energia potencial associada à força quando o objeto está em $x = 2{,}0$ m? (b) Se o objeto possui uma velocidade de 4,0 m/s no sentido negativo do eixo x quando está em $x = 5{,}0$ m, qual é a velocidade ao passar pela origem? (c) Quais são as respostas dos itens (a) e (b) se a energia potencial do sistema é tomada como $-8{,}0$ J quando o objeto está em $x = 0$?

105 Uma máquina puxa 2,0 m para cima um tronco de árvore de 40 kg em uma rampa de 40° com velocidade constante, com a força da máquina paralela à rampa. O coeficiente de atrito cinético entre o tronco e a rampa é 0,40. Qual é (a) o trabalho realizado sobre o tronco pela força da máquina e (b) o aumento da energia térmica do tronco e da rampa?

106 A mola de uma espingarda de brinquedo tem uma constante elástica de 700 N/m. Para atirar uma bola, a mola é comprimida e a bola é introduzida no cano da espingarda. O gatilho libera a mola, que empurra a bola. A bola perde contato com a mola exatamente ao sair do cano. Quando a espingarda é inclinada para cima em um ângulo de 30° com a horizontal, uma bola de 57 g atinge uma altura máxima de 1,83 m acima da ponta do cano. Suponha que o arrasto do ar sobre a bola é desprezível. (a) Com que velocidade a mola lança a bola? (b) Supondo que o atrito da bola dentro do cano da pistola é desprezível, determine a compressão inicial da mola.

107 A única força que age sobre uma partícula é a força conservativa $\vec{F}$. Se a partícula está no ponto A, a energia potencial do sistema associada a $\vec{F}$ e à partícula é 40 J. Se a partícula se move do ponto A para o ponto B, o trabalho realizado por $\vec{F}$ sobre a partícula é +25 J. Qual é a energia potencial do sistema com a partícula no ponto B?

108 Em 1981, Daniel Goodwin escalou 443 m pela *fachada* do Edifício Sears, em Chicago, com o auxílio de ventosas e grampos de metal. (a) Estime a massa do alpinista e calcule a energia biomecânica (interna) transferida para a energia potencial gravitacional do sistema Goodwin–Terra durante a escalada. (b) Que energia seria preciso transferir se ele tivesse subido até a mesma altura pelo interior do prédio, usando as escadas?

109 Uma artista de circo de 60,0 kg escorrega 4,00 m a partir do repouso, descendo do alto de um poste até o chão. Qual é a energia cinética da artista ao chegar ao chão se a força de atrito que o poste exerce sobre ela (a) é desprezível (ela irá se machucar) e (b) tem um módulo de 500 N?

110 Um bloco de 5,0 kg é lançado para cima em um plano inclinado de 30° com uma velocidade de 5,0 m/s. Que distância o bloco percorre (a) se o plano não possui atrito e (b) se o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano é 0,40? (c) No último caso, qual é o aumento da energia térmica do bloco e do plano durante a subida do bloco? (d) Se o bloco desce de volta submetido à força de atrito, qual é a velocidade do bloco quando chega ao ponto de onde foi lançado?

111 Um projétil de 9,40 kg é lançado verticalmente para cima. O arrasto do ar diminui a energia mecânica do sistema projétil–Terra de 68,0 kJ durante a subida do projétil. Que altura a mais o projétil teria alcançado se o arrasto do ar fosse desprezível?

112 Um homem de 70,0 kg pula de uma janela e vai cair em uma rede de salvamento dos bombeiros, 11,0 m abaixo da janela. Ele para momentaneamente, após a rede ter esticado 1,50 m. Supondo que a energia mecânica é conservada durante o processo e que a rede se comporta como uma mola ideal, determine a energia potencial elástica da rede quando está esticada 1,50 m.

113 Uma bala de revólver de 30 g, movendo-se com uma velocidade horizontal de 500 m/s, para depois de penetrar 12 cm em uma parede. (a) Qual é a variação da energia mecânica da bala? (b) Qual é a intensidade da força média exercida pela parede para fazer a bala parar?

114 Um carro de 1500 kg parte do repouso em uma estrada horizontal e adquire uma velocidade de 72 km/h em 30 s. (a) Qual é a energia cinética do carro no fim dos 30 s? (b) Qual é a potência média desenvolvida pelo carro durante o intervalo de 30 s? (c) Qual é a potência instantânea no fim do intervalo de 30 s, supondo que a aceleração é constante?

115 Uma bola de neve de 1,50 kg é atirada para cima em um ângulo de 34,0° com a horizontal e com uma velocidade inicial de 20,0 m/s. (a) Qual é a energia cinética inicial da bola? (b) De quanto varia a energia potencial gravitacional do sistema bola–Terra quando a bola se move do ponto de lançamento até o ponto de altura máxima? (c) Qual é a altura máxima?

116 Um paraquedista de 68 kg cai com uma velocidade terminal constante de 59 m/s. (a) A que taxa a energia potencial gravitacional do sistema Terra–paraquedista está sendo reduzida? (b) A que taxa a energia mecânica do sistema está sendo reduzida?

117 Um bloco de 20 kg sobre uma superfície horizontal está preso a uma mola horizontal de constante elástica $k = 4{,}0$ kN/m. O bloco é puxado para a direita até a mola ficar distendida 10 cm em relação ao comprimento no estado relaxado e liberado a partir do repouso. A força de atrito entre o bloco em movimento e a superfície tem um módulo de 80 N. (a) Qual é a energia cinética do bloco após ter se movido 2,0 cm em relação ao ponto em que foi liberado? (b) Qual é a energia cinética do bloco no instante em que volta pela primeira vez ao ponto no qual a mola está relaxada? (c) Qual é a máxima energia cinética atingida pelo bloco enquanto desliza do ponto em que foi liberado até o ponto em que a mola está relaxada?

118 A resistência ao movimento de um automóvel é constituída pelo atrito da estrada, que é quase independente da velocidade, e o arrasto do ar, que é proporcional ao quadrado da velocidade. Para um certo carro com um peso de 12 000 N, a força de resistência total F é dada por $F = 300 + 1{,}8v^2$, com F em newtons e v em metros por segundo. Calcule a potência (em horsepower) necessária para acelerar o carro a 0,92 m/s² quando a velocidade é 80 km/h.

119 Uma bola de 50 g é lançada de uma janela com uma velocidade inicial de 8,0 m/s e com um ângulo de 30° acima da horizontal. Usando a lei de conservação da energia, determine (a) a energia cinética da bola no ponto mais alto da trajetória e (b) a velocidade da bola quando está 3,0 m abaixo da janela. A resposta do item (b) depende (c) da massa da bola ou (d) do ângulo de lançamento?

120 Uma mola com uma constante elástica de 3200 N/m é distendida até que a energia potencial elástica seja 1,44 J. ($U = 0$ para a mola relaxada.) Quanto é ΔU se a distensão muda para (a) uma distensão de 2,0 cm, (b) uma compressão de 2,0 cm e (c) uma compressão de 4,0 cm?

121 Uma locomotiva com uma potência de 1,5 MW pode acelerar um trem de uma velocidade de 10 m/s para 25 m/s em 6,0 min. (a) Calcule a massa do trem. Determine, em função do tempo (em segundos), (b) a velocidade do trem e (c) a força que acelera o trem durante o intervalo de 6,0 min. (d) Determine a distância percorrida pelo trem durante este intervalo.

122 Um disco de *shuffleboard* de 0,42 kg está em repouso quando um jogador usa um taco para imprimir ao disco uma velocidade de 4,2 m/s com aceleração constante. A aceleração ocorre em uma distância de 2,0 m, ao final da qual o taco perde contato com o disco. O disco desliza a uma distância adicional de 12 m antes de parar. Suponha que a pista de *shuffleboard* seja plana e que a força de atrito sobre o disco seja constante. Qual é o aumento da energia térmica do sistema disco–pista (a) para essa distância adicional de 12 m e (b) para a distância total de 14 m? (c) Qual é o trabalho realizado pelo taco sobre o disco?

CAPÍTULO

9

CENTRO DE MASSA E MOMENTO LINEAR

9-1 O QUE É FÍSICA?

Todo engenheiro mecânico contratado como perito para reconstituir um acidente de trânsito usa a física. Todo treinador que ensina uma bailarina a saltar usa a física. Na verdade, para analisar qualquer tipo de movimento complicado é preciso recorrer a simplificações que são possíveis apenas com um entendimento da física. Neste capítulo, discutimos de que forma o movimento complicado de um sistema de objetos, como um carro ou uma bailarina, pode ser simplificado se determinarmos um ponto especial do sistema: o *centro de massa.*

Eis um exemplo: quando arremessamos uma bola sem imprimir muita rotação (Fig. 9-1*a*), o movimento é simples. A bola descreve uma trajetória parabólica, como discutimos no Capítulo 4, e pode ser tratada como uma partícula. Quando, por outro lado, arremessamos um taco de beisebol (Fig. 9-1*b*), o movimento é mais complicado. Como cada parte do taco segue uma trajetória diferente, não é possível representar o taco como uma partícula. Entretanto, o taco possui um ponto especial, o centro de massa, que *descreve* uma trajetória parabólica simples; as outras partes do taco se movem em torno do centro de massa. (Para localizar o centro de massa, equilibre o taco em um dedo esticado; o ponto está acima do dedo, no eixo central do taco.)

É difícil fazer carreira arremessando tacos de beisebol, mas muitos treinadores ganham dinheiro ensinando atletas de salto em distância ou dançarinos a saltar da forma correta, movendo pernas e braços ou girando o torso. O ponto de partida é sempre o centro de massa da pessoa, porque é o ponto que se move de modo mais simples.

(*a*)

(*b*)

Figura 9-1 (*a*) Uma bola arremessada para cima segue uma trajetória parabólica. (*b*) O centro de massa (ponto preto) de um taco de beisebol arremessado para cima com um movimento de rotação segue uma trajetória parabólica, mas todos os outros pontos do taco seguem trajetórias curvas mais complicadas. *(a: Richard Megna/ Fundamental Photographs)*

9-2 O Centro de Massa

Definimos o **centro de massa** (CM) de um sistema de partículas (uma pessoa, por exemplo) para podermos determinar com mais facilidade o movimento do sistema.

> O centro de massa de um sistema de partículas é o ponto que se move como se (1) toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto e (2) todas as forças externas estivessem aplicadas nesse ponto.

Nesta seção, discutimos a forma de determinar a localização do centro de massa de um sistema de partículas. Começamos com um sistema de poucas partículas e em seguida consideramos sistemas com um número muito grande de partículas (um corpo maciço, como um taco de beisebol). Mais adiante, discutiremos como o centro de massa de um sistema se move quando o sistema é submetido a forças externas.

Sistemas de Partículas

A Fig. 9-2*a* mostra duas partículas de massas m_1 e m_2 separadas por uma distância d. Escolhemos arbitrariamente como origem do eixo x a posição da partícula de massa

m_1. *Definimos* a posição do centro de massa (CM) desse sistema de duas partículas como

$$x_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d. \tag{9-1}$$

Suponha, por exemplo, que $m_2 = 0$. Nesse caso, existe apenas uma partícula, de massa m_1, e o centro de massa deve estar na posição dessa partícula; é o que realmente acontece, já que a Eq. 9-1 se reduz a $x_{CM} = 0$. Se $m_1 = 0$, temos de novo apenas uma partícula (de massa m_2) e, como devia ser, $x_{CM} = d$. Se $m_1 = m_2$, o centro de massa deve estar a meio caminho entre as duas partículas; a Eq. 9-1 se reduz a $x_{CM} = d/2$, como seria de se esperar. Finalmente, de acordo com a Eq. 9-1, se nenhuma das duas massas é nula, x_{CM} só pode assumir valores entre 0 e d, ou seja, o centro de massa deve estar em algum lugar entre as duas partículas.

A Fig. 9-2*b* mostra uma situação mais geral na qual o sistema de coordenadas foi deslocado para a esquerda. A posição do centro de massa é agora definida como

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \tag{9-2}$$

Observe que se fizermos $x_1 = 0$, x_2 ficará igual a d e a Eq. 9-2 se reduzirá à Eq. 9-1, como seria de se esperar. Note também que, apesar do deslocamento da origem do sistema de coordenadas, o centro de massa continua à mesma distância de cada partícula.

Podemos escrever a Eq. 9-2 na forma

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}, \tag{9-3}$$

onde M é a massa total do sistema. (No exemplo que estamos discutindo, $M = m_1 + m_2$.) Podemos estender esta equação a uma situação mais geral na qual n partículas estão posicionadas ao longo do eixo x. Nesse caso, a massa total é $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ e a posição do centro de massa é dada por

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots + m_n x_n}{M}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i. \tag{9-4}$$

onde o índice i assume todos os valores inteiros de 1 a n.

Se as partículas estão distribuídas em três dimensões, a posição do centro de massa deve ser especificada por três coordenadas. Por extensão da Eq. 9-4, essas

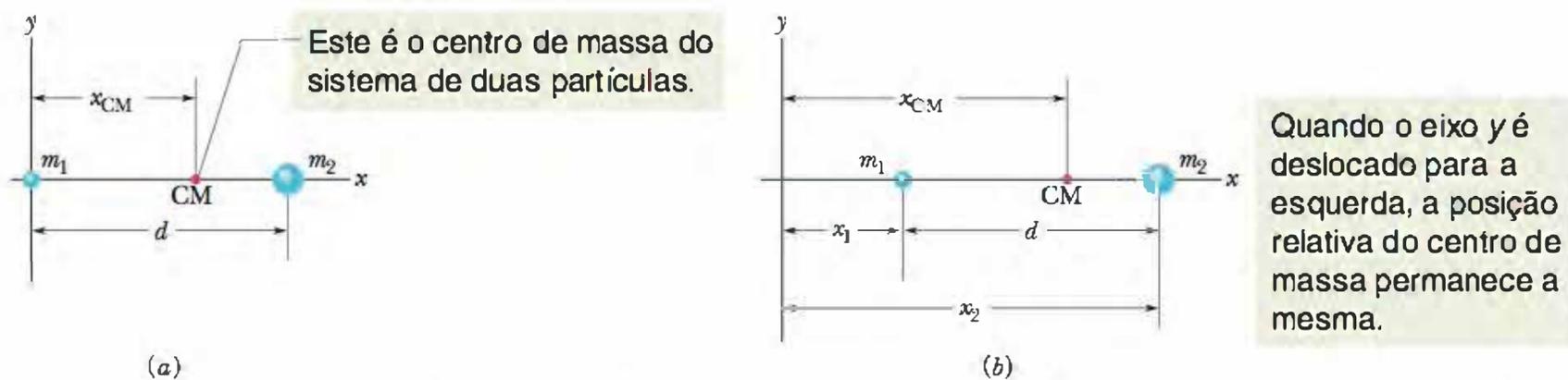



Figura 9-2 (*a*) Duas partículas de massas m_1 e m_2 estão separadas por uma distância d. O ponto marcado como CM mostra a posição do centro de massa, calculado usando a Eq. 9-1. (*b*) O mesmo que (*a*) exceto pelo fato de que a origem foi deslocada para a esquerda. A posição do centro de massa pode ser calculada usando a Eq. 9-2. A localização do centro de massa em relação às partículas é a mesma nos dois casos.

coordenadas são dadas por

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \quad z_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i. \tag{9-5}$$

Também podemos definir o centro de massa usando a linguagem dos vetores. Primeiro, lembre-se de que a posição de uma partícula de coordenadas x_i, y_i e z_i é dada por um vetor posição

$$\vec{r}_i = x_i\hat{\mathrm{i}} + y_i\hat{\mathrm{j}} + z_i\hat{\mathrm{k}}. \tag{9-6}$$

onde o índice identifica a partícula e $\hat{\mathrm{i}}$, $\hat{\mathrm{j}}$ e $\hat{\mathrm{k}}$ são vetores unitários que apontam, respectivamente, no sentido positivo dos eixos x, y e z. Analogamente, a localização do centro de massa de um sistema de partículas é dada por um vetor posição:

$$\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{\mathrm{i}} + y_{CM}\hat{\mathrm{j}} + z_{CM}\hat{\mathrm{k}}. \tag{9-7}$$

As três equações escalares da Eq. 9-5 podem ser substituídas, portanto, por uma única equação vetorial,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i, \tag{9-8}$$

onde M é a massa total do sistema. É possível confirmar que esta equação está correta substituindo $\vec{r}_i$ e $\vec{r}_{CM}$ por seus valores, dados pelas Eqs. 9-6 e 9-7, e separando as componentes x, y e z. O resultado são as relações escalares da Eq. 9-5.

Corpos Maciços

Um objeto comum, como um bastão de beisebol, contém tantas partículas (átomos) que podemos aproximá-lo por uma distribuição contínua de massa. As "partículas" nesse caso se tornam elementos infinitesimais de massa dm, os somatórios da Eq. 9-5 se tornam integrais e as coordenadas do centro de massa são definidas através das equações

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm, \quad y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm, \quad z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\,dm, \tag{9-9}$$

onde M agora é a massa do objeto.

Como o cálculo dessas integrais para a maioria dos objetos do mundo real (como um televisor ou um boi, por exemplo) é muito difícil, vamos considerar neste texto apenas objetos *homogêneos*, ou seja, objetos cuja *massa específica* (massa por unidade de volume), representada pelo símbolo ρ (letra grega rô), é a mesma para todos os elementos infinitesimais do objeto e, portanto, para o objeto como um todo. Nesse caso, de acordo com a Eq. 1-8, podemos escrever:

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V}, \tag{9-10}$$

onde dV é o volume ocupado por um elemento de massa dm e V é o volume total do objeto. Substituindo dm na Eq. 9-9 por seu valor obtido a partir da Eq. 9-10 [$dm = (M/V)\,dV$], obtemos:

$$x_{CM} = \frac{1}{V}\int x\,dV, \quad y_{CM} = \frac{1}{V}\int y\,dV, \quad z_{CM} = \frac{1}{V}\int z\,dV. \tag{9-11}$$

O cálculo fica mais simples se o objeto possui um ponto, uma reta ou um plano de simetria, pois, nesse caso, o centro de massa está no ponto, linha ou plano de simetria. Por exemplo: o centro de massa de uma esfera (que possui um ponto de simetria) está no centro da esfera (que é o ponto de simetria). O centro de massa de um cone (cujo eixo é uma reta de simetria) está sobre esse eixo. O centro de massa

de uma banana (que tem um plano de simetria que a divide em duas partes iguais) está em algum ponto desse plano.

O centro de massa de um objeto não precisa estar no interior do objeto. Não existe massa no centro de massa de uma rosquinha, assim como não existe ferro no centro de massa de uma ferradura.

Exemplo

CM de uma placa vazada

A Fig. 9-3*a* mostra uma placa de metal fina e homogênea P, de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido em uma linha de montagem. O disco aparece na Fig. 9-3*b*. Determine as coordenadas do centro de massa da placa (CM_P) em relação aos eixos x e y indicados na figura.

IDEIAS-CHAVE

(1) Em primeiro lugar, vamos determinar a localização aproximada do centro de massa da placa P usando conceitos de simetria. Observe que a placa é simétrica em relação ao eixo x (obtemos a parte de baixo da placa girando a parte de cima em torno do eixo x e vice-versa). Isso significa que o centro de massa da placa deve estar localizado nesse eixo. A placa (com o disco removido) não é simétrica em relação ao eixo y; já que existe um pouco mais de massa do lado direito do eixo y, CM_P deve estar um pouco à direita do eixo y, como na Fig. 9-3*a*. Nosso objetivo é determinar a localização exata do centro de massa.

(2) Como a placa P é um corpo tridimensional, devemos, em princípio, usar as Eqs. 9-11 para calcular as coordenadas x, y e z do centro de massa. Acontece que, como a placa é fina e homogênea, estamos interessados apenas nas coordenadas x e y; se a placa tivesse uma espessura apreciável, poderíamos supor que o centro de massa estava no ponto médio da espessura. Mesmo desprezando a espessura, porém, seria difícil resolver o problema por este método, já que teríamos que escrever uma função para descrever a forma da placa com o disco removido e integrar essa função em duas dimensões.

(3) Existe, porém, um meio muito mais fácil de resolver o problema. Como vimos, é válido supor que a massa de um objeto *homogêneo* está concentrada em uma partícula localizada no centro de massa do objeto. Assim, podemos tratar a placa e o disco como partículas, tornando assim dispensável qualquer integração.

Cálculos Primeiro, colocamos o disco que foi removido (vamos chamá-lo de disco S) de volta no lugar (Fig. 9-3*c*), para formar a placa original (que vamos chamar de placa C). Devido à simetria, o centro de massa CM_S do disco S está no centro de S, em $x = -R$ (como mostra a figura). Da mesma forma, o centro de massa CM_C da placa composta C está no centro de C, a origem (como mostra a figura). Temos, portanto, o seguinte:

Placa	Centro de massa	Posição do CM	Massa
P	CM_P	$x_P = ?$	m_P
S	CM_S	$x_S = -R$	m_S
C	CM_C	$x_C = 0$	$m_C = m_S + m_P$

Suponha que a massa m_S do disco S está concentrada em uma partícula em $x_S = -R$ e que a massa m_P está concentrada em uma partícula em x_P (Fig. 9-3*d*). Em seguida, trate as duas partículas como um sistema e use a Eq. 9-2 para obter o centro de massa x_{S+P} do sistema. O resultado é o seguinte:

$$x_{S+P} = \frac{m_S x_S + m_P x_P}{m_S + m_P}. \tag{9-12}$$

Note que a superposição do disco S com a placa P é a placa C. Assim, a posição x_{S+P} do CM_{S+P} deve coincidir com a posição x_C do CM_C, que está na origem: $x_{S+P} = x_C = 0$. Substituindo este resultado na Eq. 9-12 e explicitando x_P, obtemos

$$x_P = -x_S \frac{m_S}{m_P}. \tag{9-13}$$

Podemos relacionar essas massas às áreas de S e P notando que

massa = massa específica × volume
= massa específica × espessura × área

Assim,

$$\frac{m_S}{m_P} = \frac{\text{massa específica}_S}{\text{massa específica}_P} \times \frac{\text{espessura}_S}{\text{espessura}_P} \times \frac{\text{área}_S}{\text{área}_P}$$

Como a placa é homogênea, as massas específicas e as espessuras são iguais e, portanto,

$$\frac{m_S}{m_P} = \frac{\text{área}_S}{\text{área}_P} = \frac{\text{área}_S}{\text{área}_C - \text{área}_S}$$

$$= \frac{\pi R^2}{\pi(2R)^2 - \pi R^2} = \frac{1}{3}.$$

Substituindo este resultado e fazendo $x_S = -R$ na Eq. 9-13, obtemos:

$$x_P = \tfrac{1}{3}R. \quad \text{(Resposta)}$$

Suponha que a massa da placa esteja concentrada como uma partícula no centro de massa da placa.

Suponha que a massa deste disco também esteja concentrada como uma partícula no centro de massa.

Aqui também.

Aqui estão as três partículas.

O CM da placa composta está no mesmo lugar que o CM das duas partes.

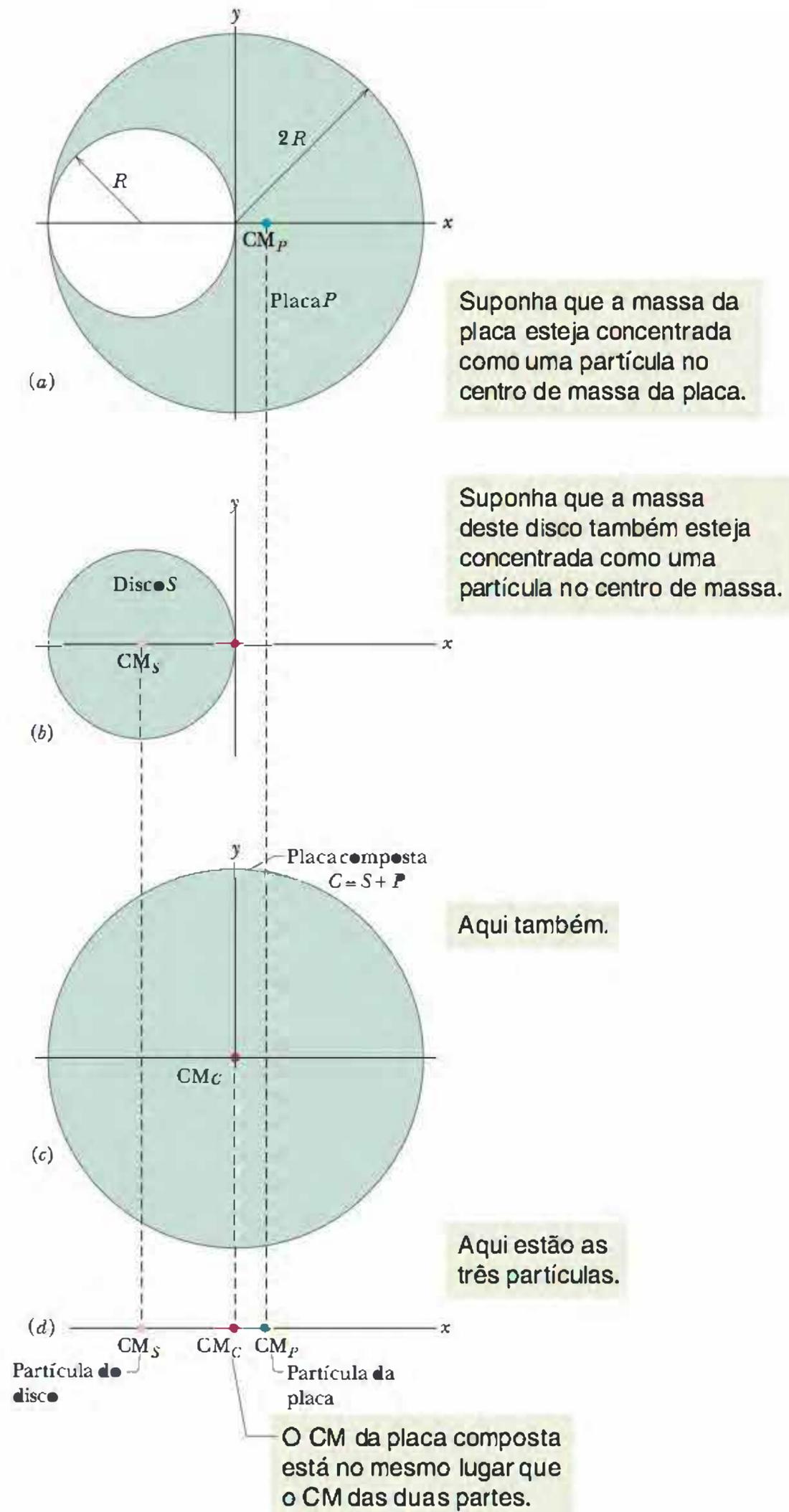



Figura 9-3 (*a*) A placa P é uma placa de metal de raio $2R$, com um furo circular de raio R. O centro de massa de P está no ponto CM_P. (*b*) O disco S foi colocado de volta no lugar para formar a placa composta C. O centro de massa CM_S do disco S e o centro de massa CM_C da placa C estão indicados. (*c*) O centro de massa CM_{S+P} da combinação de S e P coincide com CM_C, que está em $x = 0$.

Exemplo

CM de três partículas

Três partículas de massas m_1 = 1,2 kg, m_2 = 2,5 kg e m_3 = 3,4 kg formam um triângulo equilátero de lado a = 140 cm. Onde fica o centro de massa do sistema?

IDEIA-CHAVE

Como estamos lidando com partículas e não com um corpo maciço, podemos usar a Eq. 9-5 para determinar as coordenadas do centro de massa. As partículas estão no plano do triângulo equilátero, de modo que precisamos apenas das duas primeiras equações.

Cálculos Podemos simplificar os cálculos escolhendo os eixos x e y de tal forma que uma das partículas esteja na origem e o eixo x coincida com um dos lados do triângulo (Fig. 9-4). Nesse caso, as três partículas têm as seguintes coordenadas:

Partícula	Massa (kg)	x (cm)	y (cm)
1	1,2	0	0
2	2,5	140	0
3	3,4	70	120

A massa total M do sistema é 7,1 kg.

De acordo com a Eq. 9-5, as coordenadas do centro de massa são

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i x_i = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{M}$$

$$= \frac{(1{,}2\text{ kg})(0) + (2{,}5\text{ kg})(140\text{ cm}) + (3{,}4\text{ kg})(70\text{ cm})}{7{,}1\text{ kg}}$$

$$= 83\text{ cm} \qquad \text{(Resposta)}$$

e

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i y_i = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{M}$$

$$= \frac{(1{,}2\text{ kg})(0) + (2{,}5\text{ kg})(0) + (3{,}4\text{ kg})(120\text{ cm})}{7{,}1\text{ kg}}$$

$$= 58\text{ cm}. \qquad \text{(Resposta)}$$

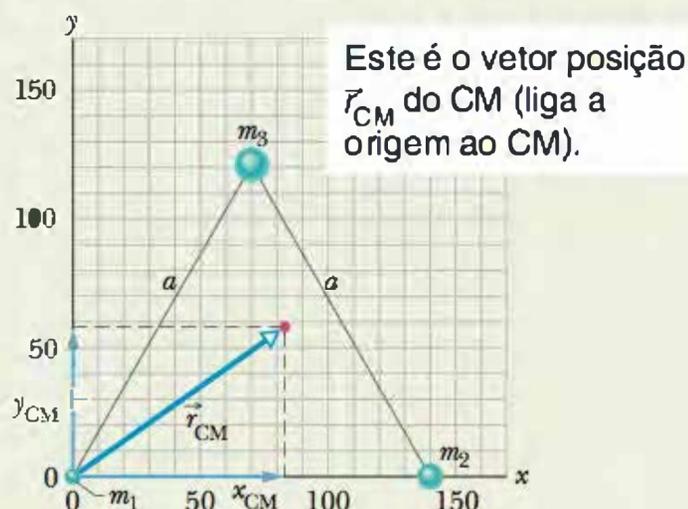
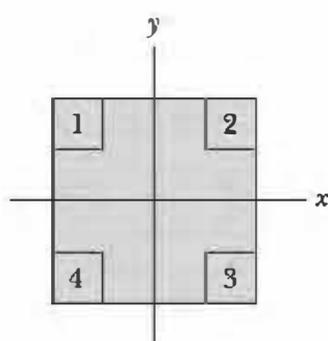



Fig. 9-4 Três partículas formam um triângulo equilátero de lado a. A localização do centro de massa é dada pelo vetor posição $\vec{r}_{CM}$.

Na Fig. 9-4, a posição do centro de massa é dada pelo vetor posição $\vec{r}_{CM}$, cujas componentes são x_{CM} e y_{CM}.

TESTE 1

A figura ao lado mostra uma placa quadrada uniforme, da qual quatro partes quadradas iguais são removidas dos cantos. (a) Onde fica o centro de massa da placa original? Onde fica o centro de massa após a remoção (b) da parte 1; (c) das partes 1 e 2; (d) das partes 1 e 3; (e) das partes 1, 2 e 3; (f) das quatro partes? Responda em termos dos quadrantes, eixos ou pontos (sem realizar nenhum cálculo, é claro).

9-3 A Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas

Agora que sabemos determinar a posição do centro de massa de um sistema de partículas, vamos discutir a relação entre forças externas e o movimento do centro de massa. Começamos com um exemplo simples, envolvendo duas bolas de sinuca.

Quando acertamos a bola branca em outra bola que está em repouso, esperamos que o sistema de duas bolas continue a se mover na mesma direção após o choque. Ficaríamos surpresos, por exemplo, se as duas bolas se movessem em nossa direção ou se ambas se movessem para a direita ou para a esquerda.

O que continua a se mover para a frente, sem que o movimento seja alterado pela colisão, é o centro de massa do sistema de duas bolas. Se você concentrar a atenção

nesse ponto (que é sempre o ponto médio do segmento que une as duas bolas, pois elas têm massas iguais) poderá se convencer de que isso é verdade observando a trajetória das bolas em uma mesa de sinuca. Não importa se o choque é frontal ou de raspão; o centro de massa sempre continua a se mover na direção seguida originalmente pela bola branca, como se não tivesse havido uma colisão. Vamos examinar mais de perto este movimento do centro de massa.

Para isso, vamos substituir o par de bolas de sinuca por um conjunto de n partículas de massas (possivelmente) diferentes. Não estamos interessados nos movimentos individuais das partículas, mas *apenas* no movimento do centro de massa do conjunto. Embora o centro de massa seja apenas um ponto, ele se move como uma partícula cuja massa é igual à massa total do sistema; podemos atribuir-lhe uma posição, uma velocidade e uma aceleração. Afirmamos (e provaremos a seguir) que a equação vetorial que descreve o movimento do centro de massa de um sistema de partículas é

$$\vec{F}_{res} = M\vec{a}_{CM} \quad \text{(sistema de partículas).} \tag{9-14}$$

Esta equação é a segunda lei de Newton para o movimento do centro de massa de um sistema de partículas. Note que a forma é a mesma da equação ($\vec{F}_{res} = m\vec{a}$) para o movimento de uma única partícula. Contudo, as três grandezas que aparecem na Eq. 9-14 devem ser usadas com algum critério:

1. $\vec{F}_{res}$ é a força resultante de *todas as forças externas* que agem sobre o sistema. Forças de uma parte do sistema que agem sobre outra parte (*forças internas*) não devem ser incluídas na Eq. 9-14.
2. M é a *massa total* do sistema. Supomos que nenhuma massa entra ou sai do sistema durante o movimento, de modo que M permanece constante. Nesse caso, dizemos que o sistema é **fechado**.
3. $\vec{a}_{CM}$ é a aceleração do *centro de massa* do sistema. A Eq. 9-14 não fornece nenhuma informação a respeito da aceleração de outros pontos do sistema.

A Eq. 9-14 é equivalente a três equações envolvendo as componentes de $\vec{F}_{res}$ e $\vec{a}_{CM}$ em relação aos três eixos de coordenadas. Essas equações são:

$$F_{res,x} = Ma_{CM,x} \quad F_{res,y} = Ma_{CM,y} \quad F_{res,z} = Ma_{CM,z} \tag{9-15}$$

Agora podemos voltar a examinar o comportamento das bolas de sinuca. Depois que a bola branca é posta em movimento, nenhuma força externa age sobre o sistema composto pelas duas bolas. De acordo com a Eq. 9-14, se $\vec{F}_{res} = 0$, $\vec{a}_{CM} = 0$. Como a aceleração é a taxa de variação da velocidade, concluímos que a velocidade do centro de massa do sistema de duas bolas não varia. Quando as duas bolas se chocam, as forças que participam do processo são forças *internas*, de uma bola sobre a outra. Essas forças não contribuem para a força resultante $\vec{F}_{res}$, que continua a ser nula. Assim, o centro de massa do sistema, que estava se movendo para a frente antes da colisão, deve continuar a se mover para a frente após a colisão, com a mesma velocidade e a mesma orientação.

A Eq. 9-14 se aplica não só a um sistema de partículas mas também a um corpo sólido, como o bastão da Fig. 9-1*b*. Nesse caso, M da Eq. 9-14 é a massa do bastão e $\vec{F}_{res}$ é a força gravitacional sobre o bastão. De acordo com a Eq. 9-14, $\vec{a}_{CM} = \vec{g}$. Em outras palavras, o centro de massa do bastão se move como se o bastão fosse uma única partícula de massa M sujeita à força $\vec{F}_g$.

A Fig. 9-5 mostra outro caso interessante. Suponha que, em um espetáculo de fogos de artifício, um foguete seja lançado em uma trajetória parabólica. Em um certo ponto, o foguete explode em pedaços. Se a explosão não tivesse ocorrido, o foguete teria continuado na trajetória parabólica mostrada na figura. As forças da explosão são *internas* ao sistema (no início, o sistema é apenas o foguete; mais tarde, é composto pelos fragmentos do foguete), ou seja, são forças que partes do sistema exercem sobre outras partes. A menos da resistência do ar, a força *externa* resultante $\vec{F}_{res}$ que age sobre o sistema é a força gravitacional, independentemente da explosão

As forças internas da explosão não mudam a trajetória do CM.

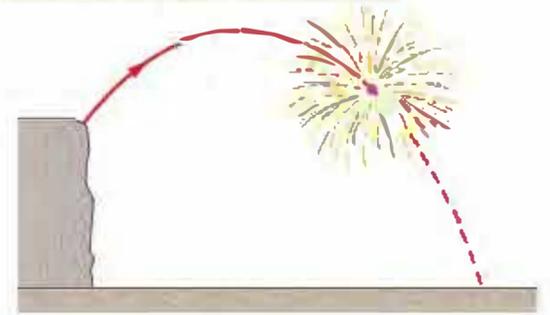



Figura 9-5 Um fogo de artifício explode no ar. Se não fosse a resistência do ar, o centro de massa dos fragmentos continuaria a seguir a trajetória parabólica original até que os fragmentos começassem a atingir o solo.

do foguete. Assim, de acordo com a Eq. 9-14, a aceleração $\vec{a}_{CM}$ do centro de massa dos fragmentos (enquanto estão voando) permanece igual a $\vec{g}$. Isso significa que o centro de massa dos fragmentos segue a mesma trajetória parabólica que o foguete teria seguido se não tivesse explodido.

Quando uma bailarina executa um salto conhecido como *grand jeté*, levanta os braços e estica as pernas horizontalmente assim que os pés deixam o solo (Fig. 9-6). Esses movimentos deslocam para cima o centro de massa. Embora o centro de massa siga fielmente uma trajetória parabólica, o movimento para cima do centro de massa em relação ao corpo diminui a altura alcançada pela cabeça e pelo tronco da bailarina, que se movem aproximadamente na horizontal, criando a ilusão de que a bailarina flutua no ar.

Demonstração da Equação 9-14

Vamos agora demonstrar esta importante equação. De acordo com a Eq. 9-8, temos, para um sistema de n partículas,

$$M\vec{r}_{CM} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots + m_n\vec{r}_n, \tag{9-16}$$

onde M é a massa total do sistema e $\vec{r}_{CM}$ é o vetor posição do centro de massa do sistema.

Derivando a Eq. 9-16 em relação ao tempo, obtemos:

$$M\vec{v}_{CM} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_n\vec{v}_n. \tag{9-17}$$

onde $\vec{v}_i (= d\vec{r}_i / dt)$ é a velocidade da partícula de ordem i e $\vec{v}_{CM} (= d\vec{r}_{CM} / dt)$ é a velocidade do centro de massa.

Derivando a Eq. 9-17 em relação ao tempo, obtemos:

$$M\vec{a}_{CM} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \cdots + m_n\vec{a}_n. \tag{9-18}$$

onde $\vec{a}_i (= d\vec{v}_i / dt)$ é a aceleração da partícula de ordem i e $\vec{a}_{CM} (= d\vec{v}_{CM} / dt)$ é a aceleração do centro de massa. Embora o centro de massa seja apenas um ponto geométrico, ele possui uma posição, uma velocidade e uma aceleração, como se fosse uma partícula.

De acordo com a segunda lei de Newton, $m_i\vec{a}_i$ é igual à força resultante $\vec{F}_i$ que age sobre a partícula de ordem i. Assim, podemos escrever a Eq. 9-18 na forma

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_n. \tag{9-19}$$

Trajetória da cabeça

Trajetória do centro de massa

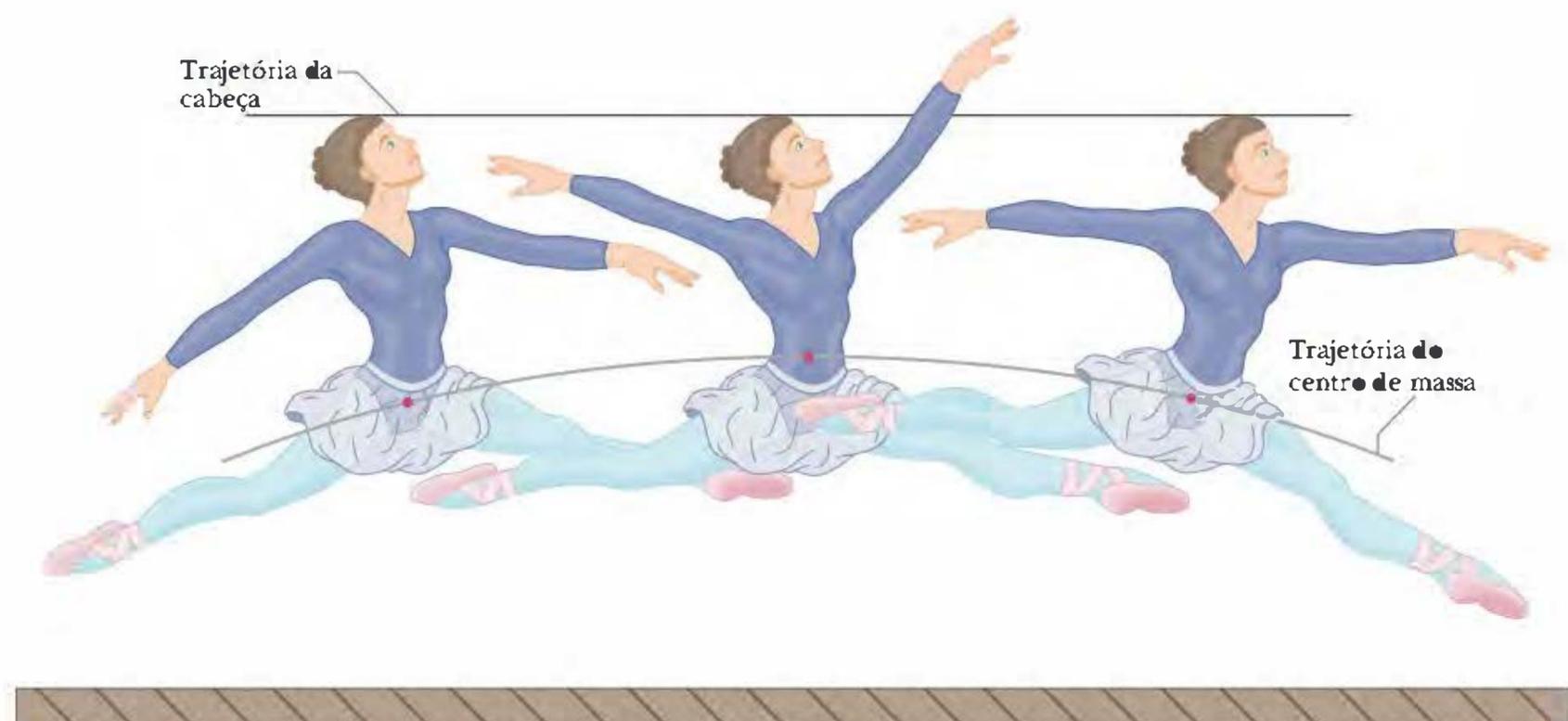



Figura 9-6 Um *grand jeté*. (Adaptado de *The Physics of Dance*, de Kenneth Laws, Schirmer Books, 1984.)

Entre as forças que contribuem para o lado direito da Eq. 9-19 estão forças que as partículas do sistema exercem umas sobre as outras (forças internas) e forças exercidas sobre as partículas por agentes de fora do sistema (forças externas). De acordo com a terceira lei de Newton, as forças internas formam pares do tipo ação-reação que se cancelam mutuamente na soma do lado direito da Eq. 9-19. O que resta é a soma vetorial das forças *externas* que agem sobre o sistema. Assim, a Eq. 9-19 se reduz à Eq. 9-14, como queríamos demonstrar.

TESTE 2

Dois patinadores em uma superfície de gelo sem atrito seguram extremidades opostas de uma haste de massa desprezível. É escolhido um eixo de referência na mesma posição que a haste, com a origem no centro de massa do sistema de dois patinadores. Um patinador, Frederico, pesa duas vezes mais do que o outro patinador, Eduardo. Onde os patinadores se encontram se (a) Frederico puxa a haste para se aproximar de Eduardo, (b) Eduardo puxa a haste para se aproximar de Frederico e (c) os dois patinadores puxam a haste?

Exemplo

Movimento do CM de três partículas

As três partículas da Fig. 9-7*a* estão inicialmente em repouso. Cada uma sofre a ação de uma força *externa* produzida por corpos fora do sistema das três partículas. As orientações das forças estão indicadas e os módulos são $F_1 = 6{,}0$ N, $F_2 = 12$ N e $F_3 = 14$ N. Qual é a aceleração do centro de massa do sistema e em que direção se move?

IDEIAS-CHAVE

A posição do centro de massa está assinalada por um ponto na figura. Podemos tratar o centro de massa como se fosse uma partícula real, com uma massa igual à massa total do sistema, $M = 16$ kg. Também podemos tratar as três forças externas como se fossem aplicadas ao centro de massa (Fig. 9-7*b*).

Cálculos Agora podemos aplicar a segunda lei de Newton ($\vec{F}_{res} = m\vec{a}$) ao centro de massa, escrevendo

$$\vec{F}_{res} = M\vec{a}_{CM} \tag{9-20}$$

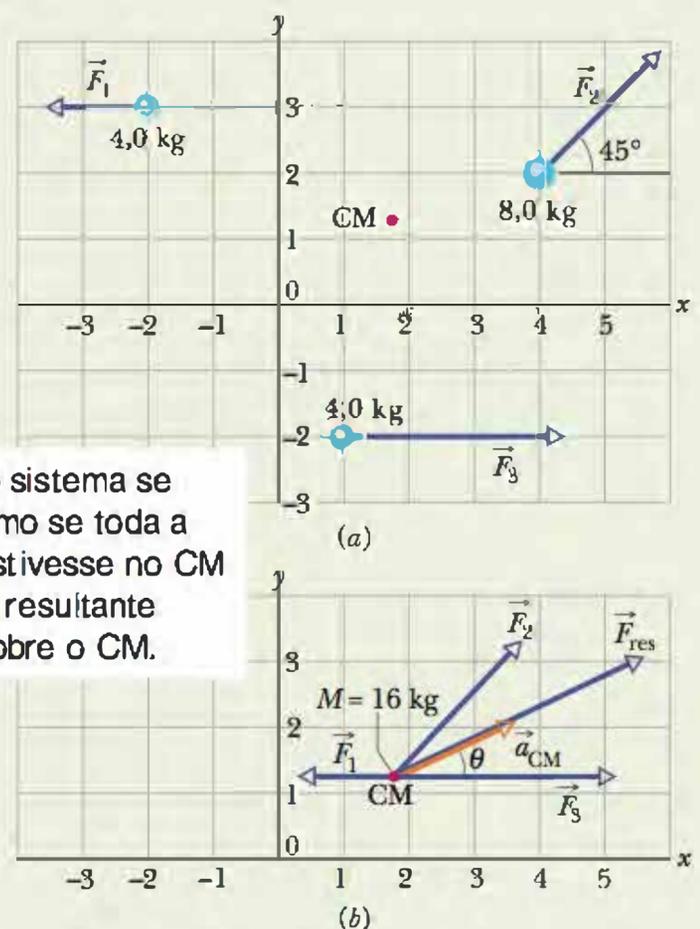
ou

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = M\vec{a}_{CM}$$

e, portanto,

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3}{M}. \tag{9-21}$$

De acordo com a Eq. 9-20, a aceleração $\vec{a}_{CM}$ do centro de massa tem a mesma direção que a força externa resultante $\vec{F}_{res}$ aplicada ao sistema (Fig. 9-7*b*). Como as partículas estão inicialmente em repouso, o centro de massa também deve estar em repouso. Quando o centro de massa começa a acelerar, ele se move na direção de $\vec{a}_{CM}$ e $\vec{F}_{res}$.

Podemos calcular o lado direito da Eq. 9-21 usando uma calculadora ou escrever a Eq. 9-21 em termos das componentes, calcular as componentes de $\vec{a}_{CM}$ e em seguida obter $\vec{a}_{CM}$. Ao longo do eixo x, temos:

$$a_{CM,x} = \frac{F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}}{M}$$

$$= \frac{-6{,}0\ \text{N} + (12\ \text{N})\cos 45° + 14\ \text{N}}{16\ \text{kg}} = 1{,}03\ \text{m/s}^2.$$

Figura 9-7 (*a*) Três partículas, inicialmente em repouso nas posições indicadas, são submetidas às forças externas mostradas. O centro de massa (CM) do sistema está indicado. (*b*) As forças são transferidas para o centro de massa do sistema, que se comporta como uma partícula de massa M igual à massa total do sistema. A força externa resultante $\vec{F}_{res}$ e a aceleração $\vec{a}_{CM}$ do centro de massa estão indicadas.

Ao longo do eixo y, temos:

$$a_{CM,y} = \frac{F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}}{M}$$

$$= \frac{0 + (12\text{ N})\text{ sen }45° + 0}{16\text{ kg}} = 0{,}530\text{ m/s}^2.$$

Assim, o módulo de $\vec{a}_{CM}$ é dado por

$$a_{CM} = \sqrt{(a_{CM,x})^2 + (a_{CM,y})^2}$$

$$= 1{,}16\text{ m/s}^2 \approx 1{,}2\text{ m/s}^2 \qquad \text{(Resposta)}$$

e o ângulo (em relação ao semieixo x positivo) é dado por

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a_{CM,y}}{a_{CM,x}} = 27°. \qquad \text{(Resposta)}$$

9-4 Momento Linear

Nesta seção, vamos concentrar nossa atenção em uma partícula isolada, com o objetivo de definir duas grandezas importantes. Na Seção 9-5, essas definições serão aplicadas a sistemas com muitas partículas.

A primeira definição é a de uma palavra, *momento*, que possui vários significados na linguagem comum, mas apenas um significado na física e na engenharia. O **momento linear** de uma partícula é uma grandeza vetorial $\vec{p}$ definida através da equação

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \text{(momento linear de uma partícula),} \qquad (9\text{-}22)$$

onde m é a massa e $\vec{v}$ a velocidade da partícula. (O adjetivo *linear* é frequentemente omitido, mas serve para distinguir $\vec{p}$ do *momento angular*, que será definido no Capítulo 11 e está associado a rotações.) Como m é uma grandeza escalar positiva, a Eq. 9-22 mostra que $\vec{p}$ e $\vec{v}$ têm a mesma orientação. De acordo com a Eq. 9-22, a unidade de momento no SI é o quilograma-metro por segundo (kg · m/s).

Newton expressou sua segunda lei originalmente em termos do momento:

A taxa de variação com o tempo do momento de uma partícula é igual à força resultante que atua sobre a partícula e tem a mesma orientação que a força resultante.

Em forma de equação, isso significa o seguinte:

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \qquad (9\text{-}23)$$

Em palavras, a Eq. 9-23 afirma que a força resultante $\vec{F}_{res}$ aplicada a uma partícula faz variar o momento linear $\vec{p}$ da partícula. Na verdade, o momento linear só pode mudar se a partícula estiver sujeita a uma força. Se não existe nenhuma força, $\vec{p}$ *não pode* mudar. Como vamos ver na Seção 9-7, este último fato pode ser uma ferramenta extremamente poderosa para resolver problemas.

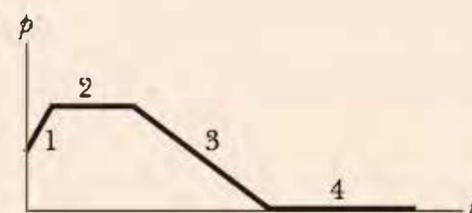
Substituindo na Eq. 9-23 $\vec{p}$ pelo seu valor, dado pela Eq. 9-22, obtemos, para uma massa m constante,

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

Assim, as relações $\vec{F}_{res} = d\vec{p}/dt$ e $\vec{F} = m\vec{a}$ são expressões equivalentes da segunda lei de Newton para uma partícula.

TESTE 3

A figura mostra o módulo p do momento linear em função do tempo t para uma partícula que se move ao longo de um eixo. Uma força dirigida ao longo do eixo age sobre a partícula. (a) Ordene as quatro regiões indicadas de acordo com o módulo da força, do maior para o menor. (b) Em que região a velocidade da partícula está diminuindo?

p
1
2
3
4
t

9-5 O Momento Linear de um Sistema de Partículas

Vamos estender a definição de momento linear a um sistema de partículas. Considere um sistema de n partículas, cada uma com sua massa, velocidade e momento linear. As partículas podem interagir e sofrer o efeito de forças externas. O sistema como um todo possui um momento linear total $\vec{P}$, que é definido como a soma vetorial dos momentos lineares das partículas. Assim,

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \cdots + \vec{p}_n$$
$$= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_n\vec{v}_n. \quad (9\text{-}24)$$

Comparando a Eq. 9-24 com a Eq. 9-17, vemos que

$$\vec{P} = M\vec{v}_{CM} \quad \text{(momento linear de um sistema de partículas).} \quad (9\text{-}25)$$

que é outra forma de definir o momento linear de um sistema de partículas:

O momento linear de um sistema de partículas é igual ao produto da massa total do sistema pela velocidade do centro de massa.

Derivando a Eq. 9-25 em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM}. \quad (9\text{-}26)$$

Comparando as Eqs. 9-14 e 9-26, vemos que é possível escrever a segunda lei de Newton para um sistema de partículas na forma

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \text{(sistema de partículas).} \quad (9\text{-}27)$$

onde $\vec{F}_{res}$ é a força externa resultante que age sobre o sistema. Esta equação é a generalização para um sistema de muitas partículas da equação $\vec{F}_{res} = d\vec{p}/dt$, válida para uma partícula isolada. Em palavras, a equação diz que a força externa $\vec{F}_{res}$, ao ser aplicada a um sistema de partículas, muda o momento linear $\vec{P}$ do sistema. Por outro lado, o momento linear só pode ser mudado por uma força externa $\vec{F}_{res}$. Se não existe uma força externa, $\vec{P}$ *não pode* mudar.

A colisão de uma bola com um taco faz com que a bola se deforme. *(Foto de Harold E. Edgerton. ©The Harold and Esther Edgerton Family Trust, cortesia de Palm Press, Inc.)*

9-6 Colisão e Impulso

O momento $\vec{p}$ de um corpo que se comporta como uma partícula permanece constante a menos que uma força externa atue sobre o corpo. Para mudar o momento do corpo, podemos, por exemplo, empurrá-lo. Também podemos mudar o momento do corpo de modo mais violento, fazendo-o colidir com um taco de beisebol. Em uma *colisão*, a força exercida sobre o corpo é de curta direção, tem um módulo elevado e provoca uma mudança brusca do momento do corpo. Colisões ocorrem frequentemente na vida real, mas antes de discutir situações mais complexas, vamos falar de um tipo simples de colisão em que um corpo que se comporta como partícula (um *projétil*) colide com outro objeto que se comporta como uma partícula (um *alvo*).

Colisão Simples

Suponha que o projétil seja uma bola e o alvo seja um taco. A colisão dura pouco tempo, mas a força que age sobre a bola é suficiente para inverter o movimento. A Fig. 9-8 mostra um instantâneo da colisão. A bola sofre a ação de uma força $\vec{F}(t)$ que varia durante a colisão e muda o momento linear $\vec{p}$ da bola. A variação está relacionada à força através da segunda lei de Newton, escrita na forma $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. Assim,

Figura 9-8 A força $\vec{F}(t)$ age sobre uma bola quando a bola e um taco colidem.

O impulso da colisão é igual à área sob a curva.

A força média produz a mesma área sob a curva.

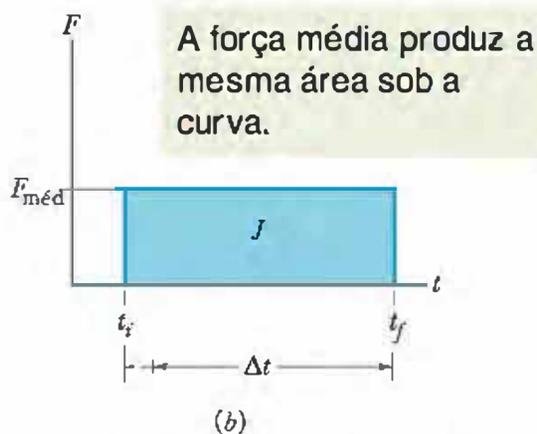
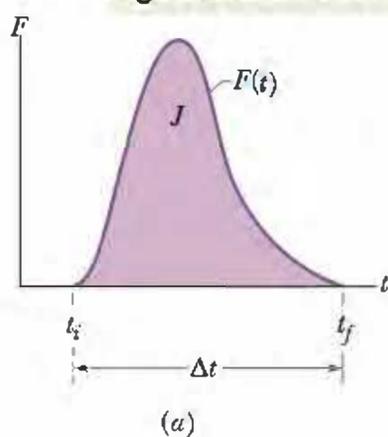



Figura 9-9 (*a*) A curva mostra o módulo da força dependente do tempo $F(t)$ que age sobre a bola na colisão da Fig. 9-8. A área sob a curva é igual ao módulo do impulso $\vec{J}$ sobre a bola na colisão. (*b*) A altura do retângulo representa a força média $F_{méd}$ que age sobre a bola no intervalo Δt. A área do retângulo é igual à área sob a curva do item (*a*) e, portanto, também é igual ao módulo do impulso $\vec{J}$ na colisão.

no intervalo de tempo dt, a variação do momento da bola é dada por

$$d\vec{p} = \vec{F}(t)\,dt. \tag{9-28}$$

Podemos determinar a variação total do momento da bola provocada pela colisão integrando ambos os membros da Eq. 9-28 de um instante t_i imediatamente antes da colisão até um instante t_f imediatamente após a colisão:

$$\int_{t_i}^{t_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt. \tag{9-29}$$

O lado esquerdo da Eq. 9-29 nos dá a variação do momento: $\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}$. O lado direito, que é uma medida tanto da intensidade quanto da duração da força da colisão, é chamado de **impulso** da colisão e representado pelo símbolo $\vec{J}$:

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt \quad \text{(definição de impulso).} \tag{9-30}$$

Assim, a variação do momento de um objeto é igual ao impulso exercido sobre o objeto:

$$\Delta\vec{p} = \vec{J} \quad \text{(teorema do momento linear e impulso).} \tag{9-31}$$

Essa expressão também pode ser escrita na forma vetorial

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{J} \tag{9-32}$$

e na forma de componentes, como

$$\Delta p_x = J_x \tag{9-33}$$

e

$$p_{fx} - p_{ix} = \int_{t_i}^{t_f} F_x\,dt. \tag{9-34}$$

Se a função $\vec{F}(t)$ é conhecida, podemos calcular $\vec{J}$(e, portanto, a variação do momento) integrando a função. Se temos um gráfico de $\vec{F}$ em função do tempo t, podemos obter $\vec{J}$ calculando a área entre a curva e o eixo t, como na Fig. 9-9*a*. Em muitas situações, não sabemos como a força varia com o tempo, mas conhecemos o módulo médio $F_{méd}$ da força e a duração Δt (= $t_f - t_i$) da colisão. Nesse caso, podemos escrever o módulo do impulso como

$$J = F_{méd}\Delta t. \tag{9.35}$$

A Fig. 9-9*b* mostra a força média em função do tempo. A área sob a curva no gráfico é igual à área sob a curva da força real $F(t)$ na Fig. 9-9*a*, uma vez que as duas áreas são iguais a J, o módulo do impulso.

Em vez de nos preocuparmos com a bola, poderíamos ter concentrado nossa atenção no taco na Fig. 9-8. De acordo com a terceira lei de Newton, a força experimentada pelo taco em qualquer instante tem o mesmo módulo que a força experimentada pela bola e o sentido oposto. De acordo com a Eq. 9-30, isso significa que o impulso experimentado pelo taco tem o mesmo módulo que o impulso experimentado pela bola e o sentido oposto.

TESTE 4

Um paraquedista, cujo paraquedas não abriu, cai em um monte de neve e sofre ferimentos leves. Se caísse em um terreno sem neve, o tempo necessário para parar teria sido 10 vezes menor e a colisão teria sido fatal. A presença da neve aumenta, diminui ou mantém inalterado o valor (a) da variação do momento do paraquedista, (b) do impulso experimentado pelo paraquedista e (c) da força experimentada pelo paraquedista?

Colisões em Série

Vamos considerar agora a força experimentada por um corpo ao sofrer uma série de colisões de mesma intensidade. Imagine, por exemplo, que uma daquelas máquinas de arremessar bolas de tênis tenha sido ajustada para disparar bolas contra uma parede, uma após a outra. Cada colisão produz uma força sobre a parede, mas não é esta força que queremos calcular; o que nos interessa é a força média $F_{méd}$ a que a parede é submetida durante o bombardeio, ou seja, a força média associada a um grande número de colisões.

Na Fig. 9-10, projéteis igualmente espaçados, de massas iguais m e momentos lineares iguais $m\vec{v}$, deslocam-se ao longo de um eixo x e colidem com um alvo fixo. Seja n o número de projéteis que colidem em um intervalo de tempo Δt. Como o movimento é apenas ao longo do eixo x, podemos usar as componentes dos momentos ao longo desse eixo. Assim, cada projétil tem momento inicial mv e sofre uma variação Δp do momento linear por causa da colisão. A variação total do momento linear de n projéteis durante o intervalo Δt é $n\,\Delta p$. O impulso resultante $\vec{J}$ a que é submetido o alvo no intervalo de tempo Δt está orientado ao longo do eixo x e tem o mesmo módulo $n\,\Delta p$ que a variação do momento linear e o sentido contrário. Podemos escrever esta relação na forma

$$J = -n\,\Delta p, \qquad (9\text{-}36)$$

onde o sinal negativo indica que J e Δp têm sentidos opostos.

Combinando as Eqs. 9-35 e 9-36, podemos obter a força média $F_{méd}$ que age sobre o alvo durante as colisões:

$$F_{méd} = \frac{J}{\Delta t} = -\frac{n}{\Delta t}\,\Delta p = -\frac{n}{\Delta t}\,m\,\Delta v. \qquad (9\text{-}37)$$

Esta equação expressa $F_{méd}$ em termos de $n/\Delta t$, a taxa com a qual os projéteis colidem com o alvo, e Δv, a variação de velocidade dos projéteis.

Se os projéteis param após o choque, a variação de velocidade é dada por

$$\Delta v = v_f - v_i = 0 - v = -v, \qquad (9\text{-}38)$$

onde $v_i\,(= v)$ e $v_f\,(= 0)$ são as velocidades antes e depois da colisão, respectivamente. Se, em vez disso, os projéteis ricocheteiam no alvo sem que a velocidade escalar se reduza, $v_f = -v$ e, portanto,

$$\Delta v = v_f - v_i = -v - v = -2v. \qquad (9\text{-}39)$$

No intervalo de tempo Δt, uma quantidade de massa $\Delta m = nm$ colide com o alvo. Sendo assim, podemos escrever a Eq. 9-37 na forma

$$F_{méd} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\,\Delta v. \qquad (9\text{-}40)$$

Esta equação expressa a força média $F_{méd}$ em termos de $\Delta m/\Delta t$, a taxa com a qual a massa colide com o alvo. Mais uma vez, podemos substituir Δv pelo resultado da Eq. 9-38 ou 9-39, dependendo do que acontece com os projéteis após as colisões.

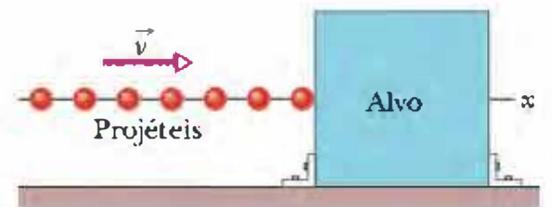
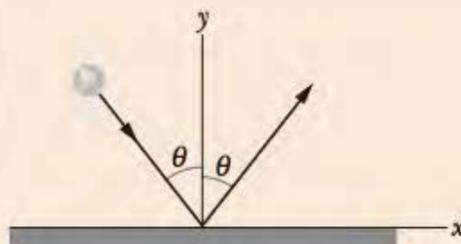



Figura 9-10 Uma série de projéteis, todos com o mesmo momento linear, colide com um alvo fixo. A força média $F_{méd}$ exercida sobre o alvo aponta para a direita e tem um módulo que depende da taxa com a qual os projéteis colidem com o alvo ou, alternativamente, da taxa com a qual a massa colide com o alvo.

TESTE 5

A figura mostra uma vista superior de uma bola ricocheteando em uma parede vertical sem que a velocidade escalar da bola varie. Considere a variação $\Delta\vec{p}$ do momento linear da bola. (a) Δp_x é positiva, negativa ou nula? (b) Δp_y é positiva, negativa ou nula? (c) Qual é a orientação de $\Delta\vec{p}$?

Exemplo

Impulso bidimensional: colisão entre um carro de corrida e um muro de proteção

A Fig. 9-11*a* é uma vista superior da trajetória de um carro de corrida ao colidir com um muro de proteção. Antes da colisão, o carro está se movendo com uma velocidade escalar $v_i = 70$ m/s ao longo de uma linha reta que faz um ângulo de 30° com o muro. Após a colisão, está se movendo com velocidade escalar $v_f = 50$ m/s ao longo de uma linha reta que faz um ângulo de 10° com o muro. A massa m do piloto é 80 kg.

(a) Qual é o impulso $\vec{J}$ a que o piloto é submetido no momento da colisão?

IDEIAS-CHAVE

Podemos tratar o piloto como uma partícula e assim aplicar os princípios de física discutidos nesta seção. Entretanto, não podemos calcular $\vec{J}$ diretamente a partir da Eq. 9-30 porque não conhecemos a força $\vec{F}(t)$ que age sobre o piloto durante a colisão. Em outras palavras, não dispomos de uma função nem de um gráfico que permita obter o valor de $\vec{J}$ por integração. Por outro lado, podemos usar a Eq. 9-32 ($\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$) para calcular $\vec{J}$ a partir da variação do momento linear.

Cálculos A Fig. 9-11*b* mostra o momento do piloto antes da colisão, $\vec{p}_i$ (que faz um ângulo de 30° com o semieixo x positivo), e o momento do piloto depois da colisão, $\vec{p}_f$ (que faz um ângulo de −10° com o semieixo x positivo). De acordo com as Eqs. 9-32 e 9-22 ($\vec{p} = m\vec{v}$), podemos escrever

$$\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = m(\vec{v}_f - \vec{v}_i). \qquad (9\text{-}41)$$

Poderíamos calcular o lado direito da Eq. 9-41 diretamente ou com o auxílio de uma calculadora, pois sabemos que m é 80 kg, $\vec{v}_f$ tem um módulo de 50 m/s e um ângulo de −10° e $\vec{v}_i$ tem um módulo de 70 m/s e um ângulo de 30°. Em vez disso, vamos resolver a Eq. 9-41 separando-a em componentes.

Componente x Para o eixo x, temos:

$$\begin{aligned} J_x &= m(v_{fx} - v_{ix}) \\ &= (80\text{ kg})[(50\text{ m/s})\cos(-10°) - (70\text{ m/s})\cos 30°] \\ &= -910\text{ kg}\cdot\text{m/s}. \end{aligned}$$

Componente y Para o eixo y, temos:

$$\begin{aligned} J_y &= m(v_{fy} - v_{iy}) \\ &= (80\text{ kg})[(50\text{ m/s})\,\text{sen}(-10°) - (70\text{m/s})\text{sen}30°] \\ &= -3495\text{ kg}\cdot\text{m/s} \approx -3500\text{ kg}\cdot\text{m/s}. \end{aligned}$$

Impulso O impulso é, portanto,

$$\vec{J} = (-910\hat{i} - 3500\hat{j})\text{ kg}\cdot\text{m/s}, \qquad \text{(Resposta)}$$

o que significa que o módulo do impulso é

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = 3616\text{ kg}\cdot\text{m/s} \approx 3600\text{ kg}\cdot\text{m/s}.$$

O ângulo de $\vec{J}$ é dado por

$$\theta = \tan^{-1}\frac{J_y}{J_x}, \qquad \text{(Resposta)}$$

que, de acordo com uma calculadora, é 75,4°. Lembre-se de que o resultado fisicamente correto do arco tangente pode ser o indicado pela calculadora ou o indicado pela calculadora mais 180°. Para verificar qual dos dois é o resultado correto, podemos desenhar as componentes de $\vec{J}$ (Fig. 9-11*c*). Fazendo isso, verificamos que θ é, na verdade, 75,4° + 180° = 255,4°, que também pode ser escrito como

$$\theta = -105°. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) A colisão dura 14 ms. Qual é o módulo da força média que o piloto experimenta durante a colisão?

IDEIA-CHAVE

De acordo com a Eq. 9-35 ($J = F_{méd}\Delta t$), o módulo $F_{méd}$ da força média é a razão entre o módulo do impulso, J, e a duração Δt da colisão.

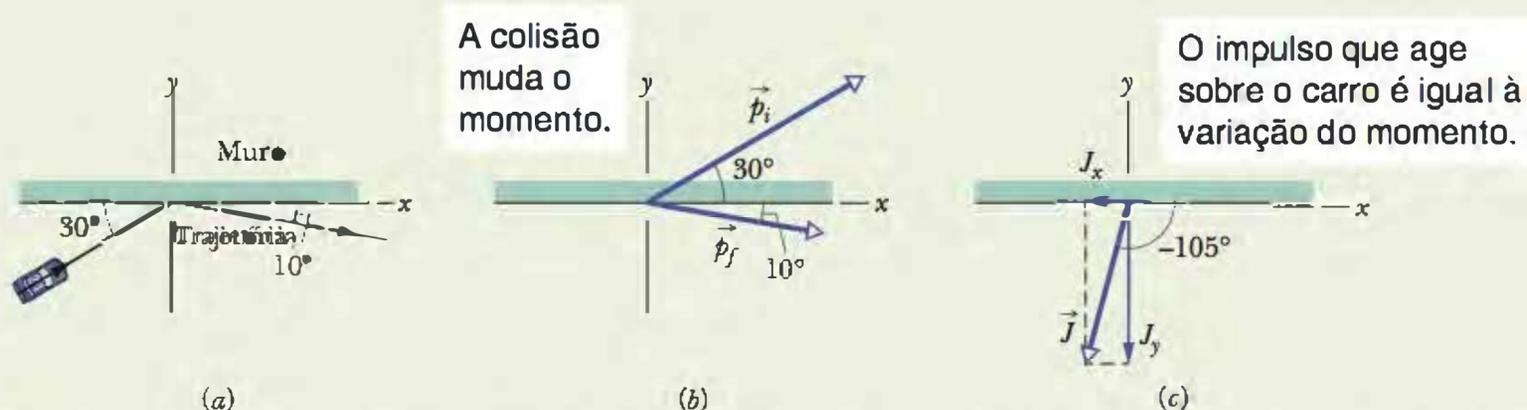



Figura 9-11 (*a*) Vista superior da trajetória seguida por um carro de corrida e seu piloto quando o carro colide com um muro de proteção. (*b*) O momento inicial $\vec{p}_i$ e o momento final $\vec{p}_f$ do piloto. (*c*) O impulso $\vec{J}$ sobre o piloto na colisão.

Cálculos Temos:

$$F_{méd} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{3616 \text{ kg}\cdot\text{m/s}}{0{,}014 \text{ s}}$$
$$= 2{,}583 \times 10^5 \text{ N} \approx 2{,}6 \times 10^5 \text{ N}. \quad \text{(Resposta)}$$

Usando a equação $F = ma$ com $m = 80$ kg, é fácil mostrar que o módulo da aceleração do piloto durante a colisão é $3{,}22 \times 10^3 \text{ m/s}^2 = 329g$. Uma aceleração tão elevada seria provavelmente fatal.

Nonnas de seguiança Os engenheiros mecânicos tentam reduzir os riscos dos pilotos de corrida projetando muros "macios" para que as colisões durem mais tempo. Se a colisão examinada neste exemplo durasse 10 vezes mais tempo e todos os outros parâmetros permanecessem iguais, os módulos da força média e da aceleração média seriam 10 vezes menores e o piloto provavelmente sobreviveria.

9-7 Conservação do Momento Linear

Suponha que a força externa resultante $\vec{F}_{res}$ (e, portanto, o impulso $\vec{J}$) que age sobre um sistema de partículas é zero (ou seja, que o sistema é isolado) e que nenhuma partícula entra ou sai do sistema (ou seja, que o sistema é fechado). Fazendo $\vec{F}_{res} = 0$ na Eq. 9-27, temos $d\vec{P}/dt = 0$ e, portanto,

$$\vec{P} = \text{constante} \quad \text{(sistema fechado e isolado).} \tag{9-42}$$

Em palavras,

Se um sistema de partículas não está submetido a uma força externa, o momento linear total $\vec{P}$ do sistema não pode variar.

Este resultado, conhecido como **lei de conservação do momento linear,** também pode ser escrito na forma

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \quad \text{(sistema fechado e isolado).} \tag{9-43}$$

Em palavras, esta equação significa que, em um sistema fechado e isolado,

$$\begin{pmatrix}\text{momento linear total em} \\ \text{um instante inicial } t_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{momento linear total em} \\ \text{um instante posterior } t_f\end{pmatrix}.$$

Atenção: a conservação do momento não deve ser confundida com conservação de energia. Nos exemplos desta seção, o momento é conservado, mas o mesmo não acontece com a energia.

Como as Eqs. 9-42 e 9-43 são equações vetoriais, cada uma equivale a três equações para a conservação do momento linear em três direções mutuamente perpendiculares, como, por exemplo, em um sistema de coordenadas xyz. Dependendo das forças presentes no sistema, o momento linear pode ser conservado em uma ou duas direções, mas não em todas. Entretanto,

Se uma das componentes da força *externa* aplicada a um sistema fechado é nula, a componente do momento linear do sistema em relação ao mesmo eixo não pode variar.

Suponha, por exemplo, que você arremesse uma laranja de uma extremidade à outra de um aposento. Durante o percurso, a única força externa que age sobre a laranja (que estamos considerando como o sistema) é a força gravitacional $\vec{F}_g$, dirigida verticalmente para baixo. Assim, a componente vertical do momento linear da laranja varia, mas, já que nenhuma força externa horizontal age sobre a laranja, a componente horizontal do momento linear não pode variar.

Note que estamos falando das forças externas que agem sobre um sistema fechado. Embora forças internas possam mudar o momento linear de partes do sistema, não podem mudar o momento linear total do sistema.

Os exemplos desta seção envolvem explosões unidimensionais (o que significa que os movimentos antes e depois da explosão ocorrem ao longo de um único eixo) ou bidimensionais (o que significa que os movimentos ocorrem em um plano que contém dois eixos). Nas próximas seções, vamos discutir colisões unidimensionais e bidimensionais.

TESTE 6

Um artefato inicialmente em repouso sobre um piso sem atrito explode em dois pedaços, que deslizam pelo piso após a explosão. Um dos pedaços desliza no sentido positivo de um eixo x. (a) Qual é a soma dos momentos dos dois pedaços após a explosão? (c) O segundo pedaço pode se mover em uma direção diferente da do eixo x? (c) Qual é a orientação do momento do segundo pedaço?

Exemplo

Explosão unidimensional e velocidade relativa: rebocador espacial

A Fig. 9-12*a* mostra um rebocador espacial e uma cápsula de carga, de massa total M, viajando ao longo de um eixo x no espaço sideral com uma velocidade inicial $\vec{v}_i$ de módulo 2100 km/h em relação ao Sol. Com uma pequena explosão, o rebocador ejeta a cápsula de carga, de massa 0,20M (Fig. 9-12*b*). Depois disso, o rebocador passa a viajar 500 km/h mais depressa que a cápsula ao longo do eixo x, ou seja, a velocidade relativa v_{rel} entre o cargueiro e a cápsula é 500 km/h. Qual é, nesse instante, a velocidade v_{RS} do rebocador em relação ao Sol?

IDEIA-CHAVE

Como o sistema rebocador–cápsula é fechado e isolado, o momento linear total do sistema é conservado, ou seja,

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f, \tag{9-44}$$

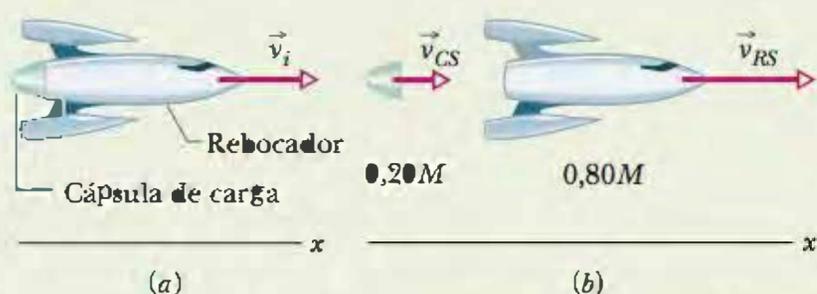



Figura 9-12 (*a*) Um rebocador espacial, com uma cápsula de carga, movendo-se com velocidade inicial $\vec{v}_i$. (*b*) O rebocador ejetou a cápsula de carga; agora as velocidades em relação ao Sol são $\vec{v}_{CS}$ para a cápsula e $\vec{v}_{RS}$ para o rebocador.

onde os índices i e f indicam os valores antes e depois da ejeção, respectivamente.

Cálculos Como o movimento é ao longo de um único eixo, podemos escrever os momentos e velocidades em termos das componentes x. Antes da ejeção, temos:

$$P_i = Mv_i. \tag{9-45}$$

Seja v_{CS} a velocidade da cápsula ejetada em relação ao Sol. O movimento linear total do sistema após a ejeção é dado por

$$P_f = (0.20M)v_{CS} + (0.80M)v_{RS}, \tag{9-46}$$

onde o primeiro termo do lado direito é o momento linear da cápsula de carga e o segundo termo é o momento do rebocador.

Não conhecemos a velocidade v_{CS} da cápsula em relação ao Sol, mas podemos relacioná-la às velocidades conhecidas através da equação

$$\begin{pmatrix}\text{velocidade do}\\\text{rebocador em}\\\text{relação ao Sol}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{velocidade do}\\\text{rebocador em}\\\text{relação à cápsula}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{velocidade da}\\\text{cápsula em}\\\text{relação ao Sol}\end{pmatrix}.$$

Em símbolos, isso nos dá

$$v_{RS} = v_{rel} + v_{CS} \tag{9-47}$$

ou

$$v_{CS} = v_{RS} - v_{rel}.$$

Substituindo esta expressão para v_{CS} na Eq. 9-46 e substituindo as Eqs. 9-45 e 9-46 na Eq. 9-44, obtemos

$$Mv_i = 0{,}20M(v_{RS} - v_{rel}) + 0.80Mv_{RS},$$

o que nos dá

$$v_{RS} = v_i + 0{,}20v_{rel},$$

ou

$$v_{RS} = 2100 \text{ km/h} + (0{,}20)(500 \text{ km/h})$$
$$= 2200 \text{ km/h}. \quad \text{(Resposta)}$$

Exemplo

Explosão bidimensional e momento: coco

Ao explodir, uma cabeça-de-negro colocada no interior de um coco vazio de massa M, inicialmente em repouso sobre uma superfície sem atrito, quebra o coco em três pedaços, que deslizam em uma superfície horizontal. Uma vista superior é mostrada na Fig. 9-13*a*. O pedaço C, de massa $0{,}30M$, tem uma velocidade escalar final $v_{fC} = 5{,}0$ m/s.

(a) Qual é a velocidade do pedaço B, de massa $0{,}20M$?

IDEIA-CHAVE

Em primeiro lugar, precisamos saber se o momento linear é conservado. Observamos que (1) o coco e seus pedaços formam um sistema fechado, (2) as forças da explosão são internas ao sistema e (3) nenhuma força externa age sobre o sistema. Isso significa que o momento linear do sistema é conservado.

Cálculos Para começar, introduzimos um sistema de coordenadas xy no sistema, como mostra a Fig. 9-13*b*, com o sentido negativo do eixo x coincidindo com o sentido de $\vec{v}_{fA}$. O eixo x faz 80° com a direção de $\vec{v}_{fC}$ e 50° com a direção de $\vec{v}_{fB}$.

O momento linear é conservado separadamente ao longo de cada eixo. Vamos usar o eixo y e escrever

$$P_{iy} = P_{fy}, \tag{9-48}$$

onde o índice i indica o valor inicial (antes da explosão), o índice f o valor final e o índice y a componente y de $\vec{P}_i$ ou $\vec{P}_f$.

A componente P_{iy} do momento linear inicial é zero, pois o coco está inicialmente em repouso. Para obter P_{fy}, determinamos a componente y do momento linear final de cada pedaço usando a versão para a componente y da Eq. 9-22 ($p_y = mv_y$):

$$p_{fA,y} = 0,$$
$$p_{fB,y} = -0{,}20Mv_{fB,y} = -0{,}20Mv_{fB}\,\text{sen}\,50°,$$
$$p_{fC,y} = 0{,}30Mv_{fC,y} = 0{,}30Mv_{fC}\,\text{sen}\,80°.$$

(Note que $p_{fA,y} = 0$ por causa de nossa escolha de eixos.) A Eq. 9-48 pode ser escrita na forma

$$P_{iy} = P_{fy} = p_{fA,y} + p_{fB,y} + p_{fC,y}.$$

Nesse caso, com $v_{fC} = 5{,}0$ m/s, temos:

$$0 = 0 - 0{,}20Mv_{fB}\,\text{sen}\,50° + (0{,}30M)(5{,}0\text{ m/s})\,\text{sen}\,80°,$$

e, portanto,

$$v_{fB} = 9{,}64\text{ m/s} \approx 9{,}6\text{ m/s}. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a velocidade escalar do pedaço A?

Cálculos Como o momento linear também é conservado ao longo do eixo x, temos:

$$P_{ix} = P_{fx}, \tag{9-49}$$

onde $P_{ix} = 0$, pois o coco está inicialmente em repouso. Para obter P_{fx}, determinamos as componentes x do momento linear final de cada pedaço usando o fato de que o pedaço A deve ter uma massa de $0{,}50M$ ($= M - 0{,}20M - 0{,}30M$):

$$p_{fA,x} = -0{,}50Mv_{fA},$$
$$p_{fB,x} = 0{,}20Mv_{fB,x} = 0{,}20Mv_{fB}\cos 50°,$$
$$p_{fC,x} = 0{,}30Mv_{fC,x} = 0{,}30Mv_{fC}\cos 80°.$$

A Eq. 9-49 pode ser escrita na forma

$$P_{ix} = P_{fx} = p_{fA,x} + p_{fB,x} + p_{fC,x}.$$

Nesse caso, com $v_{fC} = 5{,}0$ m/s e $v_{fB} = 9{,}64$ m/s, temos:

$$0 = -0{,}50Mv_{fA} + 0{,}20M(9{,}64\text{ m/s})\cos 50° + 0{,}30M(5{,}0\text{ m/s})\cos 80°,$$

e, portanto,

$$v_{fA} = 3{,}0\text{ m/s}. \quad \text{(Resposta)}$$

A separação explosiva pode mudar o momento de partes do sistema, mas o momento total do sistema permanece constante.

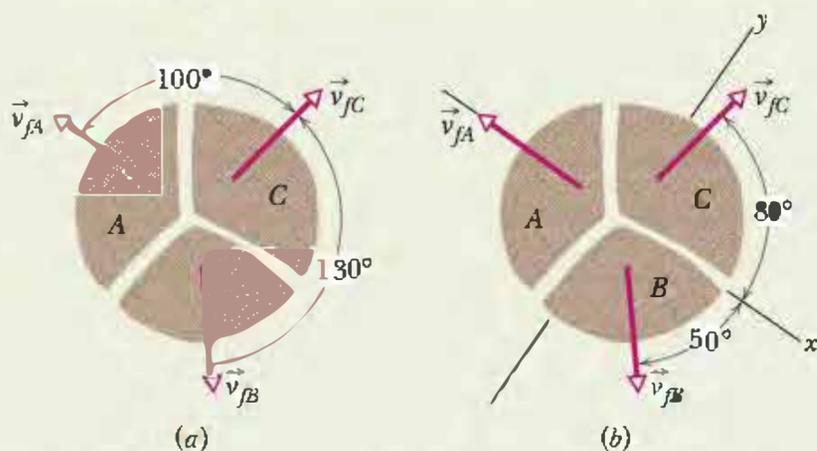



Figura 9-13 Três pedaços de um coco que explodiu se afastam em três direções sobre um piso sem atrito. (*a*) Vista superior do evento. (*b*) O mesmo com um sistema de eixos bidimensional superposto.

9-8 Momento e Energia Cinética em Colisões

Na Seção 9-6, consideramos a colisão de dois corpos que se comportavam como partículas, mas nos concentramos em apenas um dos corpos. Nas próximas seções, estudaremos o sistema de dois corpos como um todo, supondo que se trata de um sistema fechado e isolado. Na Seção 9-7, discutimos uma regra para sistemas desse tipo: o momento linear total $\vec{P}$ do sistema não pode variar, já que não há uma força externa para causar essa variação. Trata-se de uma regra muito importante, pois permite determinar o resultado de uma colisão *sem conhecer* detalhes da colisão, como a extensão dos danos.

Também estaremos interessados na energia cinética total de um sistema de dois corpos que colidem. Se a energia cinética total não é alterada pela colisão, a energia cinética do sistema é *conservada* (é a mesma antes e depois da colisão). Este tipo de colisão é chamado de **colisão elástica**. Nas colisões entre corpos comuns, que acontecem no dia a dia, como a colisão de dois carros ou de uma bola com um taco, parte da energia é transferida da energia cinética para outras formas de energia, como energia térmica e energia sonora. Isso significa que a energia cinética não é conservada. Este tipo de colisão é chamado de **colisão inelástica**.

Em algumas situações, podemos considerar uma colisão de corpos comuns como *aproximadamente* elástica. Suponha que você deixa cair uma Superbola em um piso duro. Se a colisão entre a bola e o piso (ou a Terra) fosse elástica, a bola não perderia energia cinética na colisão e voltaria à altura inicial. Na prática, a altura atingida pela bola após a colisão é ligeiramente menor, o que mostra que parte da energia cinética é perdida na colisão e, portanto, a colisão é inelástica. Entretanto, dependendo do tipo de cálculo que estamos executando, pode ser válido desprezar a pequena quantidade de energia cinética perdida e considerar a colisão como se fosse elástica.

A colisão inelástica de dois corpos sempre envolve uma perda de energia cinética por parte do sistema. A maior perda ocorre quando os dois corpos permanecem juntos, caso em que a colisão é chamada de **colisão perfeitamente inelástica**. A colisão de uma bola de beisebol com um taco é inelástica, enquanto a colisão de uma bola de massa de modelar com um taco é perfeitamente inelástica, pois, nesse caso, a bola adere ao bastão.

9-9 Colisões Inelásticas em Uma Dimensão

Colisão Inelástica Unidimensional

A Fig. 9-14 mostra dois corpos pouco antes e pouco depois de sofrerem uma colisão unidimensional. As velocidades antes da colisão (índice i) e depois da colisão (índice f) estão indicadas. Os dois corpos constituem um sistema fechado e isolado. Podemos escrever a lei de conservação do momento linear para este sistema de dois corpos como

$$\begin{pmatrix}\text{momento total } \vec{P}_i \\ \text{antes da colisão}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{momento total } \vec{P}_f \\ \text{depois da colisão}\end{pmatrix},$$

ou, em símbolos,

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \quad \text{(conservação do momento linear).} \tag{9-50}$$

Como o movimento é unidimensional, podemos substituir os vetores por componentes em relação a um único eixo. Assim, a partir da equação $p = mv$, podemos escrever a Eq. 9-50 na forma

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}. \tag{9-51}$$

Se conhecemos os valores, digamos, das massas, das velocidades iniciais e de uma das velocidades finais, podemos calcular a outra velocidade final usando a Eq. 9-51.

Representação esquemática de uma colisão inelástica.

Corpo 1 Corpo 2
Antes $\vec{v}_{1i}$ $\vec{v}_{2i}$ m_1 m_2 x
Depois $\vec{v}_{1f}$ $\vec{v}_{2f}$ m_1 m_2 x

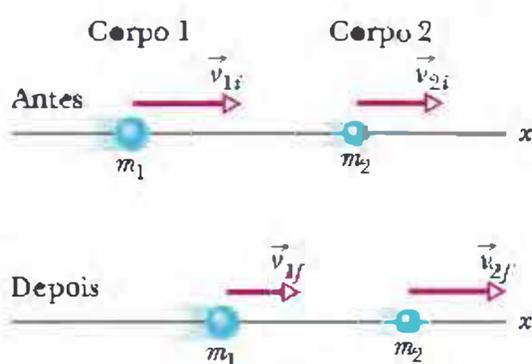



Figura 9-14 Os corpos 1 e 2 se movem ao longo de um eixo x, antes e depois de sofrerem uma colisão inelástica.

Colisões Perfeitamente Inelásticas Unidimensionais

A Fig. 9-15 mostra dois corpos antes e depois de sofrerem uma colisão perfeitamente inelástica (ou seja, os corpos permanecem unidos após a colisão). O corpo de massa m_2 está inicialmente em repouso ($v_{2i} = 0$). Podemos nos referir a este corpo como *alvo* e ao corpo incidente como *projétil*. Após a colisão, os dois corpos se movem juntos com velocidade V. Nesta situação, podemos escrever a Eq. 9-51 como

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2)V \tag{9-52}$$

ou

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}. \tag{9-53}$$

Se conhecemos os valores, digamos, das massas e da velocidade inicial v_{1i} do projétil, podemos calcular a velocidade final V usando a Eq. 9-53. Note que V é sempre menor que v_{1i}, já que a razão $m_1/(m_1 + m_2)$ é sempre menor que 1.

Velocidade do Centro de Massa

Em um sistema fechado e isolado, a velocidade $\vec{v}_{CM}$ do centro de massa do sistema não pode variar em uma colisão porque não existem forças externas para causar essa variação. Para obter o valor de $\vec{v}_{CM}$, vamos voltar ao sistema de dois corpos e à colisão unidimensional da Fig. 9-14. De acordo com a Eq. 9-25 ($\vec{P} = M\vec{v}_{CM}$), podemos relacionar $\vec{v}_{CM}$ ao momento linear total $\vec{P}$ do sistema de dois corpos escrevendo

$$\vec{P} = M\vec{v}_{CM} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM}. \tag{9-54}$$

Como o momento linear total $\vec{P}$ é conservado na colisão, é dado pelos dois lados da Eq. 9-50. Vamos usar o lado esquerdo e escrever

$$\vec{P} = \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}. \tag{9-55}$$

Substituindo esta expressão de $\vec{P}$ na Eq. 9-54 e explicitando $\vec{v}_{CM}$, obtemos

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{P}}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}}{m_1 + m_2}. \tag{9-56}$$

O lado direito desta equação é uma constante e $\vec{v}_{CM}$ tem este valor constante antes e depois da colisão.

Assim, por exemplo, a Fig. 9-16 mostra, em uma série de instantâneos, o movimento do centro de massa para a colisão perfeitamente inelástica da Fig. 9-15. O corpo 2 é o alvo e o momento linear inicial do corpo 2 na Eq. 9-56 é $\vec{p}_{2i} = m_2\vec{v}_{2i} = 0$. O corpo 1 é o projétil e o momento linear inicial do corpo 1 na Eq. 9-56 é $\vec{p}_{1i} = m_1\vec{v}_1$. Note que antes e depois da colisão o centro de massa se move com velocidade constante para a direita. Depois da colisão, a velocidade final V comum aos corpos é igual a $\vec{v}_{CM}$, uma vez que a partir desse momento o centro de massa coincide com o conjunto formado pelos dois corpos.

Em uma colisão perfeitamente inelástica, os corpos permanecem unidos após a colisão.

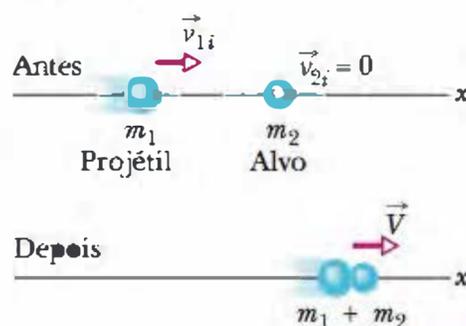
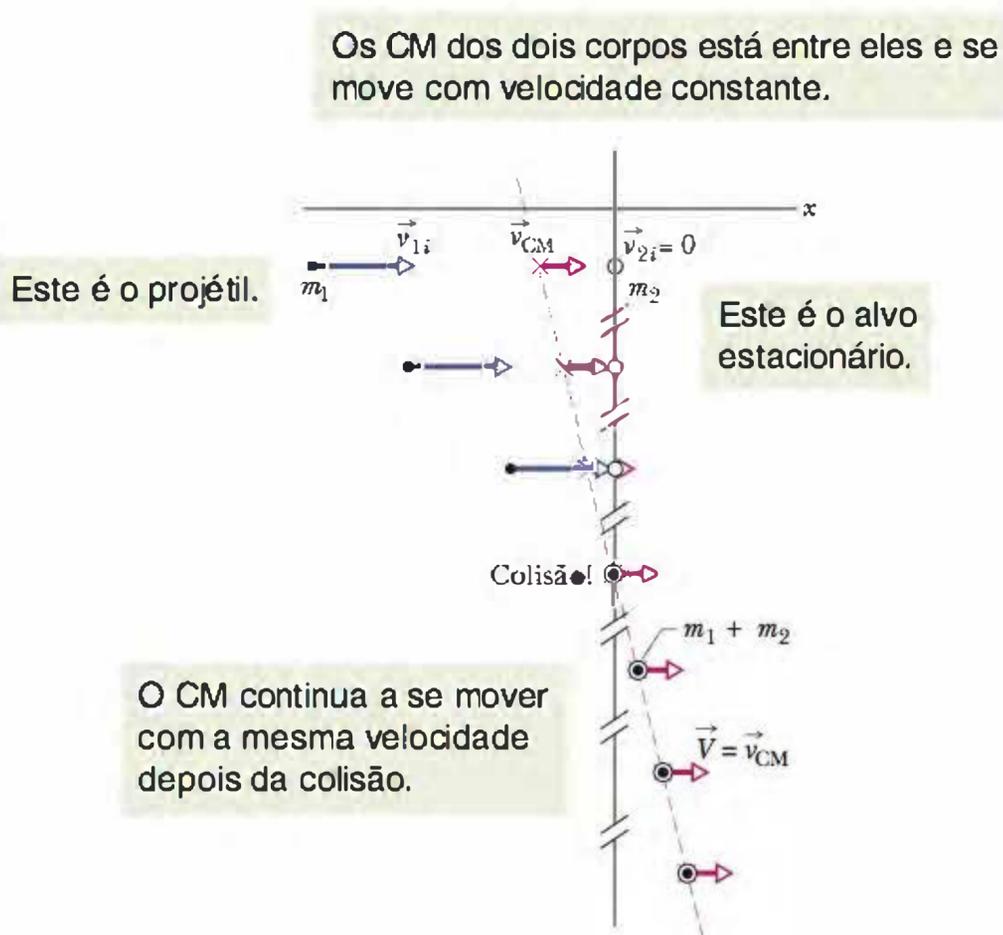



Figura 9-15 Uma colisão perfeitamente inelástica entre dois corpos. Antes da colisão, o corpo de massa m_2 está em repouso e o corpo de massa m_1 está se movendo. Após a colisão, os corpos unidos se movem com a mesma velocidade $\vec{V}$.

Figura 9-16 (*a*) Alguns instantâneos do sistema de dois corpos da Fig. 9-15, no qual ocorre uma colisão perfeitamente inelástica. O centro de massa do sistema é mostrado em cada instantâneo. A velocidade $\vec{v}_{CM}$ do centro de massa não é afetada pela colisão. Como os corpos permanecem juntos após a colisão, a velocidade comum $\vec{V}$ é igual a $\vec{v}_{CM}$.

TESTE 7

O corpo 1 e o corpo 2 sofrem uma colisão perfeitamente inelástica. Qual é o momento linear final dos corpos se os momentos iniciais são, respectivamente, (a) 10 kg · m/s e 0; (b) 10 kg · m/s e 4 kg · m/s; (c) 10 kg · m/s e −4 kg · m/s?

Exemplo

Conservação do momento: pêndulo balístico

O *pêndulo balístico* era usado para medir a velocidade dos projéteis quando não havia sensores eletrônicos. A versão mostrada na Fig. 9-17 é composta por um grande bloco de madeira de massa $M = 5{,}4$ kg pendurado em duas cordas compridas. Uma bala de massa $m = 9{,}5$ g é disparada contra o bloco e fica incrustada na madeira. Com o impulso, o pêndulo descreve um arco de circunferência, fazendo com que o centro de massa do sistema *bloco-bala* atinja uma altura máxima $h = 6{,}3$ cm. Qual era a velocidade da bala antes da colisão?

IDEIAS-CHAVE

É fácil perceber que a altura h atingida pelo centro de massa depende da velocidade v da bala. Entretanto, não podemos usar a conservação da energia mecânica para relacionar as duas grandezas porque, certamente, alguma energia é transferida de energia mecânica para outras formas (como energia térmica e a energia necessária para abrir caminho na madeira) quando a bala penetra no bloco. Entretanto, podemos dividir este movimento complicado em duas etapas que podem ser analisadas separadamente: (1) a colisão entre a bala e o bloco e (2) a subida do sistema bala–bloco, na qual a energia mecânica é conservada.

Primeiro raciocínio Como a colisão dura muito pouco tempo, podemos fazer duas importantes suposições: (1) durante a colisão, a força gravitacional e as forças das cordas sobre o bloco estão em equilíbrio. Isso significa que, durante a colisão, o impulso externo total sobre o sistema bala–bloco é zero e, portanto, o sistema está isolado e o momento linear total é conservado:

$$\begin{pmatrix}\text{momento total}\\ \text{antes da colisão}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{momento total}\\ \text{depois da colisão}\end{pmatrix}. \qquad (9\text{-}57)$$

(2) A colisão é unidimensional, no sentido de que a direção do movimento da bala e do bloco *imediatamente após a colisão* é a mesma da bala antes da colisão.

Como a colisão é unidimensional, o bloco está inicialmente em repouso e a bala fica presa no bloco, usamos a Eq. 9-53 para expressar a conservação do momento linear. Trocando os símbolos da Eq. 9-53 para os símbolos correspondentes do problema que estamos analisando, temos:

$$V = \frac{m}{m + M}\, v. \qquad (9\text{-}58)$$

Segundo raciocínio Como a bala e o bloco agora oscilam juntos, a energia mecânica do sistema bala–bloco–Terra é conservada:

$$\begin{pmatrix}\text{energia mecânica}\\ \text{embaixo}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{energia mecânica}\\ \text{no alto}\end{pmatrix}. \quad (9\text{-}59)$$

(Esta energia mecânica não é afetada pela força das cordas sobre o bloco porque essa força é sempre perpendicular à trajetória do bloco.) Vamos tomar a altura inicial do bloco como nível de referência de energia potencial gravitacional zero. Nesse caso, de acordo com a lei de conservação da energia mecânica, a energia cinética do sistema no início da oscilação deve ser igual à energia potencial gravitacional no ponto mais alto da oscilação. Como a velocidade da bala e do bloco no início da oscilação é a velocidade V imediatamente após a colisão, podemos escrever esta igualdade como

$$\tfrac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gh. \quad (9\text{-}60)$$

Combinando os resultados Substituindo V na Eq. 9-60 pelo seu valor, dado pela Eq. 9-58, obtemos:

$$v = \frac{m + M}{m}\sqrt{2gh} \quad (9\text{-}61)$$

$$= \left(\frac{0{,}0095\ \text{kg} + 5{,}4\ \text{kg}}{0{,}0095\ \text{kg}}\right)\sqrt{(2)(9{,}8\ \text{m/s}^2)(0{,}063\ \text{m})}$$

$$= 630\text{m/s}. \quad \text{(Resposta)}$$

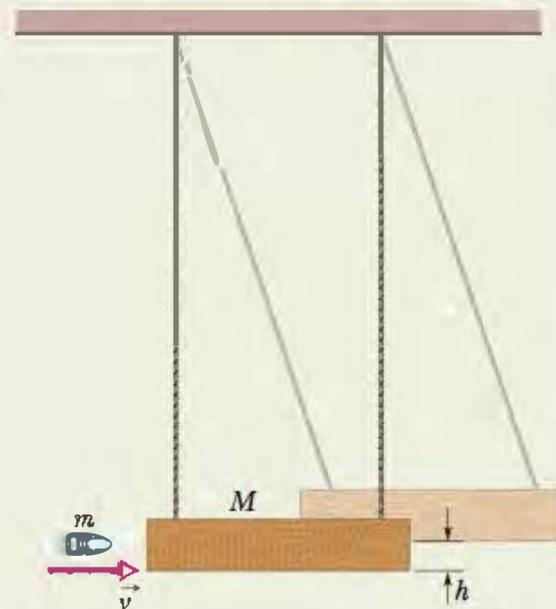



Figura 9-17 Um pêndulo balístico, usado para medir a velocidade de projéteis.

O pêndulo balístico é uma espécie de "transformador" que troca a alta velocidade de um objeto leve (a bala) pela velocidade baixa (e, portanto, fácil de medir) de um objeto pesado (o bloco).

9-10 Colisões Elásticas em Uma Dimensão

Como comentamos na Seção 9-8, as colisões que acontecem no dia a dia são inelásticas, mas podemos supor que algumas são aproximadamente elásticas, ou seja, que a energia cinética total dos corpos envolvidos na colisão não é convertida em outras formas de energia e, portanto, é conservada:

$$\begin{pmatrix}\text{energia cinética total}\\ \text{antes da colisão}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{energia cinética total}\\ \text{depois da colisão}\end{pmatrix}. \quad (9\text{-}62)$$

Isso não significa que a energia dos corpos envolvidos na colisão não varia:

> Nas colisões elásticas, a energia cinética dos corpos envolvidos na colisão pode variar, mas a energia cinética total do sistema permanece a mesma.

Assim, por exemplo, a colisão da bola branca com uma bola colorida no jogo de sinuca pode ser considerada aproximadamente elástica. Se a colisão é frontal (ou seja, se a bola branca incide em cheio na outra bola), a energia cinética da bola branca pode ser transferida quase inteiramente para a outra bola. (Entretanto, o fato de que a colisão produz ruído significa que pelo menos uma pequena parte da energia cinética é transferida para energia sonora.)

Figura 9-18 O corpo 1 se move ao longo de um eixo x antes de sofrer uma colisão elástica com o corpo 2, que está inicialmente em repouso. Os dois corpos se movem ao longo do eixo x após a colisão.

Alvo Estacionário

A Fig. 9-18 mostra dois corpos antes e depois de uma colisão unidimensional, como uma colisão frontal de bolas de sinuca. Um projétil de massa m_1 e velocidade inicial

v_{1i} se move em direção a um alvo de massa m_2 que está inicialmente em repouso (v_{2i} = 0). Vamos supor que este sistema de dois corpos é fechado e isolado. Nesse caso, o momento linear total do sistema é conservado e, de acordo com a Eq. 9-51, temos:

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad \text{(momento linear)}. \tag{9-63}$$

Se a colisão é elástica, a energia cinética total também é conservada e podemos expressar esse fato através da equação

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad \text{(energia cinética)}. \tag{9-64}$$

Nas duas equações, o índice i indica a velocidade inicial e o subscrito f a velocidade final dos corpos. Se conhecemos as massas dos corpos e também conhecemos v_{1i}, a velocidade inicial do corpo 1, as únicas grandezas desconhecidas são v_{1f} e v_{2f}, as velocidades finais dos dois corpos. Com duas equações à disposição, podemos calcular o valor dessas incógnitas.

Para isso, escrevemos a Eq. 9-63 na forma

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2 v_{2f} \tag{9-65}$$

e a Eq. 9-64 na forma*

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2 v_{2f}^2. \tag{9-66}$$

Dividindo a Eq. 9-66 pela Eq. 9-65 e reagrupando os termos, obtemos

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \tag{9-67}$$

e

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}. \tag{9-68}$$

De acordo com a Eq. 9-68, v_{2f} é sempre positiva (o alvo inicialmente parado de massa m_2 sempre se move para a frente). De acordo com a Eq. 9-67, v_{1f} pode ser positiva ou negativa (o projétil se move para a frente se $m_1 > m_2$ e ricocheteia se $m_1 < m_2$).

Vamos examinar algumas situações especiais.

1. ***Massas iguais*** Se $m_1 = m_2$, as Eqs. 9-67 e 9-68 se reduzem a

$$v_{1f} = 0 \quad \text{e} \quad v_{2f} = v_{1i},$$

que poderíamos chamar de resultado da sinuca. Depois de uma colisão elástica frontal de corpos de massas iguais, o corpo 1 (inicialmente em movimento) para totalmente e o corpo 2 (inicialmente em repouso) entra em movimento com a velocidade inicial do corpo 1. Em colisões elásticas frontais, corpos de massas iguais simplesmente trocam de velocidade. Isso acontece mesmo que o corpo 2 não esteja inicialmente em repouso.

2. ***Alvo pesado*** Na Fig. 9-18, um alvo pesado significa que $m_2 \gg m_1$. Esse seria o caso, por exemplo, de uma bola de tênis lançada contra uma bola de boliche em repouso. Nessa situação, as Eqs. 9-67 e 9-68 se reduzem a

$$v_{1f} \approx -v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{2f} \approx \left(\frac{2m_1}{m_2}\right) v_{1i}. \tag{9-69}$$

A conclusão é que o corpo 1 (a bola de tênis) ricocheteia e refaz a trajetória no sentido inverso, com a velocidade escalar praticamente inalterada. O corpo 2 (a bola de boliche), inicialmente em repouso, move-se para a frente em baixa velocidade, pois o fator entre parênteses na Eq. 9-69 é muito menor do que 1. Tudo isso está dentro do esperado.

---

* Nesta passagem, usamos a identidade $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Isso facilita a solução do sistema de equações constituído pelas Eqs. 9-65 e 9-66.

3. ***Projétil pesado*** Este é o caso oposto, no qual $m_1 >> m_2$. Desta vez, uma bola de boliche é lançada contra uma bola de tênis em repouso. As Eqs. 9-67 e 9-68 se reduzem a

$$v_{1f} \approx v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{2f} \approx 2v_{1i}. \tag{9-70}$$

De acordo com a Eq. 9-70, o corpo 1 (a bola de boliche) simplesmente mantém a trajetória, praticamente sem ser freada pela colisão. O corpo 2 (a bola de tênis) é arremessado para a frente com o dobro da velocidade da bola de boliche.

O leitor deve estar se perguntando: por que o dobro da velocidade? Para compreender a razão, lembre-se da colisão descrita pela Eq. 9-69, na qual a velocidade do corpo leve incidente (a bola de tênis) mudou de $+v$ para $-v$, ou seja, a velocidade sofreu uma *variação* de $2v$. A mesma variação de velocidade (agora de 0 para $2v$) acontece neste exemplo.

Alvo em Movimento

Agora que examinamos a colisão elástica de um projétil com um alvo em repouso, vamos analisar a situação na qual os dois corpos estão em movimento antes de sofrerem uma colisão elástica.

Para a situação da Fig. 9-19, a conservação do momento linear pode ser escrita na forma

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}, \tag{9-71}$$

e a conservação da energia cinética na forma

$$\tfrac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2f}^2. \tag{9-72}$$

Para resolver esse sistema de equações e obter os valores de v_{1f} e v_{2f}, primeiro escrevemos a Eq. 9-71 na forma

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = -m_2(v_{2i} - v_{2f}), \tag{9-73}$$

e a Eq. 9-72 na forma

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = -m_2(v_{2i} - v_{2f})(v_{2i} + v_{2f}). \tag{9-74}$$

Dividindo a Eq. 9-74 pela Eq. 9-73 e reagrupando os termos, obtemos

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_{2i} \tag{9-75}$$

e

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_{2i}. \tag{9-76}$$

Representação esquemática de uma colisão com um alvo em movimento.

$\vec{v}_{1i}$ $\vec{v}_{2i}$ x m_1 m_2

Figura 9-19 Dois corpos prestes a sofrer uma colisão elástica unidimensional.

Note que a correspondência entre os índices 1 e 2 e os dois corpos é arbitrária. Se trocarmos os índices na Fig. 9-19 e nas Eqs. 9-75 e 9-76, acabaremos com o mesmo sistema de equações. Note também que se fizermos $v_{2i} = 0$, o corpo 2 se tornará um alvo estacionário, como na Fig. 9-18, e as Eqs. 9-75 e 9-76 se reduzirão às Eqs. 9-67 e 9-68, respectivamente.

TESTE 8

Qual é o momento linear final do alvo da Fig. 9-18 se o momento linear inicial do projétil é 6 kg · m/s e o momento linear final do projétil é (a) 2 kg · m/s e (b) −2 kg · m/s? (c) Qual é a energia cinética final do alvo se as energias cinética inicial e final do projétil é, respectivamente, 5 J e 2 J?

Exemplo

Colisão elástica de dois pêndulos

Duas esferas metálicas, inicialmente suspensas por cordas verticais, apenas se tocam, como mostra a Fig. 9-20. A esfera 1, de massa $m_1 = 30$ g, é puxada para a esquerda até a altura $h_1 = 8{,}0$ cm e liberada a partir do repouso. Na parte mais baixa da trajetória, sofre uma colisão elástica com a esfera 2, cuja massa é $m_2 = 75$ g. Qual é a velocidade v_{1f} da esfera 1 imediatamente após a colisão?

IDEIA-CHAVE

Podemos dividir este movimento complicado em duas etapas que podem ser analisadas separadamente: (1) a descida da esfera 1 (na qual a energia mecânica é conservada) e (2) a colisão das duas esferas (na qual o momento é conservado).

1ª etapa Quando a esfera 1 desce, a energia mecânica do sistema esfera–Terra é conservada. (A energia mecânica não é alterada pela força da corda sobre a esfera 1 porque essa força é perpendicular à trajetória da esfera.)

Cálculo Vamos tomar o nível mais baixo como o nível de referência de energia potencial gravitacional zero. Nesse caso, a energia cinética da esfera 1 no nível mais baixo é igual à energia potencial gravitacional do sistema quando a esfera 1 está na altura h_1, ou seja,

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = m_1 g h_1,$$

que podemos resolver para obter a velocidade v_{1i} da esfera 1 imediatamente antes da colisão:

$$v_{1i} = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{(2)(9.8\ \text{m/s}^2)(0{,}080\ \text{m})} = 1{,}252\ \text{m/s}.$$

2ª etapa Além de supor que a colisão é elástica, podemos fazer outras duas suposições. Primeiro, podemos supor que a colisão é unidimensional, já que os movimentos das esferas são aproximadamente horizontais nos momentos anterior e posterior à colisão. Segundo, como a colisão dura pouco tempo, podemos supor que o sistema de duas esferas é fechado e isolado. Isso significa que o momento linear total do sistema é conservado.

Cálculo Podemos, portanto, usar a Eq. 9-67 para calcular a velocidade da esfera 1 imediatamente após a colisão:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{0{,}030\ \text{kg} - 0{,}075\ \text{kg}}{0{,}030\ \text{kg} + 0{,}075\ \text{kg}}(1{,}252\ \text{m/s}) = -0{,}537\ \text{m/s} \approx -0{,}54\ \text{m/s}. \quad \text{(Resposta)}$$

O sinal negativo significa que a esfera 1 se move para a esquerda imediatamente após a colisão.

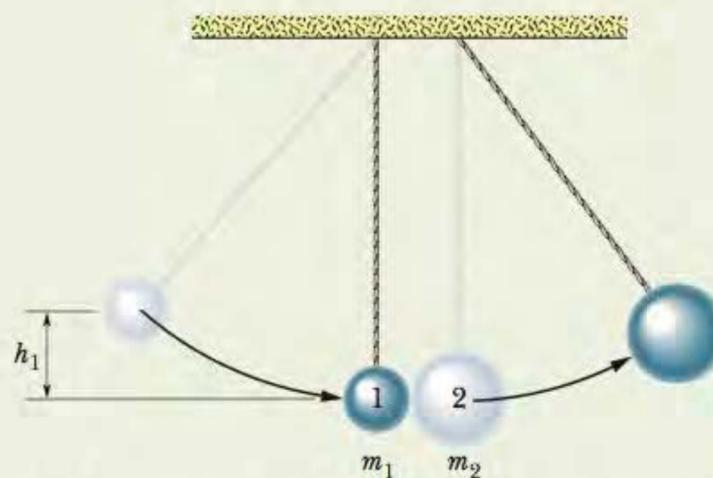



Figura 9-20 Duas esferas de metal suspensas por cordas apenas se tocam quando estão em repouso. A esfera 1, de massa m_1, é puxada para a esquerda até a altura h_1 e depois liberada.

9-11 Colisões em Duas Dimensões

Quando uma colisão não é frontal, a direção do movimento dos corpos é diferente antes e depois da colisão; entretanto, se o sistema é fechado e isolado, o momento linear total continua a ser conservado nessas colisões bidimensionais:

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}. \tag{9-77}$$

Se a colisão também é elástica (um caso especial), a energia cinética total também é conservada:

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}. \tag{9-78}$$

Na maioria dos casos, o uso da Eq. 9-77 para analisar uma colisão bidimensional é facilitado quando escrevemos a equação em termos das componentes em relação a

um sistema de coordenadas *xy*. A Fig. 9-21 mostra uma *colisão de raspão* (não frontal) entre um projétil e um alvo inicialmente em repouso. As trajetórias dos corpos após a colisão fazem ângulos θ_1 e θ_2 com o eixo *x*, que coincide com a direção de movimento do projétil antes da colisão. Nessa situação, a componente da Eq. 9-77 em relação ao eixo *x* é

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2, \tag{9-79}$$

e a componente ao longo do eixo *y* é

$$0 = -m_1 v_{1f} \operatorname{sen}\theta_1 + m_2 v_{2f} \operatorname{sen}\theta_2. \tag{9-80}$$

Podemos também escrever a Eq. 9-78 (para o caso especial de uma colisão elástica) em termos de velocidades:

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 \quad \text{(energia cinética)}. \tag{9-81}$$

As Eqs. 9-79 a 9-81 contêm sete variáveis; duas massas, m_1 e m_2; três velocidades, v_{1i}, v_{1f} e v_{2f}; dois ângulos, θ_1 e θ_2. Se conhecemos quatro dessas variáveis, podemos resolver as três equações para obter as três variáveis restantes.

Figura 9-21 Uma colisão elástica de raspão entre dois corpos. O corpo de massa m_2 (o alvo) está inicialmente em repouso.

TESTE 9

Suponha que, na situação da Fig. 9-21, o projétil tem um momento inicial de 6 kg · m/s, uma componente *x* do momento final de 4 kg · m/s e uma componente *y* do momento final de −3 kg · m/s. Determine (a) a componente *x* do momento final do alvo e (b) a componente *y* do momento final do alvo.

9-12 Sistemas de Massa Variável: Um Foguete

Em todos os sistemas que examinamos até agora, a massa total permanecia constante. Em certos casos, como o de um foguete, isso não é verdade. A maior parte da massa de um foguete, antes do lançamento, é constituída de combustível, que é posteriormente queimado e ejetado pelo sistema de propulsão.

Levamos em consideração a variação de massa do foguete aplicando a segunda lei de Newton, não ao foguete, mas o conjunto formado pelo foguete e todos os produtos ejetados. A massa *desse* sistema *não varia* com o tempo.

Cálculo da Aceleração

Suponha que estamos em repouso em relação a um referencial inercial, observando um foguete acelerar no espaço sideral sem que qualquer força gravitacional ou de arrasto atue sobre ele. Seja M a massa do foguete e v a velocidade em um instante arbitrário t (veja a Fig. 9-22*a*).

A Fig. 9-22*b* mostra a situação após um intervalo de tempo dt. O foguete agora está a uma velocidade $v + dv$ e possui uma massa $M + dM$, onde a variação de massa dM tem um valor *negativo*. Os produtos de exaustão liberados pelo foguete durante o intervalo dt têm massa $-dM$ e velocidade U em relação ao nosso referencial inercial.

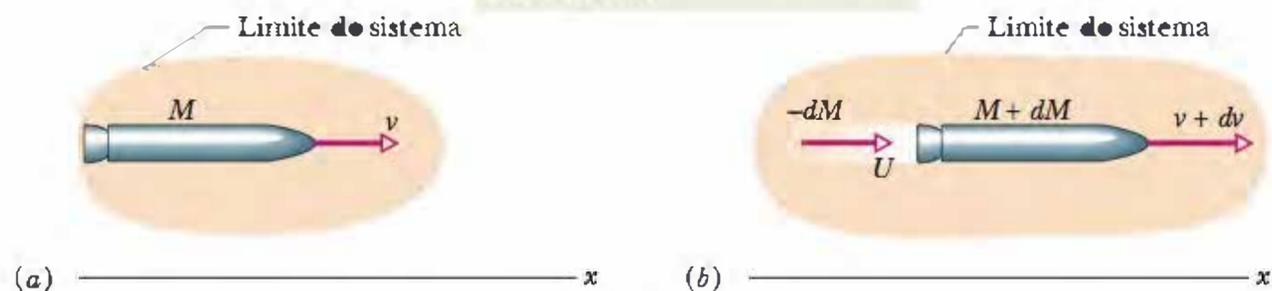



Figura 9-22 (*a*) Um foguete de massa M acelerando no instante t, do ponto de vista de um referencial inercial. (*b*) O mesmo foguete no instante $t + dt$. Os produtos de combustão ejetados durante o intervalo dt são mostrados na Figura.

Nosso sistema é formado pelo foguete e os produtos de exaustão ejetados no intervalo dt. Como o sistema é fechado e isolado, o momento linear total é conservado no intervalo dt, ou seja,

$$P_i = P_f, \tag{9-82}$$

onde os índices i e f indicam os valores no início e no fim do intervalo de tempo dt. Podemos escrever a Eq. 9-82 na forma

$$Mv = -dM\, U + (M + dM)(v + dv), \tag{9-83}$$

onde o primeiro termo do lado direito é o momento linear dos produtos de exaustão ejetados durante o intervalo dt e o segundo termo é o momento linear do foguete no fim do intervalo dt.

Podemos simplificar a Eq. 9-83 usando a velocidade relativa v_{rel} entre o foguete e os produtos de exaustão, que está relacionada às velocidades em relação ao referencial inercial através da equação

$$\begin{pmatrix}\text{velocidade do foguete em}\\ \text{relação ao referencial}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{velocidade do foguete}\\ \text{em relação aos produtos}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{velocidade dos produtos em}\\ \text{relação ao referencial}\end{pmatrix}.$$

Em símbolos, isso significa que

$$(v + dv) = v_{rel} + U,$$

ou

$$U = v + dv - v_{rel}. \tag{9-84}$$

Substituindo este valor de U na Eq. 9-83 e reagrupando os termos, obtemos

$$-dM\, v_{rel} = M\, dv. \tag{9-85}$$

Dividindo ambos os membros por dt, obtemos

$$-\frac{dM}{dt} v_{rel} = M \frac{dv}{dt}. \tag{9-86}$$

Podemos substituir dM/dt (a taxa com a qual o foguete perde massa) por $-R$, onde R é a taxa (positiva) de consumo de combustível e reconhecemos que dv/dt é a aceleração do foguete. Com essas mudanças, a Eq. 9-86 se torna

$$Rv_{rel} = Ma \quad \text{(primeira equação do foguete).} \tag{9-87}$$

A Eq. 9-87 vale para qualquer instante.

Note que o lado esquerdo da Eq. 9-87 tem dimensões de força (kg/s · m/s = kg · m/s^2 = N) e depende apenas de características do motor do foguete, ou seja, da taxa R de consumo de combustível e da velocidade v_{rel} com a qual os produtos da combustão são expelidos. O produto Rv_{rel} é chamado de **empuxo** do motor do foguete e representado pela letra T. A segunda lei de Newton se torna mais explícita quando escrevemos a Eq. 9-87 na forma $T = Ma$, onde a é a aceleração do foguete no instante em que a massa é M.

Cálculo da Velocidade

Como varia a velocidade do foguete enquanto o combustível é consumido? De acordo com a Eq. 9-85, temos:

$$dv = -v_{rel} \frac{dM}{M}.$$

Integrando ambos os membros, obtemos

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_{rel} \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M},$$

onde M_i é a massa inicial do foguete e M_f é a massa final. Calculando as integrais, obtemos

$$v_f - v_i = v_{\text{rel}} \ln \frac{M_i}{M_f} \quad \text{(segunda equação do foguete)} \qquad (9\text{-}88)$$

para o aumento da velocidade do foguete quando a massa muda de M_i para M_f. (O símbolo "ln" na Eq. 9-88 significa *logaritmo natural.*) A Eq. 9-88 ilustra muito bem a vantagem dos foguetes de vários estágios, nos quais M_f é reduzida descartando cada estágio quando o combustível do estágio se esgota. Um foguete ideal chegaria ao destino com apenas a carga útil.

Exemplo

Empuxo e aceleração de um foguete

Um foguete cuja massa inicial M_i é 850 kg consome combustível a uma taxa R = 2,3 kg/s. A velocidade v_{rel} dos gases expelidos em relação ao motor do foguete é 2800 m/s.

(a) Qual é o empuxo do motor?

IDEIA-CHAVE

De acordo com a Eq. 9-87, o empuxo T é igual ao produto da taxa de consumo de combustível R pela velocidade relativa v_{rel} dos gases expelidos.

Cálculo Temos:

$$T = Rv_{\text{rel}} = (2{,}3 \text{ kg/s})(2800 \text{ m/s}) = 6440 \text{ N} \approx 6400 \text{ N}. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a aceleração inicial do foguete?

IDEIA-CHAVE

Podemos relacionar o empuxo T de um foguete ao módulo a da aceleração resultante através da equação $T = Ma$, onde M é a massa do foguete. À medida que o combustível é consumido, M diminui e a aumenta. Como estamos interessados no valor inicial de a, usamos o valor inicial da massa, M_i.

Cálculo Temos:

$$a = \frac{T}{M_i} = \frac{6440 \text{ N}}{850 \text{ kg}} = 7{,}6 \text{ m/s}^2. \quad \text{(Resposta)}$$

Para ser lançado da superfície da Terra, um foguete deve ter uma aceleração inicial maior que g = 9,8 m/s². Isso equivale a dizer que o empuxo T do motor do foguete deve ser maior que a força gravitacional a que o foguete está submetido no instante do lançamento, que neste caso é igual a $M_i g$ = (850 kg)(9,8 m/s²) = 8330 N. Como o empuxo do nosso foguete (6400 N) não é suficiente, ele não poderia ser lançado da superfície da Terra.

REVISÃO E RESUMO

Centro de Massa O **centro de massa** de um sistema de n partículas é definido como o ponto cujas coordenadas são dadas por

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad y_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \quad z_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i, \qquad (9\text{-}5)$$

ou

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i, \qquad (9\text{-}8)$$

onde M é a massa total do sistema.

Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas O movimento do centro de massa de qualquer sistema de partículas é governado pela **segunda lei de Newton para um sistema de partículas**, expressa pela equação

$$\vec{F}_{\text{res}} = M\vec{a}_{\text{CM}}. \qquad (9.14)$$

onde $\vec{F}_{res}$ é a resultante de todas as forças *externas* que agem sobre o sistema, M é a massa total do sistema e $\vec{a}_{CM}$ é a aceleração do centro de massa do sistema.

Momento Linear e a Segunda Lei de Newton No caso de uma partícula isolada, definimos $\vec{p}$, o **momento linear**, através da equação

$$\vec{p} = m\vec{v}, \qquad (9\text{-}22)$$

em função do qual podemos escrever a segunda lei de Newton na forma

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \qquad (9\text{-}23)$$

Para um sistema de partículas, essas relações se tornam

$$\vec{P} = M\vec{v}_{CM} \quad \text{e} \quad \vec{F}_{res} = \frac{d\vec{P}}{dt}. \qquad (9\text{-}25, 9\text{-}27)$$

Colisão e Impulso A aplicação da segunda lei de Newton a um corpo que se comporta como uma partícula envolvido em uma colisão leva ao **teorema do impulso e momento linear**:

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p} = \vec{J}, \qquad (9\text{-}31, 9\text{-}32)$$

onde $\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}$ é a variação do momento linear do corpo e $\vec{J}$ é o **impulso** produzido pela força $\vec{F}(t)$ exercida sobre o corpo pelo outro corpo envolvido na colisão:

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\, dt. \qquad (9\text{-}30)$$

Se $F_{méd}$ é o módulo médio de $\vec{F}(t)$ durante a colisão e Δt é a duração da colisão, para um movimento unidimensional, temos:

$$J = F_{méd}\Delta t. \qquad (9\text{-}35)$$

Quando uma série de projéteis de massa m e velocidade v colide com um corpo fixo, a força média que age sobre o corpo fixo é dada por

$$F_{méd} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = -\frac{n}{\Delta t} m\,\Delta v, \qquad (9\text{-}37)$$

onde $n/\Delta t$ é a taxa com a qual os corpos colidem com o corpo fixo e Δv é a variação da velocidade de cada corpo que colide. Esta força média também pode ser escrita na forma

$$F_{méd} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta v, \qquad (9\text{-}40)$$

onde $\Delta m/\Delta t$ é a taxa com a qual a massa colide com o corpo fixo. Nas Eqs. 9-37 e 9-40, $\Delta v = -v$ se os corpos param no momento do impacto e $\Delta v = -2v$ se ricocheteiam sem mudança da velocidade escalar.

Conservação do Momento Linear Se um sistema está isolado de tal forma que nenhuma força resultante *externa* atua sobre o sistema, o momento linear $\vec{P}$ do sistema permanece constante:

$$\vec{P} = \text{constante} \quad \text{(sistema fechado e isolado)}. \qquad (9\text{-}42)$$

Esta equação também pode ser escrita na forma

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \quad \text{(sistema fechado e isolado)}, \qquad (9\text{-}43)$$

onde os índices se referem aos valores de $\vec{P}$ em um instante inicial e em um instante posterior. As Eqs. 9-42 e 9-43 são expressões equivalentes da **lei de conservação do momento linear**.

Colisões Inelásticas em Uma Dimensão Em uma *colisão inelástica* de dois corpos, a energia cinética do sistema de dois corpos não é conservada. Se o sistema é fechado e isolado, o momento linear total do sistema é conservado, o que podemos expressar em forma vetorial como

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}, \qquad (9\text{-}50)$$

onde os índices i e f se referem a valores imediatamente antes e imediatamente depois da colisão, respectivamente.

Se o movimento dos corpos ocorre ao longo de um único eixo, a colisão é unidimensional e podemos escrever a Equação 9-50 em termos das componentes das velocidades em relação a esse eixo:

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}. \qquad (9\text{-}51)$$

Se os dois corpos se movem juntos após a colisão, a colisão é *perfeitamente inelástica* e os corpos têm a mesma velocidade final V (já que se movem juntos).

Movimento do Centro de Massa O centro de massa de um sistema fechado e isolado de dois corpos que colidem não é afetado pela colisão. Em particular, a velocidade $\vec{v}_{CM}$ do centro de massa é a mesma antes e depois da colisão.

Colisões Elásticas em Uma Dimensão Uma *colisão elástica* é um tipo especial de colisão em que a energia cinética de um sistema de corpos que colidem é conservada. Se o sistema é fechado e isolado, o momento linear também é conservado. Para uma colisão unidimensional na qual o corpo 2 é um alvo e o corpo 1 é um projétil, a conservação da energia cinética e a conservação do momento linear levam às seguintes expressões para as velocidades imediatamente após a colisão:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1i} \qquad (9\text{-}67)$$

e

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i}. \qquad (9\text{-}68)$$

Colisões em Duas Dimensões Se dois corpos colidem e não estão se movendo ao longo de um único eixo (a colisão não é frontal), a colisão é bidimensional. Se o sistema de dois corpos é fechado e isolado, a lei de conservação do momento se aplica à colisão e pode ser escrita como

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}. \qquad (9\text{-}77)$$

Na forma de componentes, a lei fornece duas equações que descrevem a colisão (uma equação para cada uma das duas dimensões). Se a colisão é elástica (um caso especial), a conservação da energia cinética na colisão fornece uma terceira equação:

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}. \qquad (9\text{-}78)$$

Sistemas de Massa Variável Na ausência de forças externas, a aceleração instantânea de foguete obedece à equação

$$Rv_{rel} = Ma \quad \text{(primeira equação do foguete)}. \qquad (9\text{-}87)$$

onde M é a massa instantânea do foguete (que inclui o combustível ainda não consumido), R é a taxa de consumo de combustível e v_{rel} é a velocidade dos produtos de exaustão em relação ao foguete. O termo Rv_{rel} é o **empuxo** do motor do foguete. Para um foguete com R e v_{rel} constantes, cuja velocidade varia de v_i para v_f quando a massa varia de M_i para M_f,

$$v_f - v_i = v_{rel} \ln \frac{M_i}{M_f} \quad \text{(segunda equação do foguete)}. \qquad (9\text{-}88)$$

PERGUNTAS

1 A Fig. 9-23 mostra uma vista superior de três partículas sobre as quais atuam forças externas. Os módulos e orientações das forças que agem sobre duas das partículas estão indicados. Quais são o módulo e a orientação da força que age sobre a terceira partícula se o centro de massa do sistema de três partículas está (a) em repouso, (b) se movendo com velocidade constante para a direita e (c) acelerando para a direita?

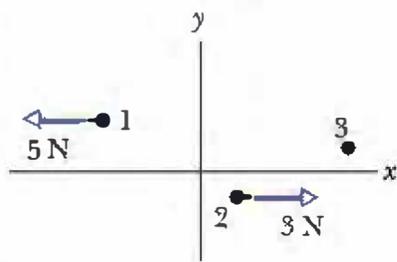



Figura 9-23 Pergunta 1.

2 A Fig. 9-24 mostra uma vista superior de quatro partículas de massas iguais que deslizam sobre uma superfície sem atrito com velocidade constante. As orientações das velocidades estão indicadas; os módulos são iguais. Considere pares dessas partículas. Que pares formam um sistema cujo centro de massa (a) está em repouso, (b) está em repouso na origem e (c) passa pela origem?

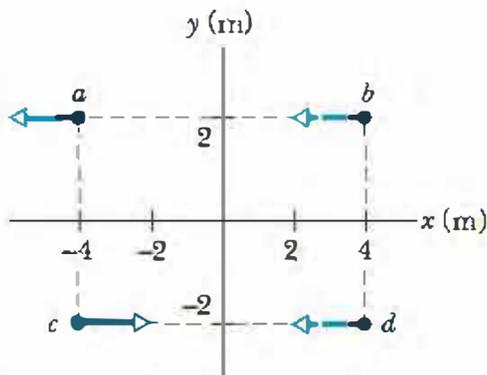



Figura 9-24 Pergunta 2.

3 Considere uma caixa que explode em dois pedaços enquanto se move com velocidade constante positiva ao longo de um eixo x. Se um dos pedaços, de massa m_1, possui uma velocidade positiva $\vec{v}_1$, o outro pedaço, de massa m_2, pode ter (a) uma velocidade positiva $\vec{v}_2$ (Fig. 9-25*a*), (b) uma velocidade negativa $\vec{v}_2$ (Fig. 9-25*b*) ou (c) velocidade zero (Fig. 9-25*c*). Ordene esses três resultados possíveis para o segundo pedaço de acordo com o módulo de $\vec{v}_1$ correspondente, começando pelo maior.

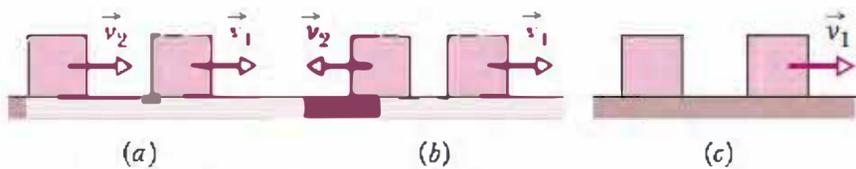



Figura 9-25 Pergunta 3.

4 A Fig. 9-26 mostra gráficos do módulo da força que age sobre um corpo envolvido em uma colisão em função do tempo. Ordene os gráficos de acordo com o módulo do impulso exercido sobre o corpo, começando pelo maior.

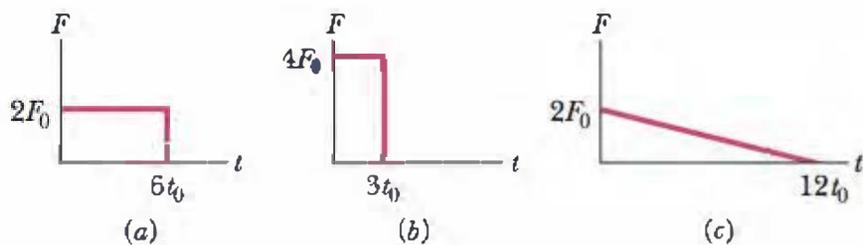



Figura 9-26 Pergunta 4.

5 Os diagramas de corpo livre na Fig. 9-27 são vistas superiores de forças horizontais agindo sobre três caixas de chocolate que se movem em um balcão sem atrito. Para cada caixa, determine se as componentes x e y do momento linear são conservadas.

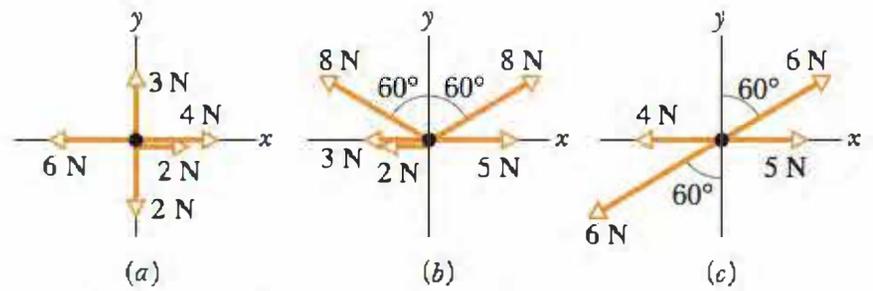



Figura 9-27 Pergunta 5.

6 A Fig. 9-28 mostra quatro grupos de três ou quatro partículas iguais que se movem paralelamente ou ao eixo x ou ao eixo y, com a mesma velocidade escalar. Ordene os grupos de acordo com a velocidade escalar do centro de massa, começando pela maior.

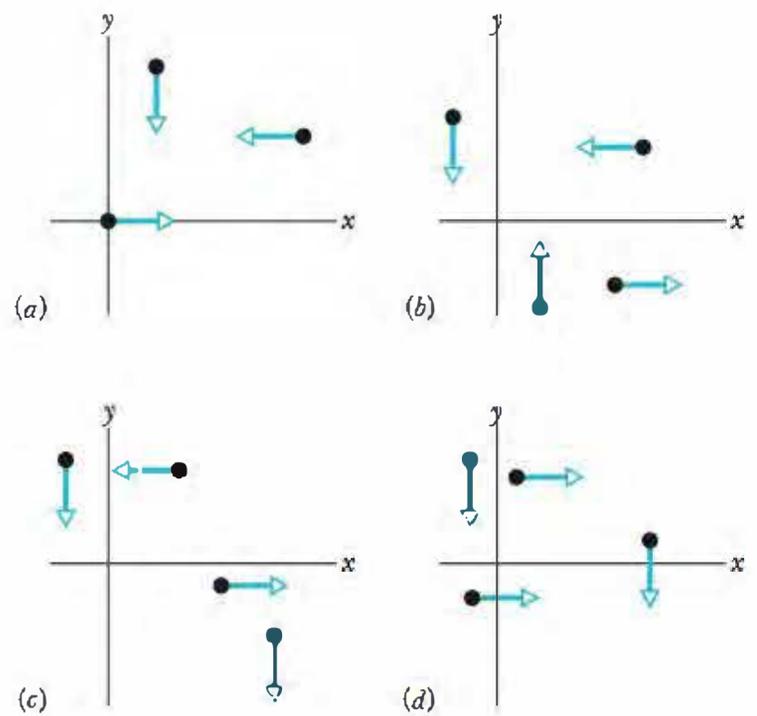



Figura 9-28 Pergunta 6.

7 Um bloco desliza ao longo de um piso sem atrito em direção a um segundo bloco que está inicialmente em repouso e tem a mesma massa. A Fig. 9-29 mostra quatro possibilidades para um gráfico das energias cinéticas K dos blocos antes e depois da colisão. (a) Indique quais são as possibilidades que representam situações fisicamente impossíveis. Das outras possibilidades, qual é a que representa (b) uma colisão elástica e (c) uma colisão inelástica?

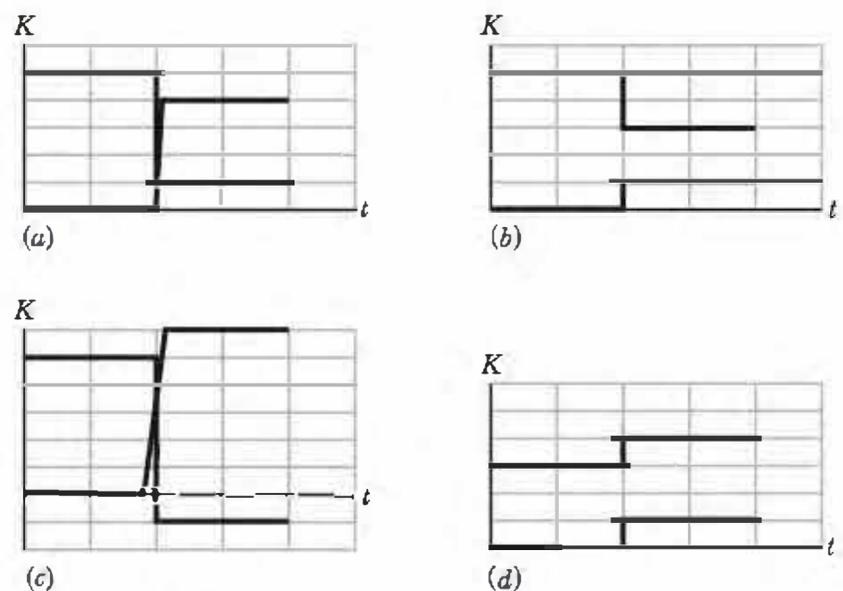



Figura 9-29 Pergunta 7.

8 A Fig. 9-30 mostra um instantâneo do bloco 1 enquanto desliza ao longo de um eixo x em um piso sem atrito, antes de sofrer uma colisão elástica com um bloco 2 inicialmente em repouso. A figura também mostra três posições possíveis para o centro de massa (CM) do sistema dos dois blocos no mesmo instante. (O ponto B está equidistante dos centros dos dois blocos.) Após a colisão, o bloco 1 permanece em repouso, continua a se mover no mesmo sentido ou passa a se mover no sentido oposto se o CM está (a) em A, (b) em B e (c) em C?

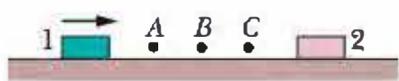



Figura 9-30 Pergunta 8.

9 Dois corpos sofrem uma colisão elástica unidimensional ao longo de um eixo x. A Fig. 9-31 mostra a posição dos corpos e do centro de massa em função do tempo. (a) Os dois corpos estavam se movendo antes da colisão ou um deles estava em repouso? Que reta corresponde ao movimento do centro de massa (b) antes da colisão e (c) depois da colisão? (d) A massa do corpo que estava se movendo mais depressa antes da colisão é maior, menor ou igual à do outro corpo?

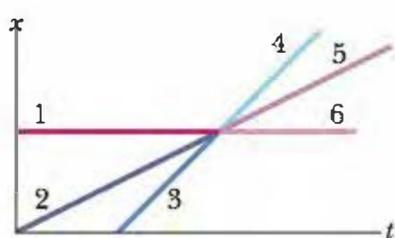



Figura 9-31 Pergunta 9.

10 Um bloco sobre um piso horizontal está inicialmente em repouso, em movimento no sentido positivo de um eixo x ou em movimento no sentido negativo do mesmo eixo. O bloco explode em dois pedaços que continuam a se mover ao longo do eixo x. Suponha que o bloco e os dois pedaços formem um sistema fechado e isolado. A Fig. 9-32 mostra seis possibilidades para o gráfico do momento do bloco e dos pedaços em função do tempo t. Indique as possibilidades que representam situações fisicamente impossíveis e justifique sua resposta.

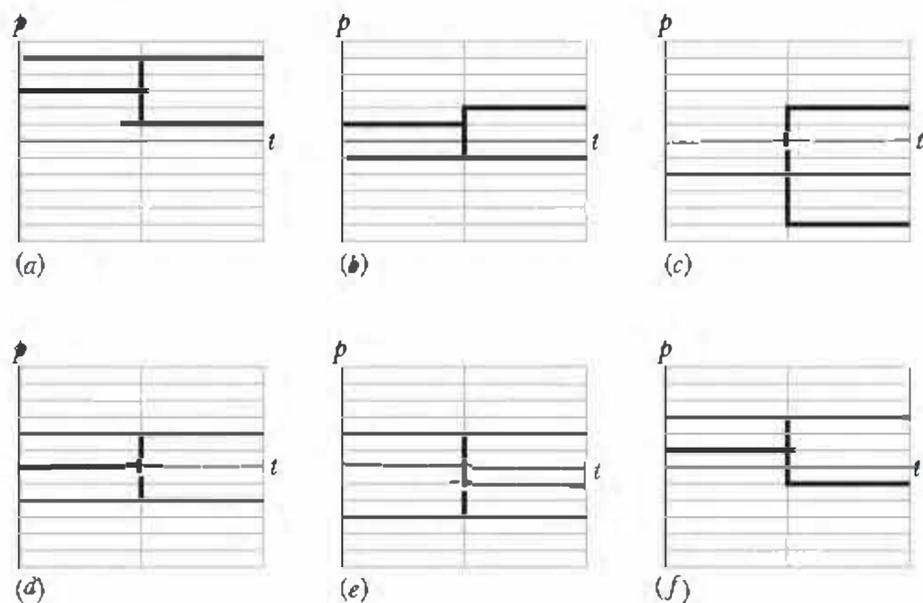



Figura 9-32 Pergunta 10.

11 O bloco 1, de massa m_1, desliza ao longo de um eixo x em um piso sem atrito e sofre uma colisão elástica com um bloco 2 de massa m_2 inicialmente em repouso. A Fig. 9-33 mostra um gráfico da posição x do bloco 1 em função do tempo t até a colisão ocorrer na posição x_c e no instante t_c. Em qual das regiões identificadas com letras continua o gráfico (após a colisão) se (a) $m_1 < m_2$, (b) $m_1 > m_2$? (c) Ao longo de qual das retas identificadas com números continua o gráfico se $m_1 = m_2$?

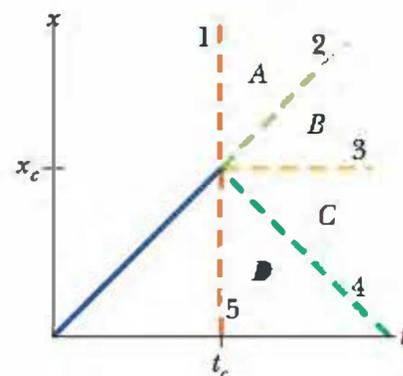



Figura 9-33 Pergunta 11.

12 A Fig. 9-34 mostra quatro gráficos da posição em função do tempo para dois corpos e seu centro de massa. Os dois corpos formam um sistema fechado e isolado e sofrem uma colisão unidimensional perfeitamente inelástica, ao longo de um eixo x. No gráfico 1, (a) os dois corpos estão se movendo no sentido positivo ou no sentido negativo do eixo x? (b) E o centro de massa? (c) Quais são os gráficos que correspondem a situações fisicamente impossíveis? Justifique sua resposta.

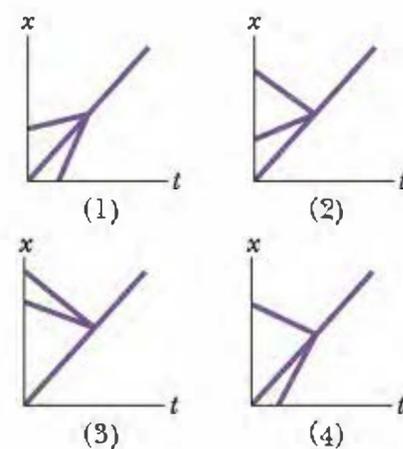



Figura 9-34 Pergunta 12.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física* de Jearl Walker, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

Seção 9-2 O Centro de Massa

•1 Uma partícula de 2,00 kg tem coordenadas xy ($-1{,}20$ m, 0,500 m) e uma partícula de 4,00 kg tem coordenadas xy (0,600 m, $-0{,}750$ m). Ambas estão em um plano horizontal. Em que coordenada (a) x e (b) y deve ser posicionada uma terceira partícula de 3,00 kg para que o centro de massa do sistema de três partículas tenha coordenadas ($-0{,}500$ m, $-0{,}700$ m)?

•2 A Fig. 9-35 mostra um sistema de três partículas de massas $m_1 = 3{,}0$ kg, $m_2 = 4{,}0$ kg e $m_3 = 8{,}0$ kg. As escalas do gráfico são definidas por $x_s = 2{,}0$ m e $y_s = 2{,}0$ m. Quais são (a) a coordenada

x e (b) a coordenada y do centro de massa do sistema? (c) Se m_3 aumenta gradualmente, o centro de massa do sistema se aproxima de m_3, se afasta de m_3 ou permanece onde está?

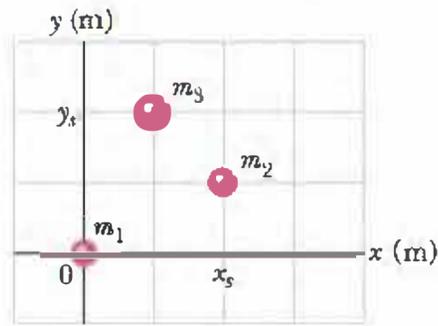



Figura 9-35 Problema 2.

••**3** A Fig. 9-36 mostra uma placa composta de dimensões $d_1 = 11{,}0$ cm, $d_2 = 2{,}80$ cm e $d_3 = 13{,}0$ cm. Metade da placa é feita de alumínio (massa específica = 2,70 g/cm³) e a outra metade de ferro (massa específica = 7,85 g/cm³). Determine (a) a coordenada x, (b) a coordenada y e (c) a coordenada z do centro de massa da placa.

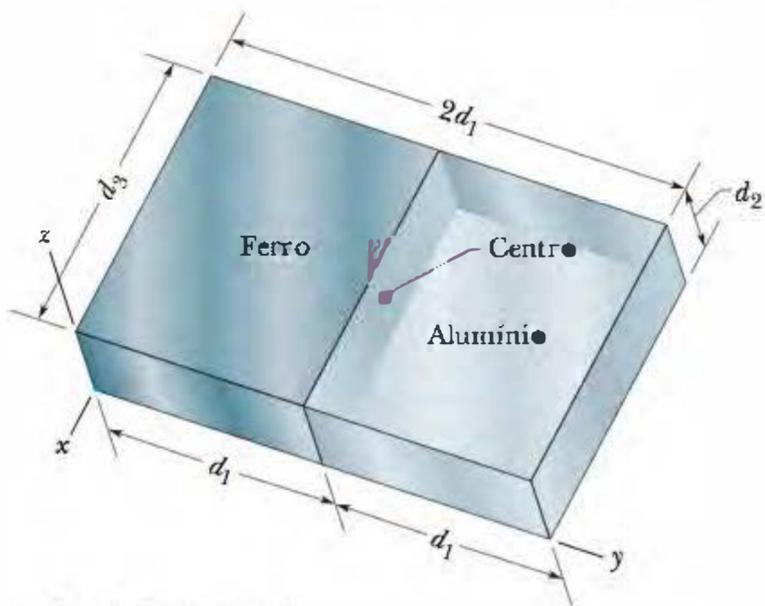



Figura 9-36 Problema 3.

••**4** Na Fig. 9-37, três barras finas e uniformes, de comprimento $L = 22$ cm, formam um U invertido. Cada barra vertical tem uma massa de 14 g; a barra horizontal tem massa de 42 g. Quais são (a) a coordenada x e (b) a coordenada y do centro de massa do sistema?

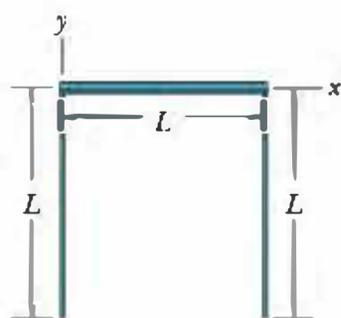



Figura 9-37 Problema 4.

••**5** Quais são (a) a coordenada x e (b) a coordenada y do centro de massa da placa homogênea da Fig. 9-38 se $L = 5{,}0$ cm?

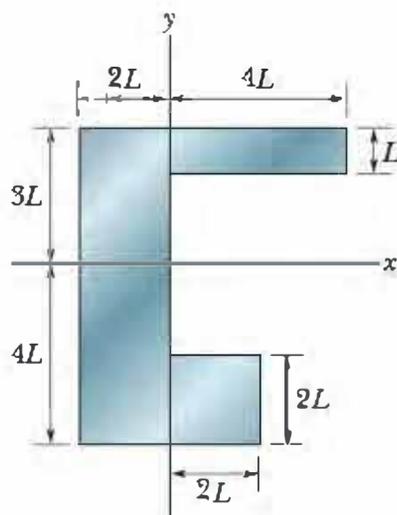



Figura 9-38 Problema 5.

••**6** A Fig. 9-39 mostra uma caixa cúbica que foi construída com placas metálicas uniformes de espessura desprezível. A caixa não tem tampa e tem uma aresta $L = 40$ cm. Determine (a) a coordenada x, (b) a coordenada y e (c) a coordenada z do centro de massa da caixa.

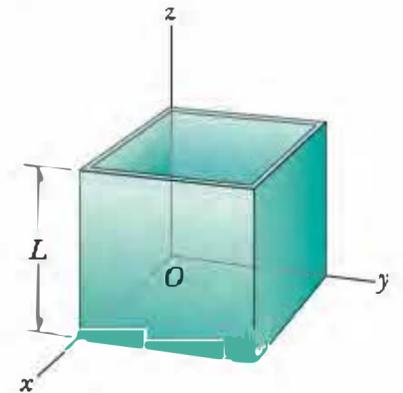



Figura 9-39 Problema 6.

••**7** Na molécula de amônia (NH_3) da Fig. 9-40, três átomos de hidrogênio (H) formam um triângulo equilátero, com o centro do triângulo a uma distância $d = 9{,}40 \times 10^{-11}$ m de cada átomo de hidrogênio. O átomo de nitrogênio (N) está no vértice superior de uma pirâmide, com os três átomos de hidrogênio formando a base. A razão entre as massas do nitrogênio e do hidrogênio é 13,9 e a distância nitrogênio-hidrogênio é $L = 10{,}14 \times 10^{-11}$ m. Quais são as coordenadas (a) x e (b) y do centro de massa da molécula?

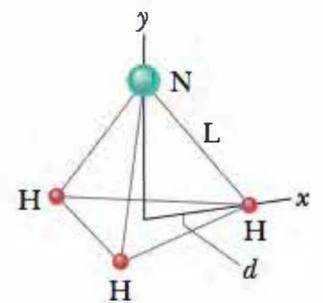



Figura 9-40 Problema 7.

•••**8** Uma lata homogênea tem uma massa de 0,140 kg, uma altura de 12,0 cm e contém 0,354 g de refrigerante (Fig. 9-41). Pequenos furos são feitos na base e na tampa (com perda de massa desprezível) para drenar o líquido. Qual é a altura h do centro de massa da lata e seu conteúdo (a) inicialmente e (b) após a lata perder todo o refrigerante? (c) O que acontece com h enquanto o refrigerante está sendo drenado? (d) Se x é a altura do refrigerante que ainda resta na lata em um dado instante, determine o valor de x no instante em que o centro de massa atinge o ponto mais baixo.

Figura 9-41 Problema 8.

Seção 9-3 A Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas

•**9** Uma pedra é deixada cair em $t = 0$. Uma segunda pedra, com uma massa duas vezes maior, é deixada cair do mesmo ponto em $t = 100$ ms. (a) A que distância do ponto inicial da queda está o centro de massa das duas pedras em $t = 300$ ms? (Suponha que as pedras

ainda não chegaram ao solo.) (b) Qual é a velocidade do centro de massa das duas pedras nesse instante?

•**10** Um automóvel de 1000 kg está parado em um sinal de trânsito. No instante em que o sinal abre, o automóvel começa a se mover com uma aceleração constante de 4,0 m/s². No mesmo instante, um caminhão de 2000 kg, movendo-se no mesmo sentido com velocidade constante de 8,0 m/s, ultrapassa o automóvel. (a) Qual é a distância entre o CM do sistema carro-caminhão e o sinal de trânsito em $t = 3,0$ s? (b) Qual é a velocidade do CM nesse instante?

•**11** Uma grande azeitona ($m = 0,50$ kg) está na origem de um sistema de coordenadas xy e uma grande castanha-do-pará ($M = 1,5$ kg) está no ponto (1,0, 2,0) m. Em $t = 0$, uma força $\vec{F}_a = (2,0\hat{i} + 3,0\hat{j})$ N começa a agir sobre a azeitona e uma força $\vec{F}_c = (-3,0\hat{i} + 2,0\hat{j})$ N começa a agir sobre a castanha. Em termos dos vetores unitários, qual é o deslocamento do centro de massa do sistema azeitona-castanha em $t = 4,0$ s em relação à sua posição em $t = 0$?

•**12** Dois patinadores, um de 65 kg e outro de 40 kg, estão em uma pista de gelo e seguram as extremidades de uma haste de 10 m de comprimento e massa desprezível. Os patinadores se puxam ao longo da haste até se encontrarem. Qual é a distância percorrida pelo patinador de 40 kg?

••**13** Um canhão dispara um projétil com uma velocidade inicial $v_0 = 20$ m/s e um ângulo $\theta_0 = 60°$ com a horizontal. No ponto mais alto da trajetória, o projétil explode em dois fragmentos de massas iguais (Fig. 9-42). Um fragmento, cuja velocidade imediatamente após a colisão é zero, cai verticalmente. A que distância do canhão cai o outro fragmento, supondo que o terreno é plano e que a resistência do ar pode ser desprezada?

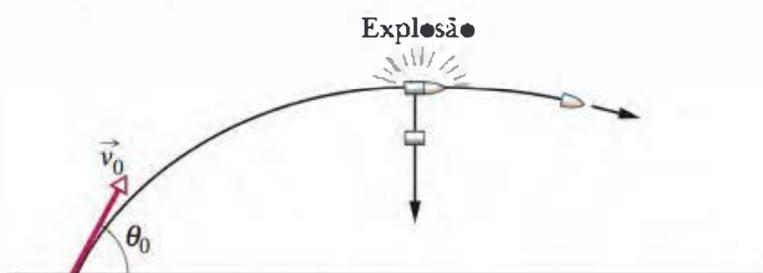



Figura 9-42 Problema 13.

••**14** Na Fig. 9-43, duas partículas são lançadas da origem do sistema de coordenadas no instante $t = 0$. A partícula 1, de massa $m_1 = 5,00$ g, é lançada horizontalmente para a direita, em um piso sem atrito, com uma velocidade escalar de 10,0 m/s. A partícula 2, de massa $m_2 = 3,00$ g, é lançada com uma velocidade escalar de 20,0 m/s e um ângulo tal que se mantém verticalmente acima da partícula 1. (a) Qual é a altura máxima $H_{máx}$ alcançada pelo CM do sistema de duas partículas? Em termos dos vetores unitários, quais são (b) a velocidade e (c) a aceleração do CM ao atingir a altura máxima $H_{máx}$?

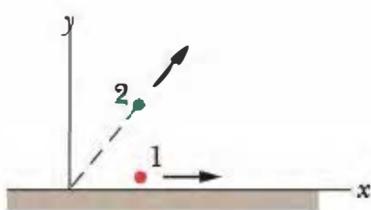



Figura 9-43 Problema 14.

••**15** A Fig. 9-44 mostra um arranjo com um trilho de ar no qual um carrinho está preso por uma corda a um bloco pendurado. O carrinho tem massa $m_1 = 0,600$ kg e o centro do carrinho está inicialmente nas coordenadas xy (−0,500 m, 0 m); o bloco tem massa $m_2 = 0,400$ kg e o centro do bloco está inicialmente nas coordenadas xy (0, −0,100 m). As massas da corda e da polia são desprezíveis. O carrinho é liberado a partir do repouso e o carrinho e o bloco se movem até que o carrinho atinja a polia. O atrito entre o carrinho e o trilho de ar e o atrito da polia são desprezíveis. (a) Qual é a aceleração do centro de massa do sistema carrinho–bloco em termos dos vetores unitários? (b) Qual é o vetor velocidade do CM em função do tempo t? (c) Plote a trajetória do CM. (d) Se a trajetória for curva, verifique se apresenta um desvio para cima e para a direita ou para baixo e para a esquerda em relação a uma linha reta; se for retilínea, calcule o ângulo da trajetória com o eixo x.

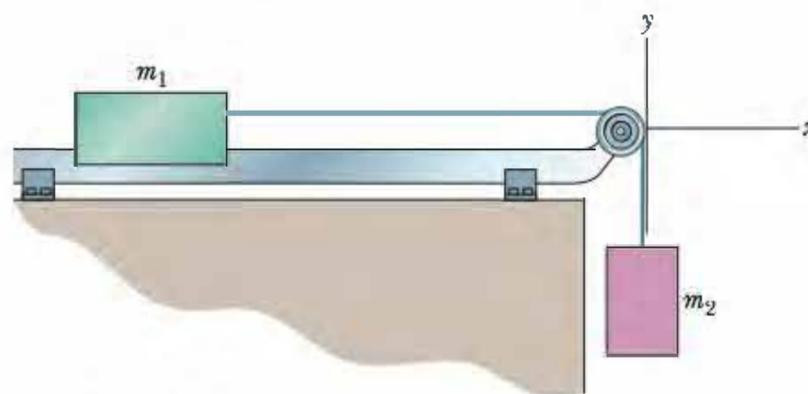



Figura 9-44 Problema 15.

•••**16** Ricardo, com 80 kg de massa, e Carmelita, que é mais leve, estão apreciando o pôr-do-sol no lago Mercedes em uma canoa de 30 kg. Com a canoa imóvel nas águas calmas do lago, o casal troca de lugar. Seus assentos estão separados por uma distância de 3,0 m e simetricamente dispostos em relação ao centro da embarcação. Se, com a troca, a canoa se desloca 40 cm em relação ao atracadouro, qual é a massa de Carmelita?

•••**17** Na Fig. 9-45a, um cachorro de 4,5 kg está em um barco de 18 kg a uma distância $D = 6,1$ m da margem. O animal caminha 2,4 m ao longo do barco, na direção da margem, e para. Supondo que não há atrito entre o barco e a água, determine a nova distância entre o cão e a margem. (*Sugestão:* veja a Fig. 9-45b.)

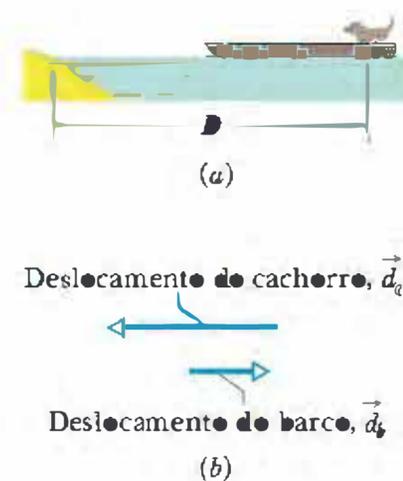



Figura 9-45 Problema 17.

Seção 9-5 O Momento Linear de um Sistema de Partículas

•**18** Uma bola de 0,70 kg está se movendo horizontalmente com uma velocidade de 5,0 m/s quando se choca com uma parede vertical e ricocheteia com uma velocidade de 2,0 m/s. Qual é o módulo da variação do momento linear da bola?

•**19** Um caminhão de 2100 kg viajando para o norte a 41 km/h vira para leste e acelera até 51 km/h. (a) Qual é a variação da energia cinética do caminhão? Quais são (b) o módulo e (c) o sentido da variação do momento?

••**20** No instante $t = 0$, uma bola é lançada para cima a partir do nível do solo, em terreno plano. A Fig. 9-46 mostra o módulo p do momento linear da bola em função do tempo t após o lançamento

($p_0 = 6{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$ e $p_1 = 4{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$). Determine o ângulo de lançamento. (*Sugestão:* procure uma solução que não envolva a leitura no gráfico do instante em que passa pelo valor mínimo.)

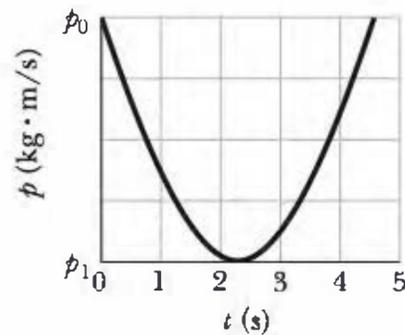
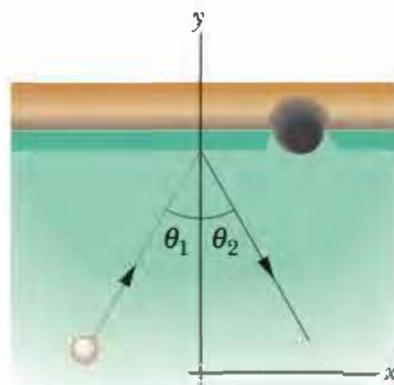



Figura 9-46 Problema 20.

••21 Uma bola de *softball* de 0,30 kg tem uma velocidade escalar de 15 m/s e um ângulo de 35° abaixo da horizontal imediatamente antes de ser golpeada por um taco. Qual é o módulo da variação do momento linear da bola na colisão com o taco se a bola adquire uma velocidade escalar (a) de 20 m/s, verticalmente para baixo; (b) de 20 m/s, horizontalmente na direção do lançador?

••22 A Fig. 9-47 mostra uma vista superior da trajetória de uma bola de sinuca de 0,165 kg que se choca com uma das tabelas. A velocidade escalar da bola antes do choque é 2,00 m/s e o ângulo θ_1 é 30,0°. O choque inverte a componente y da velocidade da bola, mas não altera a componente x. Determine (a) o ângulo θ_2 e (b) a variação do momento linear da bola em termos dos vetores unitários. (O fato de que a bola está rolando é irrelevante para a solução do problema.)

Figura 9-47 Problema 22.

Figura 9-48 Problema 23. Mergulho de barriga em um tanque com 30 cm de água. *(George Long/Sports Illustrated/©Time, Inc.)*

Seção 9-6 Colisão e Impulso

•23 Com mais de 70 anos de idade, Henri LaMothe (Fig. 9-48) assombrava os espectadores mergulhando de barriga de uma altura de 12 m em um tanque de água com 30 cm de profundidade. Supondo que o corpo do mergulhador parava de descer quando estava prestes a chegar ao fundo do tanque e estimando sua massa, calcule o módulo do impulso que a água exercia sobre Henri em um desses mergulhos.

•24 Em fevereiro de 1955, um paraquedista saltou de um avião, caiu 370 m sem conseguir abrir o paraquedas e aterrissou em um campo de neve, sofrendo apenas pequenas escoriações. Suponha que a velocidade do paraquedista imediatamente antes do impacto era 56 m/s (velocidade terminal), a massa (incluindo os equipamentos) era 85 kg e a força da neve sobre o seu corpo tenha atingido o valor (relativamente seguro) de $1{,}2 \times 10^5$ N. Determine (a) a profundidade da neve mínima para que o paraquedista aterrissasse sem ferimentos graves e (b) o módulo do impulso da neve sobre o paraquedista.

•25 Uma bola de 1,2 kg cai verticalmente em um piso com uma velocidade de 25 m/s e ricocheteia com uma velocidade inicial de 10 m/s. (a) Qual é o impulso recebido pela bola durante o contato com o piso? (b) Se a bola fica em contato com o piso por 0,020 s, qual é a força média exercida pela bola sobre o piso?

•26 Em uma brincadeira comum, mas muito perigosa, alguém puxa uma cadeira quando uma pessoa está prestes a se sentar, fazendo com que a vítima se estatele no chão. Suponha que a vítima tem 70 kg, cai de uma altura de 0,50 m e a colisão com o piso dura 0,082 s. Qual é o módulo (a) do impulso e (b) da força média aplicada pelo piso sobre a pessoa durante a colisão?

•27 Uma força no sentido negativo de um eixo x é aplicada por 27 ms a uma bola de 0,40 kg que estava se movendo a 14 m/s no sentido positivo do eixo. O módulo da força é variável e o impulso tem um módulo de 32,4 N · s. Quais são (a) o módulo e (b) o sentido da velocidade da bola imediatamente após a aplicação da força? Quais são (c) a intensidade média da força e (d) a orientação do impulso aplicado à bola?

•28 No tae-kwon-do, a mão de um atleta atinge o alvo com uma velocidade de 13 m/s e para após 5,0 ms. Suponha que, durante o choque, a mão é independente do braço e tem uma massa de 0,70 kg. Determine o módulo (a) do impulso e (b) da força média que a mão exerce sobre o alvo.

•29 Um bandido aponta uma metralhadora para o peito do Super-Homem e dispara 100 balas/min. Suponha que a massa de cada bala é 3 g, a velocidade das balas é 500 m/s e as balas ricocheteiam no peito do super-herói sem perder velocidade. Qual é o módulo da força média que as balas exercem sobre o peito do Super-Homem?

••30 *Duas forças médias.* Uma série de bolas de neve de 0,250 kg é disparada perpendicularmente contra uma parede com uma velo-

cidade de 4,00 m/s. As bolas ficam grudadas na parede. A Fig. 9-49 mostra o módulo F da força sobre a parede em função do tempo t para dois choques consecutivos. Os choques ocorrem a intervalos $\Delta t_r = 50{,}0$ ms, duram um intervalo de tempo $\Delta t_d = 10$ ms e produzem triângulos isósceles no gráfico, com cada choque resultando em uma força máxima $F_{máx} = 200$ N. Para cada choque, qual é o módulo (a) do impulso e (b) da força média aplicada à parede? (c) Em um intervalo de tempo correspondente a muitos choques, qual é o módulo da força média exercida sobre a parede?

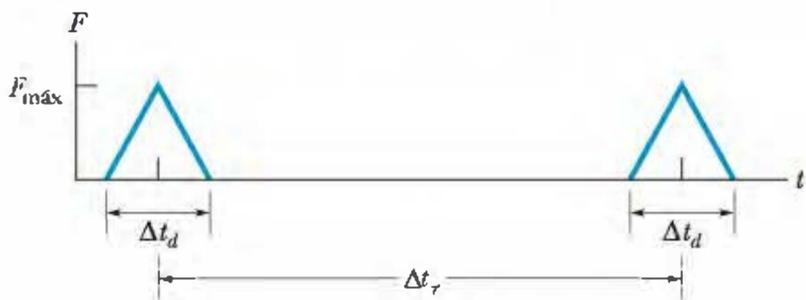



Figura 9-49 Problema 30.

••31 *Pulando antes do choque*. Quando o cabo de sustentação arrebenta e o sistema de segurança falha, um elevador cai em queda livre de uma altura de 36 m. Durante a colisão no fundo do poço do elevador, a velocidade de um passageiro de 90 kg se anula em 5,0 ms. (Suponha que não há ricochete nem do passageiro nem do elevador.) Qual é o módulo (a) do impulso e (b) da força média experimentada pelo passageiro durante a colisão? Se o passageiro pula verticalmente para cima com uma velocidade de 7,0 m/s em relação ao piso do elevador quando o elevador está prestes a se chocar com o fundo do poço, qual é o módulo (c) do impulso e (d) da força média (supondo que o tempo que o passageiro leva para parar permanece o mesmo)?

••32 Um carro de brinquedo de 5,0 kg pode se mover ao longo de um eixo x; a Fig. 9-50 mostra a componente F_x da força que age sobre o carro, que parte do repouso no instante $t = 0$. A escala do eixo x é definida por $F_s = 5{,}0$ N. Em termos dos vetores unitários, determine (a) $\vec{p}$ em $t = 4{,}0$ s; (b) $\vec{p}$ em $t = 7{,}0$ s; (c) $\vec{v}$ em $t = 9{,}0$ s.

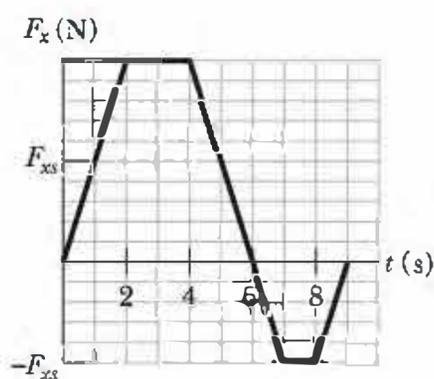



Figura 9-50 Problema 32.

••33 A Fig. 9-51 mostra uma bola de beisebol de 0,300 kg imediatamente antes e imediatamente depois de colidir com um taco. Imediatamente antes, a bola tem uma velocidade $\vec{v}_1$ de módulo 12,0 m/s e ângulo $\theta_1 = 35°$. Imediatamente depois, a bola se move para cima na vertical com uma velocidade $\vec{v}_2$ de módulo 10,0 m/s. A duração da colisão é 2,00 ms. Quais são (a) o módulo e (b) a orientação (em relação ao semieixo x positivo) do impulso do taco sobre a bola? Quais são (c) o módulo e (d) o sentido da força média que o taco exerce sobre a bola?

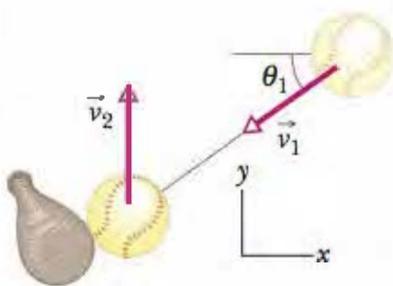



Figura 9-51 Problema 33.

••34 O lagarto basilisco é capaz de correr na superfície da água (Fig. 9-52). Em cada passo, o lagarto bate na água com a pata e a mergulha tão depressa que uma cavidade de ar se forma acima da pata. Para não ter que puxá-la de volta sob a ação da força de arrasto da água, o lagarto levanta a pata antes que a água penetre na cavidade de ar. Para que o lagarto não afunde, o impulso médio para cima exercido durante esta manobra de bater na água com a pata, afundá-la e recolhê-la deve ser igual ao impulso para baixo exercido pela força gravitacional. Suponha que a massa de um lagarto basilisco é 90,0 g, a massa de cada pata é 3,00 g, a velocidade de uma pata ao bater na água é 1,50 m/s e a duração de um passo é 0,600 s. (a) Qual é o módulo do impulso que a água exerce sobre o lagarto quando o animal bate com a pata na água? (Suponha que este impulso está orientado verticalmente para cima.) (b) Durante os 0,600 s de um passo, qual é o impulso para baixo sobre o lagarto devido à força gravitacional? (c) O principal movimento responsável pela sustentação do lagarto é o de bater a pata na água, o de afundar a pata na água ou ambos contribuem igualmente?

Figura 9-52 Problema 34. Um lagarto correndo na água. *(Stephen Dalton/Photo Researchers)*

••35 A Fig. 9-53 mostra um gráfico aproximado do módulo da força F em função do tempo t para uma colisão de uma Superbola de 58 g com uma parede. A velocidade inicial da bola é 34 m/s, perpendicular à parede; ela ricocheteia praticamente com a mesma velocidade escalar, também perpendicular à parede. Quanto vale $F_{máx}$, o módulo máximo da força exercida pela parede sobre a bola durante a colisão?

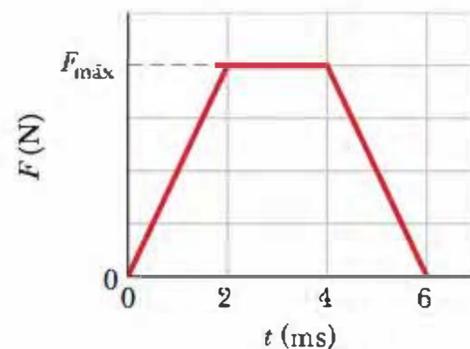



Figura 9-53 Problema 35.

••36 Um disco de metal de 0,25 kg está inicialmente em repouso em uma superfície de gelo de atrito desprezível. No instante $t = 0$, uma força horizontal começa a agir sobre o disco. A força é dada por $\vec{F} = (12{,}0 - 3{,}00t^2)\hat{i}$, com $\vec{F}$ em newtons e t em segundos, e age até que o módulo se anule. (a) Qual é o módulo do impulso da força sobre o disco entre $t = 0{,}500$ s e $t = 1{,}25$ s? (b) Qual é a variação do momento do disco entre $t = 0$ e o instante em que $F = 0$?

••37 Um jogador de futebol chuta uma bola de massa 0,45 kg que se encontra inicialmente em repouso. O pé do jogador fica em contato com a bola por $3,0 \times 10^{-3}$ s e a força do chute é dada por

$$F(t) = [(6,0 \times 10^6)t - (2,0 \times 10^9)t^2]\ \text{N}$$

para $0 \le t \le 3,0 \times 10^{-3}$ s, onde t está em segundos. Determine o módulo (a) do impulso sobre a bola devido ao chute, (b) da força média exercida pelo pé do jogador sobre a bola durante o contato, (c) da força máxima exercida pelo pé do jogador sobre a bola durante o contato e (d) da velocidade da bola imediatamente após perder o contato com o pé do jogador.

••38 Na vista superior da Fig. 9-54, uma bola de 300 g com uma velocidade escalar v de 6,0 m/s se choca com uma parede com um ângulo θ de 30° e ricocheteia com a mesma velocidade escalar e o mesmo ângulo. A bola permanece em contato com a parede por 10 ms. Em termos dos vetores unitários, qual é (a) o impulso da parede sobre a bola e (b) a força média da bola sobre a parede?

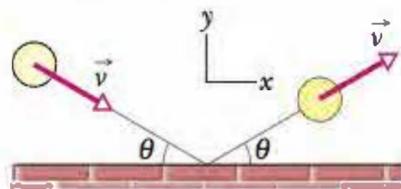



Figura 9-54 Problema 38.

Seção 9-7 Conservação do Momento Linear

•39 Um homem de 91 kg em repouso em uma superfície horizontal de atrito desprezível arremessa uma pedra de 68 g com uma velocidade horizontal de 4,0 m/s. Qual é a velocidade do homem após o arremesso?

•40 Uma nave espacial está se movendo a 4300 km/h em relação à Terra quando, após ter queimado todo o combustível, o motor do foguete (de massa $4m$) é desacoplado e ejetado para trás com uma velocidade de 82 km/h em relação ao módulo de comando (de massa m). Qual é a velocidade do módulo de comando em relação à Terra imediatamente após a separação?

••41 A Fig. 9-55 mostra um "foguete" de duas pontas que está inicialmente em repouso em uma superfície sem atrito, com o centro na origem de um eixo x. O foguete é formado por um bloco central C (de massa $M = 6,00$ kg) e dois blocos E e D (de massa $m = 2,00$ kg cada um) dos lados esquerdo e direito. Pequenas explosões podem arremessar esses blocos para longe do bloco C, ao longo do eixo x. Considere a seguinte sequência: (1) No instante $t = 0$, o bloco E é arremessado para a esquerda com uma velocidade de 3,00 m/s *em relação* à velocidade que a explosão imprime ao resto do foguete. (2) No instante $t = 0,80$ s, o bloco D é arremessado para a direita com uma velocidade de 3,00 m/s *em relação* à velocidade do bloco C nesse momento. No instante $t = 2,80$ s, quais são (a) a velocidade do bloco C e (b) a posição do centro do bloco C?

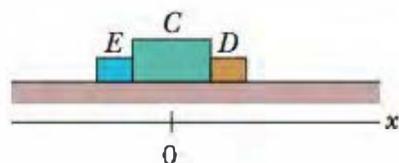



Figura 9-55 Problema 41.

••42 Um objeto de massa m e velocidade v em relação a um observador explode em dois pedaços, um com massa três vezes maior que o outro; a explosão ocorre no espaço sideral. O pedaço de menor massa fica em repouso em relação ao observador. Qual é o aumento da energia cinética do sistema causado pela explosão, no referencial do observador?

••43 Na Olimpíada de 708 a.C., alguns atletas disputaram a prova de salto em distância segurando pesos chamados de *halteres* para melhorar o desempenho (Fig. 9-56). Os pesos eram colocados à frente do corpo antes de iniciar o salto e arremessados para trás durante o salto. Suponha que um atleta moderno de 78 kg use dois halteres de 5,50 kg, arremessando-os horizontalmente para trás ao atingir a altura máxima, de tal forma que a velocidade horizontal dos pesos em relação ao chão seja zero. Suponha que a velocidade inicial do atleta seja $\vec{v} = (9,5\hat{i} + 4,0\hat{j})$ m/s com ou sem os halteres e que o terreno seja plano. Qual é a diferença entre as distâncias que o atleta consegue saltar com e sem os halteres?

Figura 9-56 Problema 43. *(Réunion des Musées Nationaux/ Art Resource)*

••44 Na Fig. 9-57, um bloco inicialmente em repouso explode em dois pedaços, E e D, que deslizam sobre um piso em um trecho sem atrito e depois entram em regiões com atrito, onde acabam parando. O pedaço E, com uma massa de 2,0 kg, encontra um coeficiente de atrito cinético $\mu_E = 0,40$ e chega ao repouso em uma distância $d_E = 0,15$ m. O pedaço D encontra um coeficiente de atrito cinético $\mu_D = 0,50$ e desliza até o repouso em uma distância $d_D = 0,25$ m. Qual era a massa do bloco?

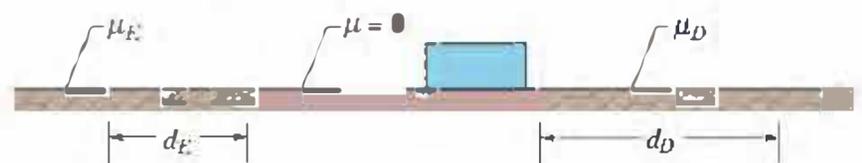



Figura 9-57 Problema 44.

••45 Um corpo de 20,0 kg está se movendo no sentido positivo de um eixo x com uma velocidade de 200 m/s quando, devido a uma explosão interna, se quebra em três pedaços. Um dos pedaços, com uma massa de 10,0 kg, se afasta do ponto da explosão com uma velocidade de 100 m/s no sentido positivo do eixo y. Um segundo pedaço, com uma massa de 4,00 kg, se move no sentido negativo do eixo x com uma velocidade de 500 m/s. (a) Em termos dos vetores unitários, qual é a velocidade da terceira parte? (b) Qual é a energia liberada na explosão? Ignore os efeitos da força gravitacional.

••46 Um balde de 4 kg que está deslizando em uma superfície sem atrito explode em dois fragmentos de 2,0 kg, um que se move para o norte a 3,0 m/s e outro que se move em uma direção 30° ao norte do leste a 5,0 m/s. Qual era a velocidade escalar do balde antes da explosão?

••47 Uma taça em repouso na origem de um sistema de coordenadas xy explode em três pedaços. Logo depois da explosão, um dos pedaços, de massa m, está se movendo com velocidade $(-30\ \text{m/s})\hat{i}$ e um segundo pedaço, também de massa m, está se movendo com velocidade $(-30\ \text{m/s})\hat{j}$. O terceiro pedaço tem massa $3m$. Determine (a) o módulo e (b) a orientação da velocidade do terceiro pedaço logo após a explosão.

•••**48** Uma partícula A e uma partícula B são empurradas uma contra a outra, comprimindo uma mola colocada entre as duas. Quando as partículas são liberadas, a mola as arremessa em sentidos opostos. A massa de A é 2,00 vezes a massa de B e a energia armazenada na mola era 60 J. Suponha que a mola tem massa desprezível e que toda a energia armazenada é transferida para as partículas. Depois de terminada a transferência, qual é a energia cinética (a) da partícula A e (b) da partícula B?

Seção 9-9 Colisões Inelásticas em Uma Dimensão

•**49** Uma bala com 10 g de massa se choca com um pêndulo balístico com 2,00 kg de massa. O centro de massa do pêndulo sobe uma distância vertical de 12 cm. Supondo que a bala fica alojada no pêndulo, calcule a velocidade inicial da bala.

•**50** Uma bala de 5,20 g que se move a 672 m/s atinge um bloco de madeira de 700 g inicialmente em repouso sobre uma superfície sem atrito. A bala atravessa o bloco e sai do outro lado com a velocidade reduzida para 428 m/s. (a) Qual é a velocidade final do bloco? (b) Qual é a velocidade do centro de massa do sistema bala-bloco?

••**51** Na Fig. 9-58*a*, uma bala de 3,50 g é disparada horizontalmente contra dois blocos inicialmente em repouso sobre uma mesa sem atrito. A bala atravessa o bloco 1 (com 1,20 kg de massa) e fica alojada no bloco 2 (com 1,80 kg de massa). Os blocos terminam com velocidades $v_1 = 0{,}630$ m/s e $v_2 = 1{,}40$ m/s (Fig. 9-58*b*). Desprezando o material removido do bloco 1 pela bala, encontre a velocidade da bala (a) ao sair do bloco 1 e (b) ao entrar no bloco 1.

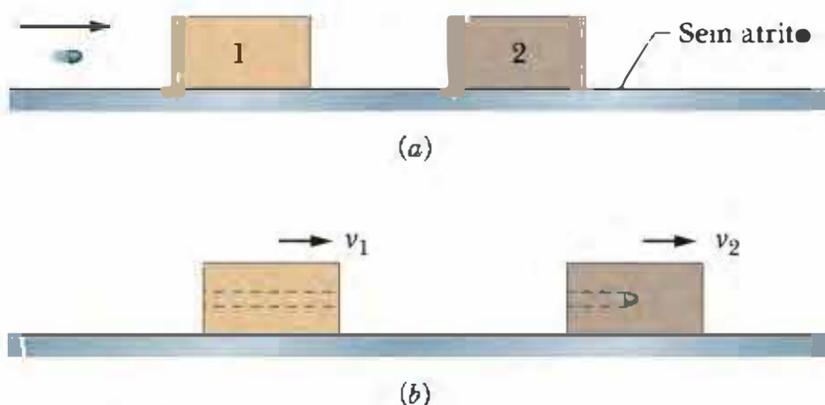



Figura 9-58 Problema 51.

••**52** Na Fig. 9-59, uma bala de 10 g que se move verticalmente para cima a 1000 m/s se choca com um bloco de 5,0 kg inicialmente em repouso, passa pelo centro de massa do bloco e sai do outro lado com uma velocidade de 400 m/s. Qual é a altura máxima atingida pelo bloco em relação à posição inicial?

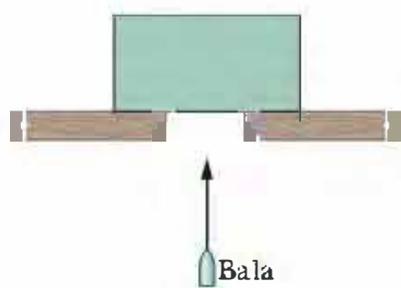



Figura 9-59 Problema 52.

••**53** Em Anchorage, as colisões de um veículo com um alce são tão comuns que receberam o apelido de CVA. Suponha que um carro de 1000 kg derrapa até atropelar um alce estacionário de 500 kg em uma estrada muito escorregadia, com o alce atravessando o para-brisa (o que acontece muitas vezes nesse tipo de atropelamento). (a) Que porcentagem da energia cinética do carro é transformada pela colisão em outras formas de energia? Acidentes semelhantes acontecem na Arábia Saudita, nas chamadas CVC (colisões entre um veículo e um camelo). (b) Que porcentagem da energia cinética do carro é perdida se a massa do camelo é 300 kg? (c) No caso geral, a perda percentual aumenta ou diminui quando a massa do animal diminui?

••**54** Uma colisão frontal perfeitamente inelástica ocorre entre duas bolas de massa de modelar que se movem ao longo de um eixo vertical. Imediatamente antes da colisão, uma das bolas, de massa 3,00 kg, está se movendo para cima a 20 m/s e a outra bola, de massa 2,0 kg, está se movendo para baixo a 12 m/s. Qual é a altura máxima atingida pelas duas bolas unidas acima do ponto de colisão? (Despreze a resistência do ar.)

••**55** Um bloco de 5,0 kg com uma velocidade escalar de 3,0 m/s colide com um bloco de 10 kg com uma velocidade escalar de 2,00 m/s que se move na mesma direção e sentido. Após a colisão, o bloco de 10 kg passa a se mover no mesmo sentido com uma velocidade de 2,5 m/s. (a) Qual é a velocidade do bloco de 5,0 kg imediatamente após a colisão? (b) De quanto varia a energia cinética total do sistema dos dois blocos por causa da colisão? (c) Suponha que a velocidade do bloco de 10 kg após o choque é 4,0 m/s. Qual é, nesse caso, a variação da energia cinética total? (d) Explique o resultado do item (c).

••**56** Na situação "antes" da Fig. 9-60, o carro A (com uma massa de 1100 kg) está parado em um sinal de trânsito quando é atingido na traseira pelo carro B (com uma massa de 1400 kg). Os dois carros derrapam com as rodas bloqueadas até que a força de atrito com o asfalto molhado (com um coeficiente de atrito μ_k de 0,13) os leva ao repouso depois de percorrerem distâncias $d_A = 8{,}2$ m e $d_B = 6{,}1$ m. Qual é a velocidade escalar (a) do carro A e (b) do carro B no início da derrapagem, logo após a colisão? (c) Supondo que o momento linear é conservado na colisão, determine a velocidade escalar do carro B pouco antes da colisão. (d) Explique por que esta suposição pode não ser realista.

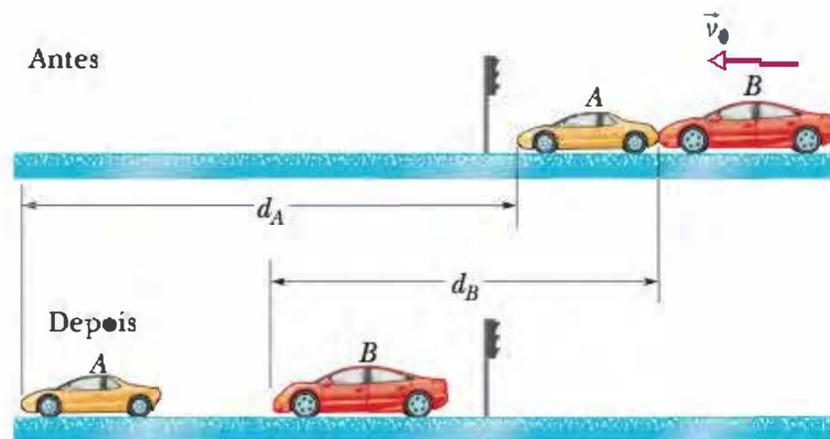



Figura 9-60 Problema 56.

••**57** Na Fig. 9-61, uma bola de massa $m = 60$ g é disparada com velocidade $v_i = 22$ m/s para dentro do cano de um canhão de mola de massa $M = 240$ g inicialmente em repouso sobre uma superfície sem atrito. A bola fica presa no cano do canhão no ponto de máxima compressão da mola. Suponha que o aumento da energia térmica devido ao atrito da bola com o cano é desprezível. (a) Qual é a velocidade escalar do canhão depois que a bola para dentro do cano? (b) Que fração da energia cinética inicial da bola fica armazenada na mola?

Figura 9-61 Problema 57.

•••58 Na Fig. 9-62, o bloco 2 (com uma massa de 1,0 kg) está em repouso sobre uma superfície sem atrito e em contato com uma das extremidades de uma mola relaxada de constante elástica 200 N/m. A outra extremidade da mola está presa em uma parede. O bloco 1 (com uma massa de 2,0 kg), que se move com uma velocidade v_1 = 4,0 m/s, colide com o bloco 2 e os dois blocos permanecem juntos. No instante em que os blocos param momentaneamente, qual é a compressão da mola?

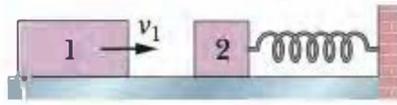



Figura 9-62 Problema 58.

•••59 Na Fig. 9-63, o bloco 1 (com uma massa de 2,0 kg) está se movendo para a direita com uma velocidade escalar de 10 m/s e o bloco 2 (com uma massa de 5,0 kg) está se movendo para a direita com uma velocidade escalar de 3,0 m/s. A superfície não tem atrito e uma mola com uma constante elástica de 1120 N/m está presa no bloco 2. Quando os blocos colidem, a compressão da mola é máxima no instante em que os blocos têm a mesma velocidade. Determine a máxima compressão da mola.

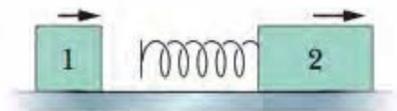



Figura 9-63 Problema 59.

Seção 9-10 Colisões Elásticas em Uma Dimensão

•60 Na Fig. 9-64, o bloco *A* (com uma massa de 1,6 kg) desliza em direção ao bloco *B* (com uma massa de 2,4 kg) ao longo de uma superfície sem atrito. Os sentidos de três velocidades antes (*i*) e depois (*f*) da colisão estão indicados; as velocidades escalares correspondentes são v_{Ai} = 5,5 m/s, v_{Bi} = 2,5 m/s e v_{Bf} = 4,9 m/s. Determine (a) o módulo e (b) o sentido (para a esquerda ou para a direita) da velocidade $\vec{v}_{Af}$. (c) A colisão é elástica?

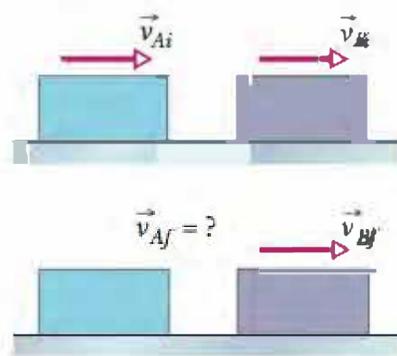



Figura 9-64 Problema 60.

•61 Um carrinho de massa com 340 g de massa, que se move em uma pista de ar sem atrito com uma velocidade inicial de 1,2 m/s, sofre uma colisão elástica com um carrinho inicialmente em repouso de massa desconhecida. Após a colisão, o primeiro carrinho continua a se mover na mesma direção e sentido com uma velocidade escalar de 0,66 m/s. (a) Qual é a massa do segundo carrinho? (b) Qual é a velocidade do segundo carrinho após a colisão? (c) Qual é a velocidade do centro de massa do sistema dos dois carrinhos?

•62 Duas esferas de titânio se aproximam com a mesma velocidade escalar e sofrem uma colisão elástica frontal. Após a colisão, uma das esferas, cuja massa é 300 g, permanece em repouso. (a) Qual é a massa da outra esfera? (b) Qual é a velocidade do centro de massa das duas esferas se a velocidade escalar inicial de cada esfera é de 2,00 m/s?

••63 O bloco 1 de massa m_1 desliza em um piso sem atrito e sofre uma colisão elástica unidimensional com o bloco 2 de massa $m_2 = 3m_1$. Antes da colisão, o centro de massa do sistema de dois blocos tinha uma velocidade de 3,00 m/s. Qual é a velocidade (a) do centro de massa e (b) do bloco 2 após a colisão?

••64 Uma bola de aço de massa 0,500 kg está presa em uma extremidade de uma corda de 70,0 cm de comprimento. A outra extremidade está fixa. A bola é liberada quando a corda está na horizontal (Fig. 9-65). Na parte mais baixa da trajetória, a bola se choca com um bloco de metal de 2,50 kg inicialmente em repouso sobre uma superfície sem atrito. A colisão é elástica. Determine (a) a velocidade escalar da bola e (b) a velocidade escalar do bloco, ambas imediatamente após a colisão.

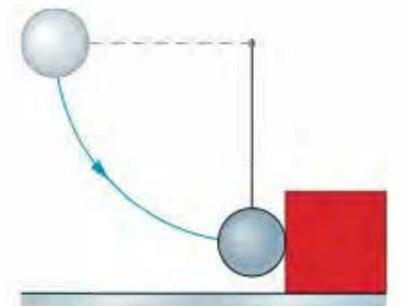



Figura 9-65 Problema 64.

••65 Um corpo com 2,0 kg de massa sofre uma colisão elástica com um corpo em repouso e continua a se mover na mesma direção e sentido, mas com um quarto da velocidade inicial. (a) Qual é a massa do outro corpo? (b) Qual é a velocidade do centro de massa dos dois corpos se a velocidade inicial do corpo de 2,0 kg era 4,0 m/s?

••66 O bloco 1, de massa m_1 e velocidade 4,0 m/s, que desliza ao longo de um eixo *x* em um piso sem atrito, sofre uma colisão elástica com o bloco 2 de massa $m_2 = 0{,}40m_1$, inicialmente em repouso. Os dois blocos deslizam para uma região em que o coeficiente de atrito cinético é 0,50, onde acabam parando. Que distância dentro dessa região é percorrida (a) pelo bloco 1 e (b) pelo bloco 2?

••67 Na Fig. 9-66, a partícula 1, de massa m_1 = 0,30 kg, desliza para a direita ao longo de um eixo *x* em um piso sem atrito com uma velocidade escalar de 2,0 m/s. Quando chega ao ponto *x* = 0, sofre uma colisão elástica unidimensional com a partícula 2 de massa m_2 = 0,40 kg, inicialmente em repouso. Quando a partícula 2 se choca com uma parede no ponto x_p = 70 cm, ricocheteia sem perder velocidade escalar. Em que ponto do eixo *x* a partícula 2 volta a colidir com a partícula 1?

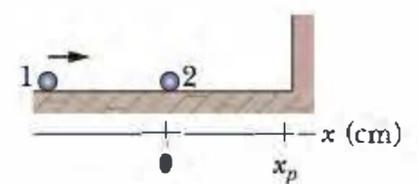



Figura 9-66 Problema 67.

••68 Na Fig. 9-67, o bloco 1 de massa m_1 desliza sem velocidade inicial ao longo de uma rampa sem atrito a partir de uma altura *h* = 2,50 m e colide com o bloco 2 de massa $m_2 = 2{,}00m_1$, inicialmente em repouso. Após a colisão, o bloco 2 desliza em uma região onde o coeficiente de atrito cinético μ_k é 0,500 e para depois de percorrer uma distância *d* nessa região. Qual é o valor da distância *d* se a colisão é (a) elástica e (b) perfeitamente inelástica?

Figura 9-67 Problema 68.

•••69 Uma pequena esfera de massa m está verticalmente acima de uma bola maior de massa $M = 0{,}63$ kg (com uma pequena separação, como no caso das bolas de beisebol e basquete da Fig. 9-68*a*) e as duas bolas são deixadas cair simultaneamente de uma altura $h = 1{,}8$ m. (Suponha que os raios das bola são desprezíveis em comparação com h.) (a) Se a bola maior ricocheteia elasticamente no chão e depois a bola menor ricocheteia elasticamente na maior, que valor de m faz com que a bola maior pare momentaneamente no instante em que colide com a menor? (b) Nesse caso, que altura atinge a bola menor (Fig. 9-68*b*)?

Bola de beisebol
Bola de basquete
(*a*) Antes (*b*) Depois

Figura 9-68 Problema 69.

•••70 Na Fig. 9-69, o disco 1, de massa $m_1 = 0{,}20$ kg, desliza sem atrito em uma bancada de laboratório até sofrer uma colisão unidimensional com o disco 2, inicialmente em repouso. O disco 2 é arremessado para fora da bancada e vai cair a uma distância d da base da bancada. A colisão faz o disco 1 inverter o movimento e ser arremessado para fora da outra extremidade da bancada, indo cair a uma distância $2d$ da base oposta. Qual é a massa do disco 2? (*Sugestão:* tome cuidado com os sinais.)

1 2
2d d

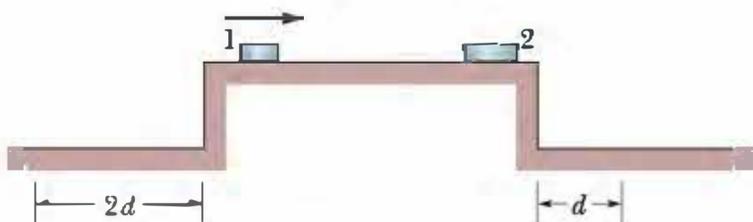



Figura 9-69 Problema 70.

Seção 9-11 Colisões em Duas Dimensões

••71 Na Fig. 9-21, a partícula 1 é uma partícula alfa e a partícula 2 é um núcleo de oxigênio. A partícula alfa é espalhada de um ângulo $\theta_1 = 64{,}0°$ e o núcleo de oxigênio recua com uma velocidade escalar de $1{,}20 \times 10^5$ m/s e um ângulo $\theta_2 = 51{,}0°$. Em unidades de massa atômica, a massa da partícula alfa é 4,00 u e a massa do núcleo de hidrogênio é 16,0 u. Qual é a velocidade (a) final e (b) inicial da partícula alfa?

••72 A bola B, que se move no sentido positivo de um eixo x com velocidade v, colide com a bola A inicialmente em repouso na origem. A e B têm massas diferentes. Após a colisão, B se move no sentido negativo do eixo y com velocidade escalar $v/2$. (a) Qual é a orientação de A após a colisão? (b) Mostre que a velocidade de A não pode ser determinada a partir das informações dadas.

••73 Após uma colisão perfeitamente inelástica, dois objetos de mesma massa e mesma velocidade escalar inicial deslocam-se juntos com metade da velocidade inicial. Determine o ângulo entre as velocidades iniciais dos objetos.

••74 Dois corpos de 2,0 kg, A e B, sofrem uma colisão. As velocidades antes da colisão são $\vec{v}_A = (15\hat{i} + 30\hat{j})$m/s e $\vec{v}_B = (-10\hat{i} + 5{,}0\hat{j})$ m/s. Após a colisão, $\vec{v}'_A = (-5{,}0\hat{i} + 20\hat{j})$ m/s. Determine (a) a velocidade final de B e (b) a variação da energia cinética total (incluindo o sinal).

••75 O próton 1, com uma velocidade de 500 m/s, colide elasticamente com o próton 2, inicialmente em repouso. Depois do choque, os dois prótons se movem em trajetórias perpendiculares, com a trajetória do próton 1 fazendo 60° com a direção inicial. Após a colisão, qual é a velocidade escalar (a) do próton 1 e (b) do próton 2?

Seção 9-12 Sistemas de Massa Variável: Um Foguete

•76 Uma sonda espacial de 6090 kg, movendo-se com o nariz à frente em direção a Júpiter a uma velocidade de 105 m/s em relação ao Sol, aciona o motor, ejetando 80,0 kg de produtos de combustão a uma velocidade de 253 m/s em relação à nave. Qual é a velocidade final da nave?

•77 Na Fig. 9-70, duas longas barcaças estão se movendo na mesma direção em águas tranquilas, uma com uma velocidade escalar de 10 km/h e a outra com uma velocidade escalar de 20 km/h. Quando estão passando uma pela outra, operários jogam carvão da barcaça mais lenta para a mais rápida a uma taxa de 1000 kg/min. Que força adicional deve ser fornecida pelos motores (a) da barcaça mais rápida e (b) da barcaça mais lenta para que as velocidades não mudem? Suponha que a transferência de carvão é perpendicular à direção do movimento das barcaças e que a força de atrito entre as barcaças e a água não depende da massa das barcaças.

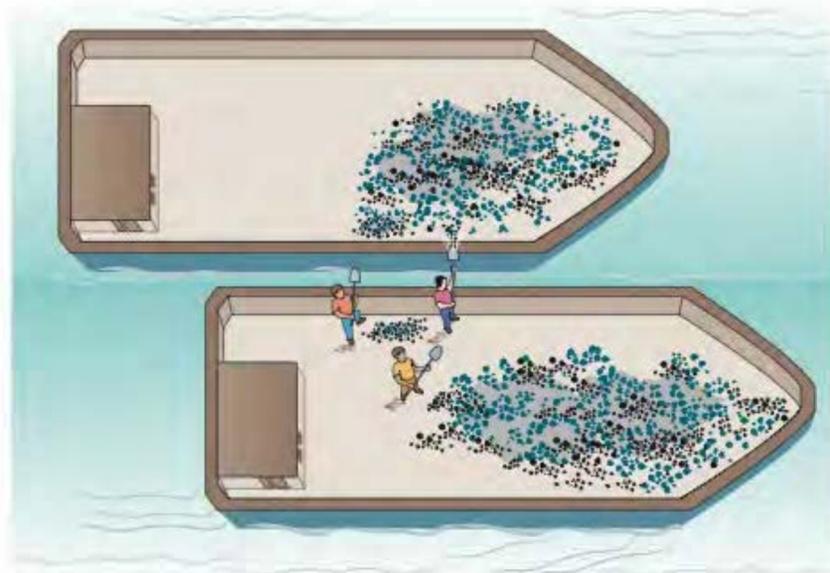



Figura 9-70 Problema 77.

•78 Considere um foguete que está no espaço sideral em repouso em relação a um referencial inercial. O motor do foguete deve ser acionado por um certo intervalo de tempo. Determine a *razão de massa* do foguete (razão entre as massas inicial e final) nesse intervalo para que a velocidade original do foguete em relação ao referencial inercial seja igual (a) à velocidade de exaustão (velocidade dos produtos de exaustão em relação ao foguete) e (b) a duas vezes a velocidade de exaustão.

•79 Um foguete que se encontra no espaço sideral e está inicialmente em repouso em relação a um referencial inercial tem uma massa de $2{,}55 \times 10^5$ kg, da qual $1{,}81 \times 10^5$ kg são de combustível. O motor do foguete é acionado por 250 s, durante os quais o combustível é consumido à taxa de 480 kg/s. A velocidade dos produtos de exaustão em relação ao foguete é 3,27 km/s. (a) Qual é o empuxo

do foguete? Após os 250 s de funcionamento do motor, quais são (b) a massa e (c) a velocidade do foguete?

Problemas Adicionais

80 Um objeto é rastreado por uma estação de radar e se verifica que seu vetor posição é dado por $\vec{r} = (3500 - 160t)\hat{i} + 2700\hat{j} + 300\hat{k}$, com $\vec{r}$ em metros e t em segundos. O eixo x da estação de radar aponta para leste, o eixo y para o norte e o eixo z verticalmente para cima. Se o objeto é um foguete meteorológico de 250 kg, quais são (a) o momento linear do foguete, (b) a direção do movimento do foguete e (c) a força que age sobre o foguete?

81 O último estágio de um foguete, que está viajando a uma velocidade de 7600 m/s, é composto de duas partes presas por uma trava: o invólucro do foguete, com uma massa de 290,0 kg, e uma cápsula de carga, com uma massa de 150,0 kg. Quando a trava é aberta, uma mola inicialmente comprimida faz as duas partes se separarem com uma velocidade relativa de 910,0 m/s. Qual é a velocidade (a) do invólucro do foguete e (b) da cápsula de carga depois de separados? Suponha que todas as velocidades estão ao longo da mesma linha reta. Determine a energia cinética total das duas partes (c) antes e (d) depois de separadas. (e) Explique a diferença.

82 *Desabamento de um edifício.* Na seção reta de um edifício que aparece na Fig. 9-71*a*, a infraestrutura de um andar qualquer, K, deve ser capaz de sustentar o peso P de todos os andares que estão acima. Normalmente, a infraestrutura é projetada com um fator de segurança s e pode sustentar uma força para baixo $sP > P$. Se, porém, as colunas de sustentação entre K e L cedem bruscamente e permitem que os andares mais altos caiam em queda livre sobre o andar K (Fig. 9-71*b*), a força da colisão pode exceder sP e fazer com que, logo depois, o andar K caia sobre o andar J, que cai sobre o andar I, e assim por diante, até o andar térreo. Suponha que a distância entre os andares é $d = 4{,}0$ m e que todos têm a mesma massa. Suponha também que quando os andares que estão acima do andar K caiam sobre o andar K em queda livre, a colisão leva 1,5 ms. Nessas condições simplificadas, que valor deve ter o coeficiente de segurança s para que o edifício não desabe?

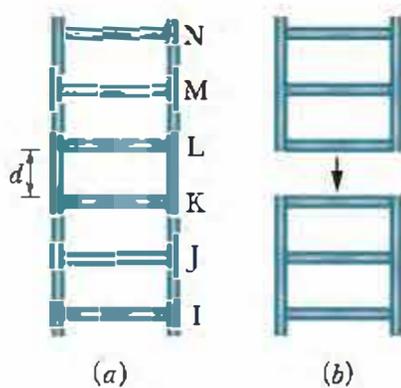



Figura 9-71 Problema 82.

83 *"Relativamente" é uma palavra importante.* Na Fig. 9-72, o bloco E de massa $m_E = 1{,}00$ kg e o bloco D de massa $m_D = 0{,}500$ kg são mantidos no lugar com uma mola comprimida entre os dois blocos. Quando os blocos são liberados, a mola os impulsiona e os blocos passam a deslizar em um piso sem atrito. (A mola tem massa desprezível e cai no piso depois de impulsionar os blocos.) (a) Se a mola imprime ao bloco E uma velocidade de 1,20 m/s *relativamente* ao piso, que distância o bloco D percorre em 0,800 s? (b) Se, em vez disso, a mola imprime ao bloco E uma velocidade de 1,20 m/s *relativamente* ao bloco D, que distância o bloco D percorre em 0,800 s?

Figura 9-72 Problema 83.

84 A Fig. 9-73 mostra uma vista superior de duas partículas que deslizam com velocidade constante em uma superfície sem atrito. As partículas têm a mesma massa e a mesma velocidade escalar inicial $v = 4{,}00$ m/s e colidem no ponto em que as trajetórias se interceptam. Um eixo x coincide com a bissetriz do ângulo entre as trajetórias incidentes e $\theta = 40{,}0°$. A região à direita da colisão está dividida em quatro partes, identificadas por letras, pelo eixo x e quatro retas tracejadas numeradas. Em que região ou ao longo de que reta as partículas viajam se a colisão é (a) perfeitamente inelástica, (b) elástica e (c) inelástica? Quais são as velocidades escalares finais das partículas se a colisão é (d) perfeitamente inelástica e (e) elástica?

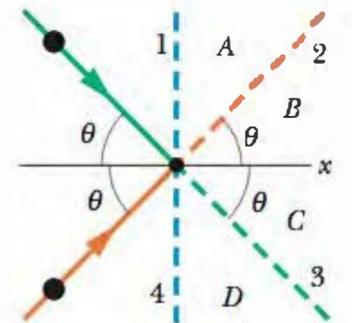



Figura 9-73 Problema 84.

85 *Redutor de velocidade.* Na Fig. 9-74, o bloco 1 de massa m_1 desliza ao longo de um eixo x em um piso sem atrito, com uma velocidade de 4,00 m/s, até sofrer uma colisão elástica unidimensional com o bloco 2, de massa $m_2 = 2{,}00m_1$, inicialmente em repouso. Em seguida, o bloco 2 sofre uma colisão elástica unidimensional com o bloco 3, de massa $m_3 = 2{,}00m_2$, inicialmente em repouso. (a) Qual é a velocidade final do bloco 3? (b) A velocidade, (c) a energia cinética e (d) o momento do bloco 3 são maiores, menores ou iguais aos valores iniciais do bloco 1?

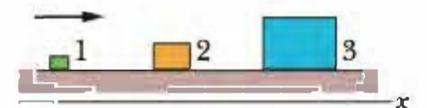



Figura 9-74 Problema 85.

86 *Amplificador de velocidade.* Na Fig. 9-75, o bloco 1, de massa m_1, desliza ao longo de um eixo x em um piso sem atrito, com uma velocidade $v_{1i} = 4{,}00$ m/s, até sofrer uma colisão elástica unidimensional com o bloco 2, de massa $m_2 = 0{,}500m_1$, inicialmente em repouso. Em seguida, o bloco 2 sofre uma colisão elástica unidimensional com o bloco 3 de massa $m_2 = 0{,}500m_2$, inicialmente em repouso. (a) Qual é a velocidade do bloco 3 após a colisão? (b) A velocidade, (c) a energia cinética e (d) o momento do bloco 3 são maiores, menores ou iguais aos valores iniciais do bloco 1?

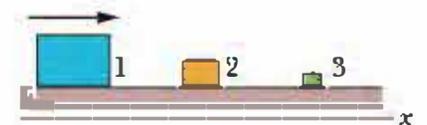



Figura 9-75 Problema 86.

87 Uma bola com uma massa de 150 g se choca com uma parede a uma velocidade de 5,2 m/s e ricocheteia com apenas 50% da energia cinética inicial. (a) Qual é a velocidade escalar da bola imediatamente após o choque? (b) Qual é o módulo do impulso da bola sobre a parede? (c) Se a bola permanece em contato com a parede por 7,6 ms, qual é o módulo da força média que a parede exerce sobre a bola durante esse intervalo de tempo?

88 Uma espaçonave é separada em duas partes pela detonação dos rebites explosivos que as mantêm unidas. As massas das partes são 1200 kg e 1800 kg; o módulo do impulso que a explosão dos rebites exerce sobre cada parte é 300 N · s. Com que velocidade relativa as duas partes se separam?

89 Um carro de 1400 kg está se movendo inicialmente para o norte a 5,3 m/s, no sentido positivo de um eixo y. Depois de fazer uma curva de 90° para a direita em 4,6 s, o motorista desatento bate em uma árvore, que para o carro em 350 ms. Na notação de vetores unitários, qual é o impulso sobre o carro (a) devido à curva e (b) devido à colisão? Qual é o módulo da força média que age sobre o carro (c) durante a curva e (d) durante a colisão? (e) Qual é a direção da força média que age sobre o carro durante a curva?

90 Um certo núcleo radioativo (pai) se transforma em um núcleo diferente (filho) emitindo um elétron e um neutrino. O núcleo pai estava em repouso na origem de um sistema de coordenadas xy. O elétron se afasta da origem com um momento linear $(-1{,}2 \times 10^{-22}$ kg · m/s)$\hat{\text{i}}$; o neutrino se afasta da origem com momento linear $(-6{,}4 \times 10^{-23}$ kg · m/s)$\hat{\text{j}}$. Quais são (a) o módulo e (b) a orientação do momento linear do núcleo filho? (c) Se o núcleo filho tem uma massa de $5{,}8 \times 10^{-26}$ kg, qual é sua energia cinética?

91 Um homem de 75 kg, que estava em um carrinho de golfe de 39 kg que se movia a uma velocidade de 2,3 m/s, pulou do carrinho com velocidade horizontal nula em relação ao chão. Qual foi a variação da velocidade do carrinho, incluindo o sinal?

92 Dois blocos de massas 1,0 kg e 3,0 kg estão ligados por uma mola e repousam em uma superfície sem atrito. Os blocos começam a se mover um em direção ao outro de modo que o bloco de 1,0 kg viaja inicialmente a 1,7 m/s em direção ao centro de massa, que permanece em repouso. Qual é a velocidade inicial do outro bloco?

93 Uma locomotiva com uma massa de $3{,}18 \times 10^4$ kg colide com um vagão inicialmente em repouso. A locomotiva e o vagão permanecem juntos após a colisão e 27% da energia cinética inicial é transferida para energia térmica, sons, vibrações etc. Determine a massa do vagão.

94 Um velho Chrysler com 2400 kg de massa, que viaja em uma estrada retilínea a 80 km/h, é seguido por um Ford com 1600 kg de massa a 60 km/h. Qual é a velocidade do centro de massa dos dois carros?

95 No arranjo da Fig. 9-21, a bola de sinuca 1, que se move a 2,2 m/s, sofre uma colisão oblíqua com a bola de sinuca 2, que está inicialmente em repouso. Após a colisão, a bola 2 se move com uma velocidade escalar de 1,1 m/s e um ângulo $\theta_2 = 60°$. Quais são (a) o módulo e (b) a orientação da velocidade da bola 1 após a colisão? (c) Os dados fornecidos mostram que a colisão é elástica ou inelástica?

96 Um foguete está se afastando do sistema solar com uma velocidade de $6{,}0 \times 10^3$ m/s. O motor do foguete é acionado e ejeta produtos de combustão com uma velocidade de $3{,}0 \times 10^3$ m/s em relação ao foguete. A massa do foguete nesse momento é $4{,}0 \times 10^4$ kg e a aceleração é 2,0 m/s^2. (a) Qual é o empuxo do motor do foguete? (b) A que taxa, em quilogramas por segundo, os produtos de combustão são ejetados?

97 As três bolas vistas de cima na Fig. 9-76 são iguais. As bolas 2 e 3 estão se tocando e alinhadas perpendicularmente à trajetória da bola 1. A velocidade da bola 1 tem módulo $v_0 = 10$ m/s e está dirigida para o ponto de contato das bolas 2 e 3. Após a colisão, quais são (a) o módulo e (b) a orientação da velocidade da bola 2, (c) o módulo e (d) a orientação da velocidade da bola 3 e (e) o módulo e (f) a orientação da velocidade da bola 1? (*Sugestão:* sem atrito, cada impulso está dirigido ao longo da reta que liga os centros das bolas envolvidas na colisão e é perpendicular às superfícies que se tocam.)

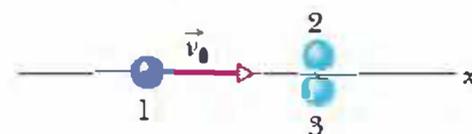



Figura 9-76 Problema 97.

98 Uma bola de 0,15 kg se choca com uma parede com uma velocidade de (5,00 m/s)$\hat{\text{i}}$ + (6,50 m/s)$\hat{\text{j}}$ + (4,00 m/s)$\hat{\text{k}}$, ricocheteia na parede e passa a ter uma velocidade de (2,00 m/s)$\hat{\text{i}}$ + (3,50 m/s)$\hat{\text{j}}$ + (−3,20 m/s)$\hat{\text{k}}$. Determine (a) a variação do momento da bola, (b) o impulso exercido pela parede sobre a bola e (c) o impulso exercido pela bola sobre a parede.

99 Na Fig. 9-77, dois recipientes com açúcar estão ligados por uma corda que passa por uma polia sem atrito. A corda e a polia têm massa desprezível, a massa de cada recipiente é 500 g (incluindo o açúcar), os centros dos recipientes estão separados por uma distância de 50 mm e os recipientes são mantidos à mesma altura. Qual é a distância horizontal entre o centro de massa do recipiente 1 e o centro de massa do sistema de dois recipientes (a) inicialmente e (b) após 20 g de açúcar serem transferidos do recipiente 1 para o recipiente 2? Após a transferência e após os recipientes serem liberados a partir do repouso, (c) em que sentido e (d) com que aceleração o centro de massa se move?

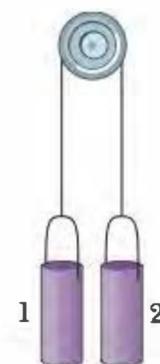



Figura 9-77 Problema 99.

100 Em um jogo de sinuca, a bola branca se choca com outra bola inicialmente em repouso. Após o choque, a bola branca se move com uma velocidade escalar de 3,50 m/s ao longo de uma reta que faz um ângulo de 22,0° com a direção do movimento da bola branca antes do choque e a segunda bola tem uma velocidade escalar de 2,00 m/s. Determine (a) o ângulo entre a direção do movimento da segunda bola e a direção do movimento da bola branca antes do choque e (b) a velocidade escalar da bola branca antes do choque. (c) A energia cinética (dos centros de massa, não considere as rotações) é conservada?

101 Na Fig. 9-78, uma caixa de sapatos de corrida de 3,2 kg desliza em uma mesa horizontal sem atrito e colide com uma caixa de sapatilhas de balé de 2,0 kg inicialmente em repouso na extremidade da mesa, a uma altura $h = 0{,}40$ m do chão. A velocidade da caixa de 3,2 kg é 3,0 m/s imediatamente antes da colisão. Se as caixas grudam uma na outra por estarem fechadas com fita adesiva, qual é a energia cinética do conjunto imediatamente antes de atingir o chão?

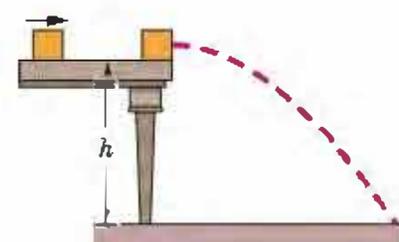



Figura 9-78 Problema 101.

102 Na Fig. 9-79, um homem de 80 kg está em uma escada pendurada em um balão que possui uma massa total de 320 kg (incluindo o passageiro na cesta). O balão está inicialmente em repouso em relação ao solo. Se o homem na escada começa a subir a 2,5 m/s em relação à escada, (a) em que sentido e (b) com que velocidade escalar o balão se move? (c) Se o homem para de subir, qual é a velocidade escalar do balão?

Figura 9-79 Problema 102.

103 Na Fig. 9-80, o bloco 1, de massa $m_1 = 6{,}6$ kg, está em repouso sobre uma mesa sem atrito que está encostada em uma parede. O bloco 2, de massa m_2, está posicionado entre o bloco 1 e a parede e desliza para a esquerda em direção ao bloco 1 com velocidade constante v_{2i}. Determine o valor de m_2 para o qual os dois blocos se movem com a mesma velocidade após o bloco 2 colidir uma vez com o bloco 1 e uma vez com a parede. Suponha que as colisões são elásticas (a colisão com a parede não muda a velocidade escalar do bloco 2).

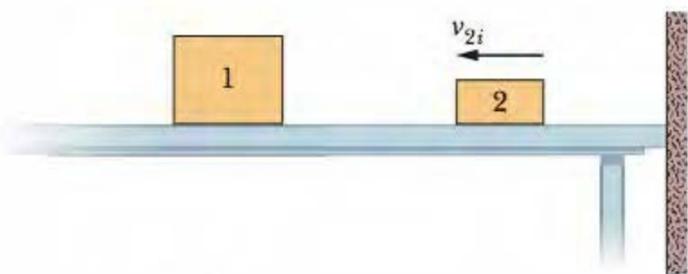



Figura 9-80 Problema 103.

104 O roteiro de um filme de ação requer que um pequeno carro de corrida (com uma massa de 1500 kg e um comprimento de 3,0 m) acelere ao longo de uma barcaça (com uma massa de 4000 kg e um comprimento de 14 m), de uma extremidade a outra da embarcação, e salte para um cais um pouco mais abaixo. Você é o consultor técnico do filme. No momento em que o carro entra em movimento, o barco está encostado no cais, como na Fig. 9-81; o barco pode deslizar na água sem resistência significativa; a distribuição de massa do carro e da barcaça pode ser considerada homogênea. Calcule qual será a distância entre o barco e o cais no instante do salto.

Figura 9-81 Problema 104.

105 Um objeto de 3,0 kg, que se move com uma velocidade escalar de 8,0 m/s no sentido positivo de um eixo x, sofre uma colisão elástica unidimensional com um objeto de massa M inicialmente em repouso. Após a colisão, o objeto de massa M tem uma velocidade escalar de 6,0 m/s no sentido positivo do eixo x. Qual é o valor da massa M?

106 Um vagão aberto de 2140 kg, que pode se mover com atrito desprezível, está parado ao lado de uma plataforma. Um lutador de sumô de 242 kg corre a 5,3 m/s pela plataforma (paralelamente aos trilhos) e pula no vagão. Qual é a velocidade do vagão se o lutador (a) para imediatamente, (b) continua a correr a 5,3 m/s em relação ao vagão, no mesmo sentido, e (c) faz meia volta e passa a correr a 5,3 m/s em relação ao vagão no sentido oposto?

107 Um foguete de 6100 kg está preparado para ser lançado verticalmente a partir do solo. Se a velocidade de exaustão é 1200 m/s, qual é a massa de gás que deve ser ejetada por segundo para que o empuxo (a) seja igual ao módulo da força gravitacional que age sobre o foguete e (b) proporcione ao foguete uma aceleração inicial para cima de 21 m/s^2?

108 Um módulo de 500,0 kg está acoplado a uma nave de transporte de 400,0 kg que se move a 1000 m/s em relação a uma nave-mãe em repouso. Uma pequena explosão faz o módulo se mover para trás com uma velocidade de 100,0 m/s em relação à nova velocidade da nave de transporte. Qual é o aumento relativo da energia cinética do módulo e da nave de transporte em consequência da explosão, do ponto de vista dos tripulantes da nave-mãe?

109 (a) A que distância do centro da Terra se encontra o centro de massa do sistema Terra–Lua? (O Apêndice C fornece as massas da Terra e da Lua e a distância entre os dois astros.) (b) A que porcentagem do raio da Terra corresponde essa distância?

110 Uma bola de 140 g com uma velocidade escalar de 7,8 m/s se choca perpendicularmente com uma parede e ricocheteia no sentido oposto com a mesma velocidade escalar. O choque dura 3,80 ms. Quais são os módulos (a) do impulso e (b) da força média que a bola exerce sobre a parede?

111 Um trenó-foguete com uma massa de 2900 kg se move a 250 m/s sobre dois trilhos. Em um certo ponto, um tubo a bordo do trenó é mergulhado em um canal situado entre os trilhos e passa a transferir água para o tanque do trenó, inicialmente vazio. Aplicando a lei de conservação do momento linear, determine a velocidade do trenó depois que 920 kg de água são transferidos do canal para o trenó. Ignore o atrito do tubo com a água do canal.

112 Uma metralhadora de chumbinho dispara dez balas de 2,0 g por segundo com uma velocidade escalar de 500 m/s. As balas são paradas por uma parede rígida. Determine (a) o módulo do momento de cada bala, (b) a energia cinética de cada bala e (c) o módulo da força média exercida pelas balas sobre a parede. (d) Se cada bala permanece em contato com a parede apenas por 0,60 ms, qual é o módulo da força média exercida por uma bala sobre a parede? (e) Por que a força média é tão diferente da força média calculada em (c)?

113 Um vagão de trem se move sob uma esteira transportadora de grãos com uma velocidade escalar de 3,20 m/s. Os grãos caem no vagão a uma taxa de 540 kg/min. Qual é o módulo da força necessária para manter o vagão em movimento com velocidade constante se o atrito é desprezível?

114 A Fig. 9-82 mostra uma placa quadrada uniforme de lado $6d = 6{,}0$ m da qual um pedaço quadrado de lado $2d$ foi retirado. Quais são (a) a coordenada x e (b) a coordenada y do centro de massa da parte restante?

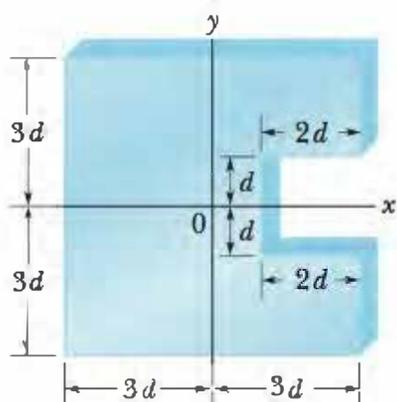



Figura 9-82 Problema 114.

115 No instante $t = 0$, uma força $\vec{F}_1 = (-4{,}00\hat{\imath} + 5{,}00\hat{\jmath})$ N age sobre uma partícula de massa $2{,}00 \times 10^{-3}$ kg, inicialmente em repouso, e uma força $\vec{F}_2 = (2{,}00\hat{\imath} - 4{,}00\hat{\jmath})$N age sobre uma partícula de massa $4{,}00 \times 10^{-3}$ kg, também inicialmente em repouso. Do instante $t = 0$ ao instante $t = 2{,}00$ ms, quais são (a) o módulo e (b) o ângulo (em relação ao semieixo x positivo) do deslocamento do centro de massa do sistema das duas partículas? (c) Qual é a energia cinética do centro de massa em $t = 2{,}00$ ms?

116 Duas partículas, P e Q, são liberadas a partir do repouso a 1,0 m de distância uma da outra. A partícula P tem uma massa de 0,10 kg e a partícula Q tem uma massa de 0,30 kg. P e Q se atraem com uma força constante de $1{,}0 \times 10^{-2}$ N. Nenhuma força externa age sobre o sistema. (a) Qual é a velocidade do centro de massa de P e Q quando a distância entre as partículas é 0,50 m? (b) A que distância da posição inicial de P as partículas colidem?

117 Uma colisão ocorre entre um corpo de 2,00 kg que se move com uma velocidade $\vec{v}_1 = (-4{,}00 \text{ m/s})\hat{\imath} + (-5{,}00 \text{ m/s})\hat{\jmath}$ e um corpo de 4,00 kg que se move com uma velocidade $\vec{v}_2 = (6{,}00 \text{ m/s})\hat{\imath} + (-2{,}00 \text{ m/s})\hat{\jmath}$ Os dois corpos permanecem unidos após a colisão. Determine a velocidade comum dos dois corpos após a colisão (a) em termos dos vetores unitários e como (b) um módulo e (c) um ângulo.

118 No arranjo das duas esferas da Fig. 9-20, suponha que a esfera 1 tem uma massa de 50 g e uma altura inicial $h_1 = 9{,}0$ cm e que a esfera 2 tem uma massa de 85 g. Depois que a esfera 1 é liberada e colide elasticamente com a esfera 2, que altura é alcançada (a) pela esfera 1 e (b) pela esfera 2? Após a colisão (elástica) seguinte, que altura é alcançada (c) pela esfera 1 e (d) pela esfera 2? (*Sugestão:* não use valores arredondados.)

119 Na Fig. 9-83, o bloco 1 desliza ao longo de um eixo x em um piso sem atrito com uma velocidade de 0,75 m/s até sofrer uma colisão elástica com o bloco 2, inicialmente em repouso. A tabela a seguir mostra a massa e comprimento dos blocos (homogêneos) e a posição do centro dos blocos no instante $t = 0$. Determine a posição do centro de massa do sistema de dois blocos (a) em $t = 0$, (b) no instante do choque e (c) em $t = 4{,}0$ s.

Bloco	Massa (kg)	Comprimento (cm)	Centro em $t = 0$
1	0,25	5,0	$x = -1{,}50$ m
2	0,50	6,0	$x = 0$

Figura 9-83 Problema 119.

120 Um corpo está se movendo com uma velocidade escalar de 2,0 m/s no sentido positivo de um eixo x; nenhuma força age sobre o corpo. Uma explosão interna separa o corpo em duas partes, ambas de 4,0 kg, e aumenta a energia cinética total em 16 J. A parte da frente continua a se mover na mesma direção e sentido que o corpo original. Qual é a velocidade escalar (a) da parte de trás e (b) da parte da frente do corpo?

121 Um elétron sofre uma colisão elástica unidimensional com um átomo de hidrogênio inicialmente em repouso. Que porcentagem da energia cinética inicial do elétron é transferida para a energia cinética do átomo de hidrogênio? (A massa do átomo de hidrogênio é 1840 vezes maior que a massa do elétron.)

122 Um homem (com 915 N de peso) está em pé em um vagão de trem (com 2415 N de peso) enquanto este se move a 18,2 m/s no sentido positivo de um eixo x, com atrito desprezível. O homem começa a correr no sentido negativo do eixo x com uma velocidade escalar de 4,00 m/s em relação ao vagão. Qual é o aumento da velocidade do vagão?

CAPÍTULO

ROTAÇÃO 10

10-1 O QUE É FÍSICA?

Como vimos em capítulos anteriores, um dos objetivos principais da física é estudar movimentos. Até agora, examinamos apenas os movimentos de **translação**, nos quais objetos se movem ao longo de linhas retas ou curvas, como na Fig. 10-1*a*. Vamos agora considerar os movimentos de **rotação**, nos quais os objetos giram em torno de um eixo, como na Fig. 10-1*b*.

Observamos rotações em quase todas as máquinas; produzimos rotações toda vez que abrimos uma tampa de rosca; pagamos para experimentar rotações quando vamos a um parque de diversões. A rotação é o segredo de jogadas de sucesso em muitos esportes, como dar uma longa tacada no golfe (a bola precisa estar girando para se manter no ar durante mais tempo) ou chutar com efeito no futebol (a bola precisa girar para que o ar a empurre para a esquerda ou para a direita). A rotação também é importante em questões mais sérias, como a fadiga das peças metálicas dos aviões.

Começamos nossa discussão da rotação definindo as variáveis do movimento, como fizemos para a translação no Capítulo 2. Como vamos ver, as variáveis da rotação são análogas às do movimento unidimensional e, como no Capítulo 2, uma situação especial importante é aquela na qual a aceleração (neste caso, a aceleração angular) é constante. Vamos ver também que é possível escrever uma equação equivalente à segunda lei de Newton para o movimento de rotação, usando uma grandeza chamada *torque* no lugar da força. O teorema do trabalho e energia cinética também pode ser aplicado ao movimento de rotação, com a massa substituída por uma grandeza chamada *momento de inércia*. Na verdade, grande parte do que discutimos até agora pode ser aplicado ao movimento de rotação com, talvez, pequenas modificações.

(*a*)

(*b*)

Figura 10-1 A patinadora Sasha Cohen em um movimento (*a*) de translação pura em uma direção fixa e (*b*) de rotação pura em torno de um eixo vertical. *(a: Mike Segar/Reuters/Landov LLC; b: Elsa/Getty Images, Inc.)*

10-2 As Variáveis da Rotação

Neste capítulo, vamos estudar a rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo. Um **corpo rígido** é um corpo que gira com todas as partes ligadas entre si e sem mudar de forma. Um **eixo fixo** é um eixo que não muda de posição. Isso significa que não examinaremos um objeto como o Sol, pois as partes do Sol (uma bola de gás) não estão ligadas entre si. Também não examinaremos um objeto como uma bola de boliche rolando em uma pista, já que a bola gira em torno de um eixo que muda constantemente de posição (o movimento da bola é uma mistura de rotação e translação).

A Fig. 10-2 mostra um corpo rígido de forma arbitrária girando em torno de um eixo fixo, chamado de **eixo de rotação**. Em uma rotação pura (*movimento angular*), todos os pontos do corpo se movem ao longo de circunferências cujo centro está sobre o eixo de rotação e todos os pontos descrevem o mesmo ângulo no mesmo intervalo de tempo. Na translação pura (*movimento linear*), todos os pontos se movem ao longo de linhas retas e todos os pontos percorrem a mesma distância no mesmo intervalo de tempo.

Vamos discutir agora (um de cada vez) os equivalentes angulares das grandezas lineares posição, deslocamento, velocidade e aceleração.

Posição Angular

A Fig. 10-2 mostra uma *reta de referência*, fixa ao corpo, perpendicular ao eixo de rotação e girando com o corpo. A **posição angular** da reta é o ângulo que faz com uma direção fixa, que tomamos como a **posição angular zero**. Na Fig. 10-3, a posição angular θ é medida em relação ao semieixo x positivo. De acordo com a geometria, θ é dado por

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{(ângulo em radianos).} \tag{10-1}$$

onde s é comprimento de um arco de circunferência que vai do eixo x (posição angular zero) até a reta de referência e r é o raio da circunferência.

Um ângulo definido desta forma é medido em **radianos** (rad) e não em revoluções (rev) ou em graus. Como é a razão entre dois comprimentos, o radiano é um número puro, ou seja, não tem dimensão. Como o comprimento de uma circunferência de raio r é $2\pi r$, uma circunferência completa equivale a 2π radianos:

$$1 \text{ rev} = 360° = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad}, \tag{10-2}$$

e, portanto,

$$1 \text{ rad} = 57{,}3° = 0{,}159 \text{ rev}. \tag{10-3}$$

Nós *não* reajustamos θ para zero a cada volta completa da reta de referência. Se a reta de referência completa duas revoluções a partir da posição angular zero, a posição angular da reta é $\theta = 4\pi$ rad.

No caso da translação pura de uma partícula ao longo de um eixo x, o movimento da partícula é totalmente descrito por uma função $x(t)$, a posição da partícula em função do tempo. Analogamente, no caso da rotação pura de um corpo rígido, o movimento da partícula é totalmente descrito por uma função $\theta(t)$, a posição angular da reta de referência do corpo em função do tempo.

Figura 10-2 Um corpo rígido de forma arbitrária em rotação pura em torno do eixo z de um sistema de coordenadas. A posição da *reta de referência* em relação ao corpo rígido é arbitrária, mas a reta é perpendicular ao eixo de rotação e mantém sempre a mesma posição em relação ao corpo, girando com ele.

Deslocamento Angular

Se o corpo da Fig. 10-3 gira em torno do eixo de rotação como na Fig. 10-4, com a posição angular da reta de referência variando de θ_1 para θ_2, o corpo sofre um **deslocamento angular** $\Delta\theta$ dado por

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1. \tag{10-4}$$

Esta definição de deslocamento angular é válida, não só para o corpo rígido como um todo, mas também para *todas as partículas do corpo*.

Se um corpo está em movimento de translação ao longo de um eixo x, o deslocamento Δx pode ser positivo ou negativo, dependendo de se o movimento ocorre no sentido positivo ou negativo do eixo. Da mesma forma, o deslocamento angular $\Delta\theta$ de um corpo em rotação pode ser positivo ou negativo, de acordo com a seguinte regra:

> Um deslocamento angular no sentido anti-horário é positivo e um deslocamento angular no sentido horário é negativo.

A frase *"os relógios são negativos"* pode ajudá-lo a memorizar esta regra (os relógios certamente são negativos quando tocam de manhã cedo).

Figura 10-3 Seção transversal do corpo rígido em rotação da Fig. 10-2, visto de cima. O plano da seção transversal é perpendicular ao eixo de rotação, que agora está perpendicular ao plano do papel, saindo do papel. Nesta posição do corpo, a reta de referência faz um ângulo θ com o eixo x.

TESTE 1

Um disco pode girar em torno de um eixo central como se fosse um carrossel. Quais dos seguintes pares de valores para as posições inicial e final, respectivamente, correspondem a um deslocamento angular negativo: (a) -3 rad, $+5$ rad, (b) -3 rad, -7 rad, (c) 7 rad, -3 rad?

Velocidade Angular

Suponha que um corpo em rotação está na posição angular θ_1 no instante t_1 e na posição angular θ_2 no instante t_2, como na Fig. 10-4. Definimos a **velocidade angular média** do corpo no intervalo de tempo Δt de t_1 a t_2 como

$$\omega_{méd} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \tag{10-5}$$

onde $\Delta\theta$ é o deslocamento angular que acontece durante o intervalo de tempo Δt (ω é a letra grega ômega minúscula).

A **velocidade angular (instantânea)** ω, na qual estaremos mais interessados, é o limite da razão da Eq. 10-5 quando Δt tende a zero:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}. \tag{10-6}$$

Se conhecemos $\theta(t)$, podemos calcular a velocidade angular ω por derivação.

As Eqs. 10-5 e 10-6 valem não só para o corpo rígido como um todo, mas também para *todas as partículas do corpo*, uma vez que as distâncias relativas são mantidas fixas. As unidades de velocidade angular mais usadas são o radiano por segundo (rad/s) e a revolução por segundo (rev/s). Outra medida de velocidade angular foi usada durante muitos anos pela indústria fonográfica: a música era reproduzida em discos de vinil que giravam a "$33\frac{1}{3}$ rpm" ou "45 rpm", o que significava $33\frac{1}{3}$ rev/min ou 45 rev/min.

Se uma partícula se move em translação ao longo de um eixo x, a velocidade linear v da partícula pode ser positiva ou negativa, dependendo de se a partícula está se deslocando no sentido positivo ou negativo do eixo. Analogamente, a velocidade angular ω de um corpo rígido em rotação pode ser positiva ou negativa, dependendo de se o corpo está girando no sentido anti-horário (positivo) ou horário (negativo). ("Os relógios são negativos" também funciona neste caso.) O módulo da velocidade angular é chamado de **velocidade angular escalar** e também é representado por ω.

Esta variação do ângulo é o deslocamento angular do corpo durante este intervalo de tempo.

Figura 10-4 A reta de referência do corpo rígido das Figs. 10-2 e 10-3 está na posição angular θ_1 no instante t_1 e na posição angular θ_2 no instante t_2. A grandeza $\Delta\theta$ ($= \theta_2 - \theta_1$) é o deslocamento angular que acontece no intervalo Δt ($= t_2 - t_1$). O corpo propriamente dito não aparece na figura.

Aceleração Angular

Se a velocidade angular de um corpo em rotação não é constante, o corpo possui uma aceleração angular. Sejam ω_2 e ω_1 as velocidades angulares nos instantes t_2 e t_1, respectivamente. A **aceleração angular média** do corpo em rotação no intervalo de t_1 a t_2 é definida através da equação

$$\alpha_{méd} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \tag{10-7}$$

onde $\Delta\omega$ é a variação da velocidade angular no intervalo Δt.

A **aceleração angular (instantânea)** α, na qual estaremos mais interessados, é o limite dessa grandeza quando Δt tende a zero:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \tag{10-8}$$

As Eqs. 10-7 e 10-8 também são válidas para *todas as partículas do corpo*. As unidades de aceleração mais usadas são o radiano por segundo ao quadrado (rad/s^2) e a revolução por segundo ao quadrado (rev/s^2).

Exemplo

Cálculo da velocidade angular a partir da posição angular

O disco da Fig. 10-5*a* está girando em torno do eixo central como um carrossel. A posição angular $\theta(t)$ de uma reta de referência do disco é dada por

$$\theta = -1{,}00 - 0{,}600t + 0{,}250t^2, \qquad (10\text{-}9)$$

com t em segundos, θ em radianos e a posição angular zero indicada na figura.

(a) Plote a posição angular do disco em função do tempo, de $t = -3{,}0$ s a $t = 5{,}4$ s. Desenhe o disco e a reta de referência em $t = -2{,}0$ s, 0 s, 4,0 s e nos instantes em que o gráfico cruza o eixo t.

IDEIA-CHAVE

A posição angular do disco é a posição angular $\theta(t)$ da reta de referência, dada pela Eq. 10-9 como uma função do tempo t. Assim, devemos plotar a Eq. 10-9; o resultado aparece na Fig. 10-5*b*.

Cálculos Para desenhar o disco e a reta de referência em um certo instante, precisamos determinar o valor de θ nesse instante. Para isso, substituímos t por seu valor na Eq. 10-9. Para $t = -2{,}0$ s, obtemos

$$\theta = -1{,}00 - (0{,}600)(-2{,}0) + (0{,}250)(-2{,}0)^2$$
$$= 1{,}2 \text{ rad} = 1{,}2 \text{ rad}\,\frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = 69°.$$

Isso significa que em $t = -2{,}0$ s a reta de referência está deslocada de 1,2 rad = 69° no sentido anti-horário (porque θ é positivo) em relação à posição zero. O desenho 1 da Fig. 10-5*b* mostra esta posição da reta de referência.

Da mesma forma, para $t = 0$, obtemos $\theta = -1{,}00$ rad $= -57°$, o que significa que a reta de referência está deslocada de 1,0 rad = 57° no sentido horário em relação à posição angular zero, como mostra o desenho 3. Para $t = 4{,}0$ s, obtemos $\theta = 0{,}60$ rad $= 34°$ (desenho 5). Fazer desenhos para os instantes em que a curva cruza o eixo t é fácil, pois nesse caso $\theta = 0$ e a reta de referência está momentaneamente alinhada com a posição angular zero (desenhos 2 e 4).

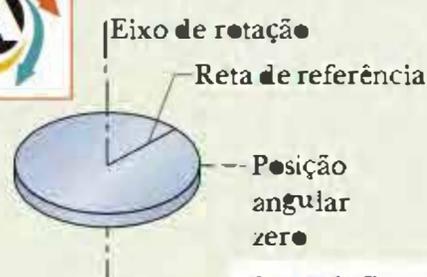
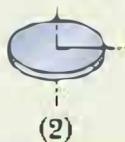
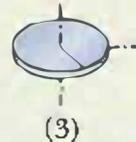
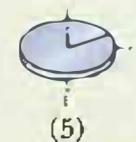



Figura 10-5 (*a*) Um disco em rotação. (*b*) Gráfico da posição angular do disco em função do tempo, $\theta(t)$. Cinco desenhos indicam a posição angular da reta de referência do disco para cinco pontos da curva. (*c*) Gráfico da velocidade angular em função do tempo, $\omega(t)$. Valores positivos de ω correspondem a rotações no sentido anti-horário; valores negativos, a rotações no sentido horário.

(b) Em que instante $t_{mín}$ o ângulo $\theta(t)$ passa pelo valor mínimo mostrado na Fig. 10-5*b*? Qual é esse valor mínimo?

IDEIA-CHAVE

Para determinar o valor extremo (o mínimo, neste caso) de uma função, calculamos a derivada primeira da função e igualamos o resultado a zero.

Cálculos A derivada primeira de $\theta(t)$ é

$$\frac{d\theta}{dt} = -0{,}600 + 0{,}500t. \quad (10\text{-}10)$$

Igualando este resultado a zero e explicitando t, determinamos o instante em que $\theta(t)$ é mínimo:

$$t_{mín} = 1{,}20 \text{ s}. \quad \text{(Resposta)}$$

Para obter o valor mínimo de θ, substituímos $t_{mín}$ na Eq. 10-9, o que nos dá

$$\theta = -1{,}36 \text{ rad} \approx -77{,}9°. \quad \text{(Resposta)}$$

(*c*)

Este *mínimo* de $\theta(t)$ (o ponto mais baixo da curva da Fig. 10-5*b*) corresponde à *máxima rotação no sentido horário* do disco a partir da posição angular zero, uma rotação um pouco maior que a representada no desenho 3.

(c) Plote a velocidade angular ω do disco em função do tempo de $t = -3{,}0$ s a $t = 6{,}0$ s. Desenhe o disco e indique o sentido de rotação e o sinal de ω em $t = -2{,}0$ s, 4,0 s e $t_{mín}$.

IDEIA-CHAVE

De acordo com a Eq. 10-6, a velocidade angular ω é igual a $d\theta/dt$, dada pela Eq. 10-10. Temos, portanto,

$$\omega = -0{,}600 + 0{,}500t. \quad (10\text{-}11)$$

O gráfico da função $\omega(t)$ aparece na Fig. 10-5*c*.

Cálculos Para desenhar o disco em $t = -2{,}0$ s, substituímos este valor de t na Eq. 10-11, obtendo

$$\omega = -1{,}6 \text{ rad/s}. \quad \text{(Resposta)}$$

O sinal negativo mostra que em $t = -2{,}0$ s o disco está girando no sentido horário (desenho da esquerda da Fig. 10-5*c*).

Fazendo $t = 4{,}0$ s na Eq. 10-11, obtemos

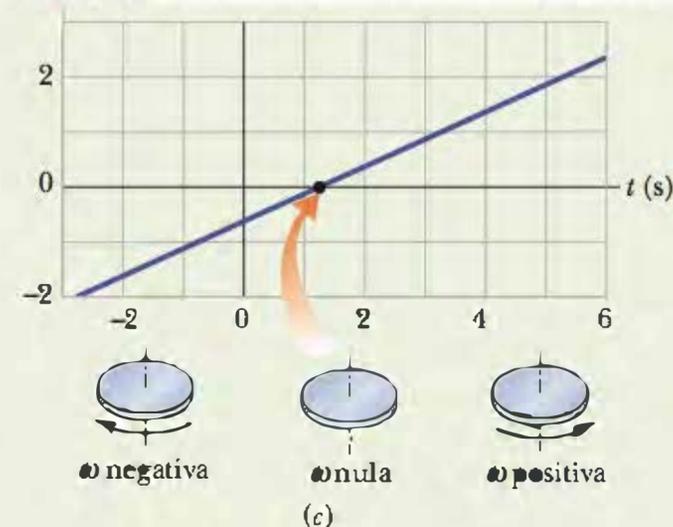
$$\omega = 1{,}4 \text{ rad/s}. \quad \text{(Resposta)}$$

O sinal positivo implícito mostra que em $t = 4{,}0$ s o disco está girando no sentido anti-horário (desenho da direita da Fig. 10-5*c*).

Já sabemos que $d\theta/dt = 0$ para $t = t_{mín}$. Isso significa que neste ponto $\omega = 0$, ou seja, o disco para momentaneamente quando a reta de referência atinge o valor mínimo de θ na Fig. 10-5*b*, como sugere o desenho central na Fig. 10-5*c*. No gráfico, esta parada momentânea corresponde ao ponto onde a reta intercepta o eixo t e a velocidade angular muda de sinal.

(d) Use os resultados anteriores para descrever o movimento do disco de $t = -3{,}0$ s a $t = 6{,}0$ s.

Descrição Quando observamos o disco pela primeira vez, em $t = -3{,}0$ s, o disco tem uma posição angular positiva e está girando no sentido horário, com velocidade cada vez menor. Depois de parar momentaneamente na posição angular $\theta = -1{,}36$ rad, o disco começa a girar no sentido anti-horário e o valor de θ aumenta até se tornar novamente positivo.

Exemplo

Cálculo da velocidade angular a partir da aceleração angular

Um pião gira com aceleração angular

$$\alpha = 5t^3 - 4t,$$

onde t está em segundos e α em radianos por segundo ao quadrado. No instante $t = 0$, a velocidade angular do pião é 5 rad/s e uma reta de referência traçada no pião está na posição angular $\theta = 2$ rad.

(a) Obtenha uma expressão para a velocidade angular do pião, $\omega(t)$, ou seja, escreva uma expressão que descreva explicitamente a variação da velocidade angular com o tempo. (Sabemos que a velocidade angular *varia* com o tempo, já que existe uma aceleração angular.)

IDEIA-CHAVE

Por definição, $\alpha(t)$ é a derivada de $\omega(t)$ em relação ao tempo. Assim, podemos obter $\omega(t)$ integrando $\alpha(t)$ em relação ao tempo.

Cálculos De acordo com a Eq. 10-8,

$$d\omega = \alpha\, dt,$$

e, portanto,

$$\int d\omega = \int \alpha\, dt.$$

Assim, temos:

$$\omega = \int (5t^3 - 4t)\, dt = \tfrac{5}{4}t^4 - \tfrac{4}{2}t^2 + C.$$

Para calcular o valor da constante de integração C, observamos que $\omega = 5$ rad/s no instante $t = 0$. Substituindo esses valores na expressão de ω, obtemos:

$$5 \text{ rad/s} = 0 - 0 + C,$$

e, portanto, $C = 5$ rad/s. Nesse caso,

$$\omega = \tfrac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Obtenha uma expressão para a posição angular do pião, $\theta(t)$.

IDEIA-CHAVE

Por definição, $\omega(t)$ é a derivada de $\theta(t)$ em relação ao tempo. Assim, podemos obter $\theta(t)$ integrando $\omega(t)$ em relação ao tempo.

Cálculos Como, de acordo com a Eq. 10-6,

$$d\theta = \omega\, dt,$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}\theta &= \int \omega\, dt = \int \left(\tfrac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5\right) dt \\ &= \tfrac{1}{4}t^5 - \tfrac{2}{3}t^3 + 5t + C' \\ &= \tfrac{1}{4}t^5 - \tfrac{2}{3}t^3 + 5t + 2. \qquad \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

onde C' foi calculado para que $\theta = 2$ rad em $t = 0$.

10-3 As Grandezas Angulares São Vetores?

A posição, velocidade e aceleração de uma partícula são normalmente expressas através de vetores. Quando uma partícula se move em linha reta, porém, não é necessário usar a notação vetorial. Nessas condições, a partícula pode se mover apenas em dois sentidos, que podemos indicar usando os sinais positivo e negativo.

Da mesma forma, um corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo só pode girar nos sentidos horário e anti-horário e podemos indicar esses sentidos usando os sinais positivo e negativo. A questão que se levanta é a seguinte: "No caso mais geral, podemos expressar o deslocamento, a velocidade e a aceleração angular de um corpo rígido em rotação através de vetores?" A resposta é um "sim" cauteloso (veja a ressalva a seguir, em relação aos deslocamentos angulares).

Considere a velocidade angular. A Fig. 10-6*a* mostra um disco de vinil girando em um toca-discos. O disco tem uma velocidade angular escalar constante ω (= $33\frac{1}{3}$ rev/min) no sentido horário. Podemos representar a velocidade angular do disco como um vetor $\vec{\omega}$ apontando ao longo do eixo de rotação, como na Fig. 10-6*b*. A regra é a seguinte: escolhemos o comprimento do vetor de acordo com uma escala conveniente, como, por exemplo, 1 cm para cada 10 rev/min. Em seguida, determinamos o sentido do vetor $\vec{\omega}$ usando a **regra da mão direita**, como mostra a Fig. 10-6*c*. Envolva o disco com a mão direita, com os dedos apontando *no sentido de rotação*; o polegar estendido mostra o sentido do vetor velocidade angular. Se o

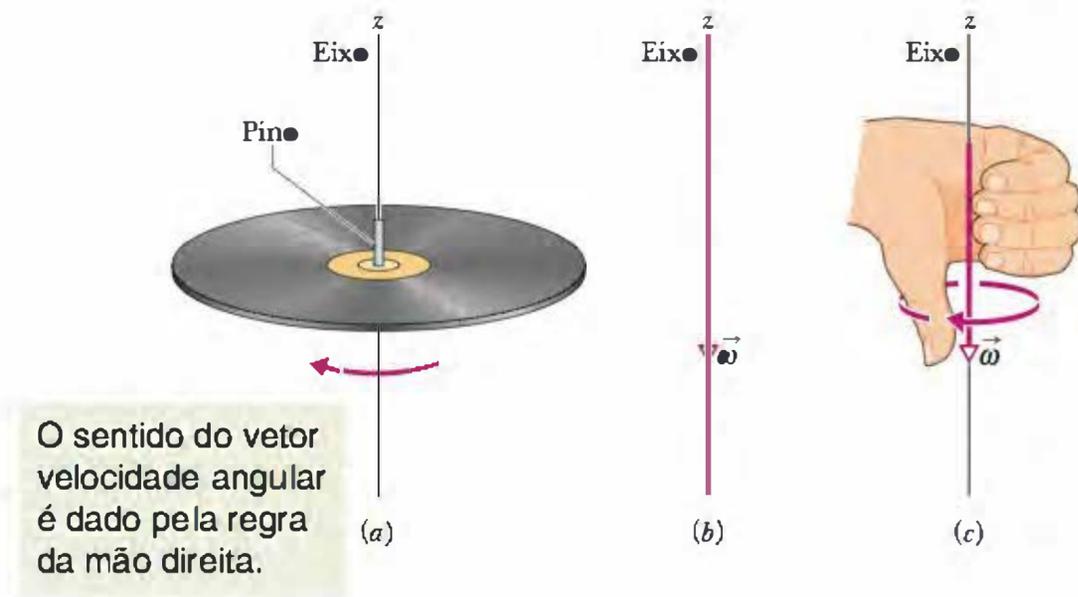



Figura 10-6 (*a*) Um disco em rotação em torno de um eixo vertical que passa pelo centro do disco. (*b*) A velocidade angular do disco pode ser representada por um vetor $\vec{\omega}$ que coincide com o eixo de rotação e aponta para baixo, como mostra a figura. (*c*) Estabelecemos o sentido do vetor velocidade angular como para baixo pela regra da mão direita. Quando os dedos da mão direita envolvem o disco e apontam no sentido do movimento, o polegar estendido mostra o sentido de ω.

O sentido do vetor velocidade angular é dado pela regra da mão direita.

disco estivesse girando no sentido oposto, a regra da mão direita indicaria o sentido oposto para o vetor velocidade angular.

A representação de grandezas angulares por meio de vetores não é tão fácil de compreender como a representação de grandezas lineares. Instintivamente, esperamos que algo se mova *na direção* do vetor. Não é o que acontece. Em vez disso, temos algo (o corpo rígido) que gira *em torno* da direção do vetor. No mundo das rotações puras, um vetor define um eixo de rotação, não uma direção de movimento. Entretanto, o vetor define também o movimento. Além disso, obedece a todas as regras de manipulação de vetores que foram discutidas no Capítulo 3. A aceleração angular $\vec{\alpha}$ é outro vetor que obedece às mesmas regras.

Neste capítulo consideramos apenas rotações em torno de um eixo fixo. Nesse caso, não precisamos trabalhar com vetores; podemos representar a velocidade angular através de um escalar ω, a aceleração angular através de um escalar α e usar o sinal positivo para indicar o sentido anti-horário e o sinal negativo para indicar o sentido horário.

Vamos agora à ressalva: os *deslocamentos* angulares (a menos que sejam muito pequenos) *não podem* ser tratados como vetores. Por que não? Podemos certamente atribuir aos deslocamentos angulares um módulo e uma orientação, como fizemos para a velocidade angular na Fig. 10-6. Entretanto, para ser representada como um vetor, uma grandeza também *precisa* obedecer às regras da soma vetorial, uma das quais diz que, quando somamos dois vetores, a ordem na qual os vetores são somados é irrelevante. O deslocamento angular não passa neste teste.

A Fig. 10-7 mostra um exemplo. Um livro inicialmente na horizontal sofre duas rotações de 90°, primeiro na ordem da Fig. 10-7*a* e depois na ordem da Fig. 10-7*b*. Embora os dois deslocamentos angulares sejam iguais nos dois casos, a ordem é diferente e o livro termina com orientações diferentes. Eis outro exemplo: deixe o braço direito pender ao longo do corpo, com a palma da mão voltada para a dentro. Sem girar o pulso, (1) levante o braço para a frente até que fique na horizontal, (2) mova o braço horizontalmente até que aponte para a direita e (3) deixe-o pender ao longo do corpo. A palma da mão ficará voltada para a frente. Se você repetir a manobra, mas inverter a ordem dos movimentos, qual será a orientação final da palma da mão? Esses exemplos mostram que a soma de dois deslocamentos angulares depende da ordem desses deslocamentos e, portanto, os deslocamentos angulares não podem ser vetores.

O resultado depende da ordem das rotações.

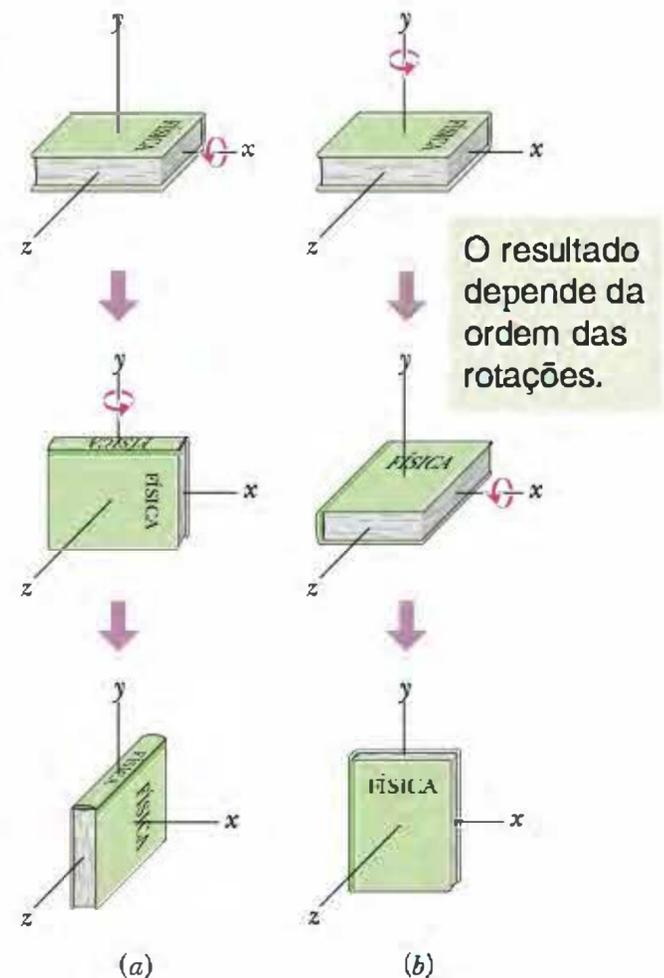



Figura 10-7 (*a*) A partir da posição inicial, no alto, o livro sofre duas rotações sucessivas de 90°, primeiro em torno do eixo x (horizontal) e depois em torno do eixo y (vertical). (*b*) O livro sofre as mesmas rotações, na ordem inversa.

10-4 Rotação com Aceleração Angular Constante

Nas translações puras, os movimentos com *aceleração linear constante* (como, por exemplo, o movimento de um corpo em queda livre) constituem um caso especial importante. Na Tabela 2-1, apresentamos uma série de equações que são válidas apenas para este tipo de movimento.

Nas rotações puras, o caso da *aceleração angular constante* também é importante e pode ser descrito usando um conjunto análogo de equações. Não vamos demonstrá-las, mas nos limitaremos a escrevê-las a partir das equações lineares correspondentes, substituindo as grandezas lineares pelas grandezas angulares equivalentes. O resultado aparece na Tabela 10-1, que mostra os dois conjuntos de equações (Eqs. 2-11 e 2-15 a 2-18; 10-12 a 10-16).

Como vimos, as Eqs. 2-11 e 2-15 são as equações básicas para o caso da aceleração linear constante; as outras equações da lista "Translações" podem ser deduzidas a partir dessas equações. Da mesma forma, as Eqs. 10-12 e 10-13 são as equações básicas para o caso da aceleração angular constante e as outras equações da lista "Rotações" podem ser deduzidas a partir dessas equações. Para resolver um problema simples envolvendo aceleração angular constante, quase sempre é possível usar uma das cinco equações da lista "Rotações". Escolha uma equação para a qual a única incógnita seja a variável pedida no problema. Um plano melhor é memorizar apenas as Eqs. 10-12 e 10-13 e resolvê-las como um sistema de equações sempre que necessário.

TESTE 2

Em quatro situações um corpo em rotação tem a posição angular $\theta(t)$ dada por (a) $\theta = 3t - 4$, (b) $\theta = -5t^3 + 4t^2 + 6$, (c) $\theta = 2/t^2 - 4/t$ e (d) $\theta = 5t^2 - 3$. A quais dessas situações as equações angulares da Tabela 10-1 se aplicam?

Tabela 10-1

Equações de Movimento para Aceleração Linear Constante e Aceleração Angular Constante

Número da Equação	Equação Linear	Variável Ausente		Equação Angular	Número da Equação
(2-11)	$v = v_0 + at$	$x - x_0$	$\theta - \theta_0$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	(10-12)
(2-15)	$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	v	ω	$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	(10-13)
(2-16)	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t	t	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$	(10-14)
(2-17)	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	a	α	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$	(10-15)
(2-18)	$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	v_0	ω_0	$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$	(10-16)

Exemplo

Pedra de amolar com aceleração angular constante

Uma pedra de amolar (Fig. 10-8) gira com aceleração angular constante $\alpha = 0{,}35\ \text{rad/s}^2$. No instante $t = 0$, a pedra tem uma velocidade angular $\omega_0 = -4{,}6$ rad/s e uma reta de referência traçada na pedra está na horizontal, na posição angular $\theta_0 = 0$.

(a) Em que instante após $t = 0$ a reta de referência está na posição angular $\theta = 5{,}0$ rev?

IDEIA-CHAVE

Como a aceleração angular é constante, podemos usar as equações para rotações da Tabela 10-1. Escolhemos a Eq. 10-13,

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2,$$

porque a única variável desconhecida é o tempo t.

Cálculos Substituindo valores conhecidos e fazendo $\theta_0 = 0$ e $\theta = 5{,}0\ \text{rev} = 10\pi\ \text{rad}$, obtemos

$$10\pi\ \text{rad} = (-4{,}6\ \text{rad/s})t + \tfrac{1}{2}(0{,}35\ \text{rad/s}^2)t^2.$$

(Convertemos 5,0 rev para 10π para manter a coerência entre as unidades.) Resolvendo esta equação do segundo grau em t, obtemos

$$t = 32\ \text{s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

A esta altura, notamos um fato aparentemente estranho. Inicialmente, a pedra estava girando no sentido negativo e partiu da orientação $\theta = 0$. Entretanto, acabamos de calcular que, 32 s depois, a orientação da pedra é positiva, $\theta = 5{,}0$ rev. O que aconteceu nesse intervalo para que a pedra assumisse uma orientação positiva?

(b) Descreva a rotação da pedra de amolar entre $t = 0$ e $t = 32$ s.

Descrição A pedra está inicialmente girando no sentido negativo (o sentido dos ponteiros do relógio) com velocidade angular $\omega_0 = -4{,}6$ rad, mas a aceleração angular α é positiva (o sentido contrário ao dos ponteiros do relógio). Esta oposição inicial entre os sinais da velocidade angular inicial e da aceleração angular significa que a roda gira cada vez mais devagar no sentido negativo, para momentaneamente e, em seguida, passa a girar no sentido positivo. Depois que reta de referência passa de volta pela posição inicial $\theta = 0$, a pedra de amolar dá mais 5 voltas completas até o instante $t = 32$ s.

Medimos as rotações usando a reta de referência.
Sentido anti-horário = positivo
Sentido horário = negativo

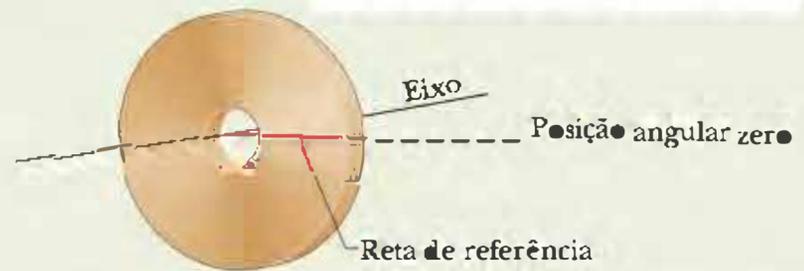



Figura 10-8 Uma pedra de amolar. No instante $t = 0$, a reta de referência (que imaginamos marcada na pedra) está na horizontal.

(c) Em que instante t a pedra de amolar para momentaneamente?

Cálculo Vamos consultar de novo a tabela de equações para aceleração angular constante. Mais uma vez, precisamos de uma equação que contenha apenas a incógnita t. Agora, porém, a equação deve conter também a variável ω, para que possamos igualá-la a 0 e calcular o valor correspondente de t. Assim, escolhemos a Eq. 10-12, que nos dá

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 - (-4{,}6 \text{ rad/s})}{0{,}35 \text{ rad/s}^2} = 13 \text{ s}. \quad \text{(Resposta)}$$

Exemplo

Rotor com aceleração angular constante

Você está operando um Rotor (um brinquedo de parque de diversões com um cilindro giratório vertical), percebe que um ocupante está ficando tonto e reduz a velocidade angular do cilindro de 3,40 rad/s para 2,00 rad/s em 20,0 rev, com aceleração angular constante.

(a) Qual é a aceleração angular constante durante esta redução da velocidade angular?

IDEIA-CHAVE

Como a aceleração angular do cilindro é constante, podemos relacioná-la à velocidade angular e ao deslocamento angular através das equações básicas da aceleração angular constante (Eqs. 10-12 e 10-13).

Cálculos A velocidade angular inicial é $\omega_0 = 3{,}40$ rad/s, o deslocamento angular é $\theta - \theta_0 = 20{,}0$ rev e a velocidade angular no final do deslocamento é $\omega = 2{,}00$ rad/s. Entretanto, não conhecemos a aceleração angular α e o tempo t, que aparecem nas duas equações básicas.

Para eliminar a variável t, usamos a Eq. 10-12 para escrever

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha},$$

que substituímos na Eq. 10-13 para obter

$$\theta - \theta_0 = \omega_0\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right) + \tfrac{1}{2}\alpha\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)^2.$$

Explicitando α, substituindo os valores conhecidos e convertendo 20 rev para 125,7 rad, obtemos

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2(\theta - \theta_0)} = \frac{(2{,}00 \text{ rad/s})^2 - (3{,}40 \text{ rad/s})^2}{2(125{,}7 \text{ rad})}$$
$$= -0{,}0301 \text{ rad/s}^2. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Em quanto tempo ocorre a redução de velocidade?

Cálculo Agora que conhecemos α, podemos usar a Eq. 10-12 para obter t:

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{2{,}00 \text{ rad/s} - 3{,}40 \text{ rad/s}}{-0{,}0301 \text{ rad/s}^2}$$
$$= 46{,}5 \text{ s}. \quad \text{(Resposta)}$$

10-5 Relações entre as Variáveis Lineares e Angulares

Na Seção 4-7, discutimos o movimento circular uniforme, no qual uma partícula se move com velocidade linear escalar v constante ao longo de uma circunferência. Quando um corpo rígido, como um carrossel, gira em torno de um eixo, cada partícula descreve uma circunferência em torno do eixo. Como o corpo é rígido, todas as partículas completam uma revolução no mesmo intervalo de tempo, ou seja, todas têm a mesma velocidade angular ω.

Por outro lado, quanto mais afastada do eixo está a partícula, maior é a circunferência que a partícula percorre e, portanto, maior é a velocidade linear escalar v. Você pode perceber isso em um carrossel. Você gira com a mesma velocidade angular ω independentemente da distância a que se encontra do centro, mas sua velocidade linear escalar v aumenta perceptivelmente quando você se afasta do centro do carrossel.

Frequentemente, precisamos relacionar as variáveis lineares s, v, e a de um ponto particular de um corpo em rotação às variáveis angulares θ, ω e α do corpo. Os dois conjuntos de variáveis estão relacionados através de r, a *distância perpendicular* do ponto ao eixo de rotação. Esta distância perpendicular é a distância entre o ponto e o eixo de rotação, medida sobre uma perpendicular ao eixo. É também o raio r da circunferência descrita pelo ponto em torno do eixo de rotação.

A Posição

Se uma reta de referência de um corpo rígido gira de um ângulo θ, um ponto do corpo a uma distância r do eixo de rotação descreve um arco de circunferência de comprimento s, onde s é dado pela Eq. 10-1:

$$s = \theta r \qquad \text{(ângulo em radianos).} \tag{10-17}$$

Esta é a primeira de nossas relações entre grandezas lineares e angulares. *Atenção:* o ângulo θ deve ser medido em radianos, já que a Eq. 10-17 é usada precisamente para definir o ângulo em radianos.

A Velocidade

Derivando a Equação 10-17 em relação ao tempo, com r constante, obtemos:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r.$$

Acontece que ds/dt é a velocidade linear escalar (o módulo da velocidade linear) do ponto considerado e $d\theta/dt$ é a velocidade angular ω do corpo em rotação. Assim,

$$v = \omega r \qquad \text{(ângulo em radianos).} \tag{10-18}$$

Atenção: a velocidade angular ω deve ser expressa em radianos por unidade de tempo.

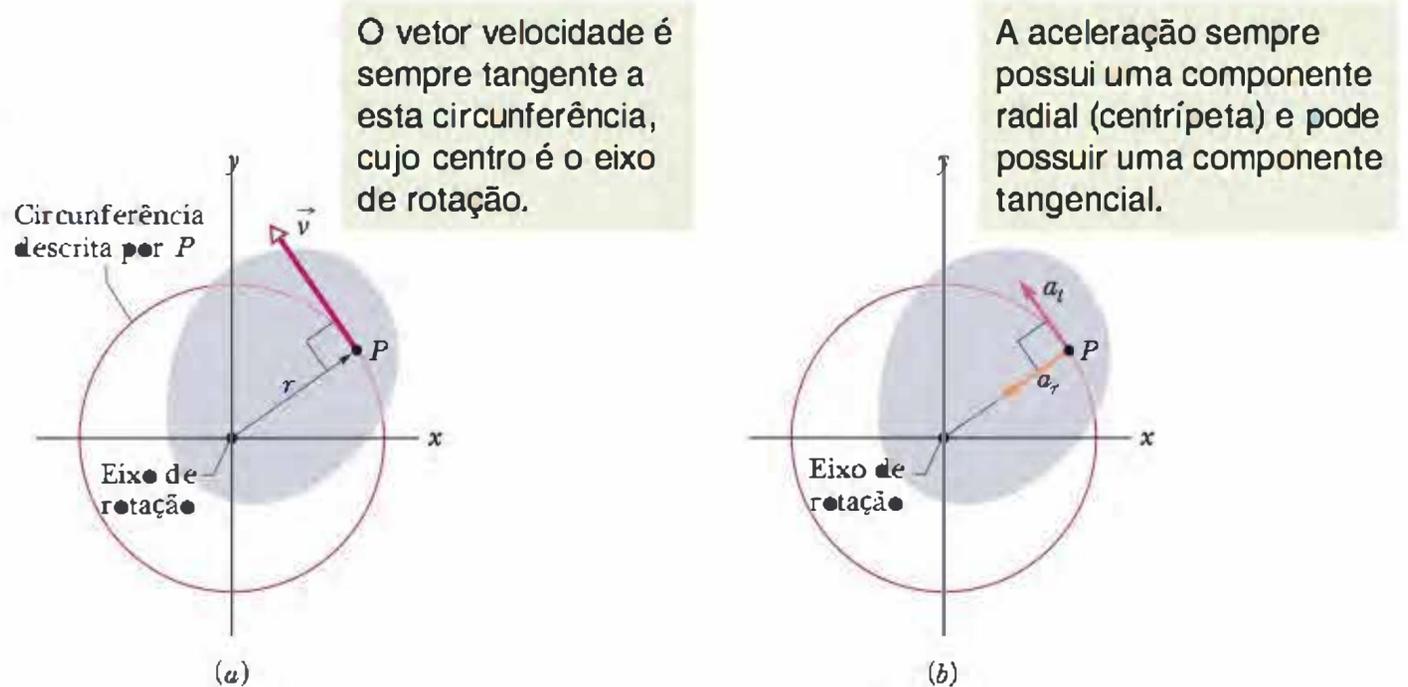
De acordo com a Eq. 10-18, como todos os pontos do corpo rígido têm a mesma velocidade angular ω, os pontos com valores maiores de r (ou seja, mais distantes do eixo de rotação) têm uma velocidade linear escalar v maior. A Fig. 10-9*a* serve para nos lembrar que a velocidade linear é sempre tangente à trajetória circular do ponto considerado.

Se a velocidade angular ω do corpo rígido é constante, a Eq. 10-18 nos diz que a velocidade linear v de qualquer ponto do corpo também é constante. Assim, todos os pontos do corpo estão em movimento circular uniforme. O período de revolução T do movimento de cada ponto e do corpo rígido como um todo é dado pela Eq. 4-35:

$$T = \frac{2\pi r}{v}. \tag{10-19}$$

Figura 10-9 Seção transversal do corpo rígido em rotação da Fig. 10-2, visto de cima. Cada ponto do corpo (como P) descreve uma circunferência em torno do eixo de rotação. (a) A velocidade linear $\vec{v}$ de cada ponto é tangente à circunferência na qual o ponto se move. (b) A aceleração linear $\vec{a}$ do ponto possui (em geral) duas componentes: a aceleração tangencial a_t e a aceleração radial a_r.

O vetor velocidade é sempre tangente a esta circunferência, cujo centro é o eixo de rotação.

A aceleração sempre possui uma componente radial (centrípeta) e pode possuir uma componente tangencial.

Esta equação nos diz que o tempo de uma revolução é igual à distância $2\pi r$ percorrida em uma revolução dividida pela velocidade escalar com a qual a distância é percorrida. Usando a Eq. 10-18 para v e cancelando r, obtemos relação

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{(ângulo em radianos).} \tag{10-20}$$

Esta equação equivalente nos diz que o tempo de uma revolução é igual ao ângulo 2π rad percorrido em uma revolução dividido pela velocidade angular escalar com a qual o ângulo é percorrido.

A Aceleração

Derivando a Eq. 10-18 em relação ao tempo, novamente com r constante, obtemos:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r. \tag{10-21}$$

Neste ponto, esbarramos em uma complicação. Na Eq. 10-21, dv/dt representa apenas a parte da aceleração linear responsável por variações do *módulo* v da velocidade linear $\vec{v}$. Assim como $\vec{v}$, essa parte da aceleração linear é tangente à trajetória do ponto considerado. Ela é chamada de ***componente tangencial*** a_t da aceleração linear do ponto e é dada por

$$a_t = \alpha r \quad \text{(ângulo em radianos),} \tag{10-22}$$

onde $\alpha = d\omega/dt$. *Atenção:* a aceleração angular α da Eq. 10-22 deve ser expressa em radianos por unidade de tempo ao quadrado.

Além disso, de acordo com a Eq. 4-34, uma partícula (ou ponto) que se move em uma trajetória circular tem uma *componente radial* da aceleração linear, $a_r = v^2/r$ (dirigida radialmente para dentro), que é responsável por variações da *direção* da velocidade linear $\vec{v}$. Substituindo o valor de v dado pela Eq. 10-18, podemos escrever esta componente como

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad \text{(ângulo em radianos).} \tag{10-23}$$

Assim, como mostra a Fig. 10-9b, a aceleração linear de um ponto que pertence a um corpo rígido em rotação possui, em geral, duas componentes. A componente radial a_r (dada pela Eq. 10-23) está presente sempre que a velocidade angular do corpo é diferente de zero (mesmo que não haja aceleração angular) e aponta para

o eixo de rotação. A componente tangencial a_t (dada pela Eq. 10-22) está presente apenas se a aceleração angular é diferente de zero e aponta na direção da tangente à trajetória do ponto.

TESTE 3

Uma barata está na borda de um carrossel em movimento. Se a velocidade angular do sistema (*carrossel* + *barata*) é constante, a barata possui (a) aceleração radial e (b) aceleração tangencial? Se ω está diminuindo, a barata possui (c) aceleração radial e (d) aceleração tangencial?

Exemplo

Variáveis lineares e angulares: movimento de uma montanha-russa

Apesar do extremo cuidado que os engenheiros tomam ao projetar uma montanha-russa, uns poucos infelizes entre os milhões de pessoas que todo ano andam de montanha-russa são acometidos de um mal conhecido como *dor de cabeça de montanha-russa*. Entre os sintomas, que podem levar vários dias para aparecer, estão vertigens e dores de cabeça, ambas suficientemente graves para exigirem tratamento médico.

Vamos investigar a causa provável projetando uma *montanha-russa de indução* (que pode ser acelerada por forças magnéticas mesmo em um trilho horizontal). Para provocar uma emoção inicial, queremos que os passageiros deixem o ponto de embarque com uma aceleração g ao longo da pista horizontal. Para aumentar a emoção, queremos também que a primeira parte dos trilhos forme um arco de circunferência (Fig. 10-10), de modo que os passageiros também experimentem uma aceleração centrípeta. Quando os passageiros aceleram ao longo do arco, o módulo da aceleração centrípeta aumenta de forma assustadora. Quando o módulo a da aceleração resultante atinge $4g$ em um ponto P de ângulo θ_P ao longo do arco, queremos que o passageiro passe a se mover em linha reta, ao longo de uma tangente ao arco.

(a) Que ângulo θ_P o arco deve subtender para que a seja igual a $4g$ no ponto P?

Figura 10-10 Vista superior de um trecho horizontal da pista de uma montanha-russa. A pista começa como um arco de circunferência no ponto de embarque e, a partir do ponto P, continua ao longo de uma tangente ao arco.

IDEIA-CHAVE

(1) Em qualquer instante, a aceleração resultante $\vec{a}$ do passageiro é a soma vetorial da aceleração tangencial $\vec{a}_t$ ao longo dos trilhos com a aceleração radial $\vec{a}_r$ na direção do centro de curvatura (como na Fig. 10-9*b*). (2) O valor de a_r em qualquer instante depende da velocidade angular instantânea ω, de acordo com a Eq. 10-23 ($a_r = \omega^2 r$, onde r é o raio do arco de circunferência). (3) A aceleração angular α ao longo do arco está relacionada à aceleração tangencial a_t ao longo dos trilhos através da Eq. 10-22 ($a_t = \alpha r$). (4) Como a_t e r são constantes, α também é constante e, portanto, podemos usar as equações para aceleração constante.

Cálculos Como estamos tentando determinar um valor da posição angular θ, vamos escolher, entre as equações para aceleração constante, a Eq. 10-14:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0). \qquad (10\text{-}24)$$

Para obter a aceleração angular α, usamos a Eq. 10-22:

$$\alpha = \frac{a_t}{r}. \qquad (10\text{-}25)$$

Fazendo $\omega_0 = 0$ e $\theta_0 = 0$, obtemos:

$$\omega^2 = \frac{2a_t\theta}{r}. \qquad (10\text{-}26)$$

Substituindo este resultado na equação

$$a_r = \omega^2 r \qquad (10\text{-}27)$$

obtemos uma relação entre a aceleração radial, a aceleração tangencial e a posição angular θ:

$$a_r = 2a_t\theta. \qquad (10\text{-}28)$$

Como $\vec{a}_t$ e $\vec{a}_r$ são vetores perpendiculares, o módulo da soma dos dois vetores é dado por

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}. \qquad (10\text{-}29)$$

Substituindo a_r por seu valor, dado pela Eq. 10-28, e explicitando θ, temos:

$$\theta = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{a_t^2} - 1}. \qquad (10\text{-}30)$$

Quando a atinge o valor desejado, $4g$, o ângulo θ é o ângulo θ_P cujo valor queremos calcular. Fazendo $a = 4g$, $\theta = \theta_P$ e $a_t = g$ na Eq. 10-30, obtemos

$$\theta_P = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(4g)^2}{g^2} - 1} = 1{,}94 \text{ rad} = 111°. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é o módulo a da aceleração experimentada pelo passageiro no ponto P e depois de passar pelo ponto P?

Raciocínio No ponto P, a tem o valor planejado de $4g$. Depois de passar por P, o passageiro se move em linha reta e a aceleração centrípeta deixa de existir. Assim, o passageiro tem apenas a aceleração de módulo g ao longo dos trilhos e, portanto,

$$a = 4g \text{ em } P \quad \text{e} \quad a = g \text{ depois de } P. \qquad \text{(Resposta)}$$

A dor de cabeça de montanha-russa acontece quando a cabeça de um passageiro sofre uma mudança brusca de aceleração, com altos valores de aceleração antes ou depois da mudança. A razão é que a mudança pode fazer com que o cérebro se mova em relação ao crânio, rompendo os vasos que ligam o crânio ao cérebro. O aumento gradual da aceleração de g para $4g$ entre o ponto inicial e o ponto P pode afetar alguns passageiros, mas é mais provável que a variação abrupta da aceleração de $4g$ para g quando o passageiro passa pelo ponto P provoque uma dor de cabeça de montanha-russa.

10-6 Energia Cinética de Rotação

Quando está girando, o disco de uma serra elétrica certamente possui uma energia cinética associada à rotação. Como expressar essa energia? Não podemos aplicar a fórmula convencional $K = \frac{1}{2}mv^2$ ao disco como um todo, pois isso nos daria apenas a energia cinética do centro de massa do disco, que é zero.

Em vez disso, vamos tratar o disco (e qualquer outro corpo rígido em rotação) como um conjunto de partículas com diferentes velocidades e somar a energia cinética dessas partículas para obter a energia cinética do corpo como um todo. Segundo este raciocínio, a energia cinética de um corpo em rotação é dada por

$$\begin{aligned} K &= \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 + \tfrac{1}{2}m_3v_3^2 + \cdots \\ &= \sum \tfrac{1}{2}m_iv_i^2, \end{aligned} \qquad (10\text{-}31)$$

onde m_i é a massa da partícula de ordem i e v_i é a velocidade da partícula. A soma se estende a todas as partículas do corpo.

O problema da Eq. 10-31 é que v_i não é igual para todas as partículas. Resolvemos este problema substituindo v pelo seu valor, dado pela Eq. 10-18 ($v = \omega r$):

$$K = \sum \tfrac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum m_ir_i^2\right)\omega^2, \qquad (10\text{-}32)$$

onde ω é igual para todas as partículas.

A grandeza entre parênteses no lado direito da Eq. 10-32 depende da forma como a massa do corpo está distribuída em relação ao eixo de rotação. Chamamos essa grandeza de **momento de inércia** do corpo em relação ao eixo de rotação. O momento de inércia, representado pela letra I, depende do corpo e do eixo em torno do qual está sendo executada a rotação. (O valor de I tem significado apenas quando se sabe em relação a que eixo o valor foi medido.)

Podemos agora escrever

$$I = \sum m_ir_i^2 \quad \text{(momento de inércia)} \qquad (10\text{-}33)$$

e substituir na Eq. 10-32, obtendo

$$K = \tfrac{1}{2} I\omega^2 \quad \text{(ângulo em radianos)} \qquad (10\text{-}34)$$

como a expressão que procuramos. Visto que usamos a relação $v = \omega r$ na dedução da Eq. 10-34, ω deve estar expressa em radianos por unidade de tempo. A unidade de I no SI é o quilograma-metro quadrado ($kg \cdot m^2$).

A Eq. 10-34, que permite calcular a energia cinética de um corpo rígido em rotação pura, é a equivalente angular da expressão $K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2$, usada para calcular a energia cinética de um corpo rígido em translação pura. As duas expressões envolvem um fator de $\frac{1}{2}$. Enquanto a massa M aparece em uma das equações, I (que envolve tanto a massa quanto a distribuição de massa) aparece na outra. Finalmente, cada equação contém como fator o quadrado de uma velocidade, de translação ou de rotação, conforme o caso. As energias cinéticas de translação e de rotação não são tipos diferentes de energia: ambas são energias cinéticas, expressas na forma apropriada ao movimento em questão.

Observamos anteriormente que o momento de inércia de um corpo em rotação não envolve apenas a massa do corpo, mas também a forma como a massa está distribuída. Aqui está um exemplo que você pode literalmente sentir. Faça girar uma barra comprida e relativamente pesada (um barra de ferro, por exemplo), primeiro em torno do eixo central (longitudinal) (Fig. 10-11a) e depois em torno de um eixo perpendicular à barra passando pelo centro (Fig. 10-11b). As duas rotações envolvem a mesma massa, mas é muito mais fácil executar a primeira rotação que a segunda. A razão é que as partículas que formam a barra estão muito mais próximas do eixo na primeira rotação. Em consequência, o momento de inércia da barra é muito menor na situação da Fig. 10-11a do que na da Fig. 10-11b. Quanto menor o momento de inércia, mais fácil é executar uma rotação.

É mais fácil fazer girar uma barra em torno deste eixo.

(a)

Eixo de rotação

É mais difícil fazer girar uma barra em torno deste eixo.

(b)

Figura 10-11 É mais fácil fazer girar uma barra comprida em torno (a) do eixo central (longitudinal) do que (b) de um eixo passando pelo centro e perpendicular à maior dimensão da barra. A razão para esta diferença é que a distribuição de massa está mais próxima do eixo de rotação em (a) do que em (b).

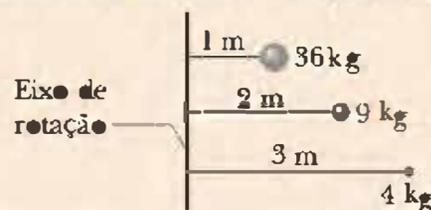
TESTE 4

A figura mostra três pequenas esferas que giram em torno de um eixo vertical. A distância perpendicular entre o eixo e o centro de cada esfera é dada. Ordene as três esferas de acordo com o momento de inércia em torno do eixo, começando pelo maior.

Eixo de rotação

1 m — 36 kg

2 m — 9 kg

3 m — 4 kg

10-7 Cálculo do Momento de Inércia

Se um corpo rígido contém um número pequeno de partículas, podemos calcular o momento de inércia em torno de um eixo de rotação usando a Eq. 10-33 ($I = \sum m_i r_i^2$), ou seja, podemos calcular o produto mr^2 para cada partícula e somar os produtos. (Lembre-se de que r é a distância perpendicular de uma partícula ao eixo de rotação.)

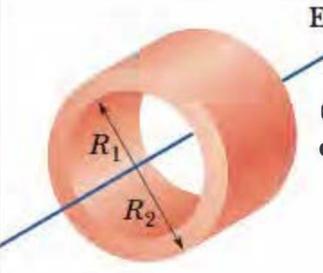
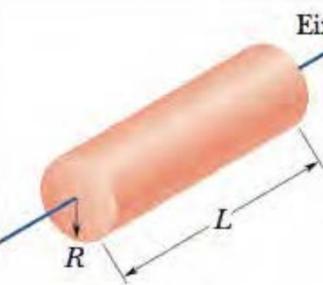
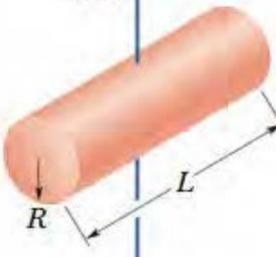
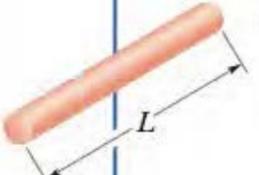
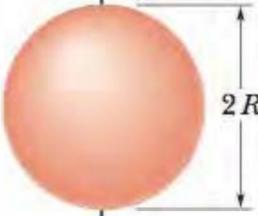
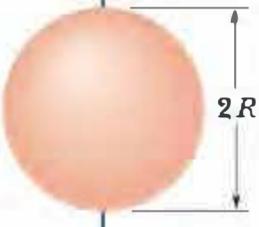
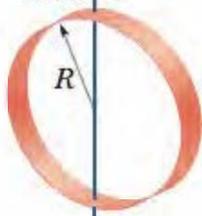
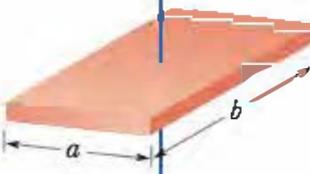
Quando um corpo rígido contém um número muito grande de partículas muito próximas umas das outras (é *contínuo*, como um disco de plástico), usar a Eq. 10-33 torna-se impraticável. Em vez disso, substituímos o somatório da Eq. 10-33 por uma integral e definimos o momento de inércia do corpo como

$$I = \int r^2\, dm \quad \text{(momento de inércia, corpo contínuo).} \qquad (10\text{-}35)$$

A Tabela 10-2 mostra o resultado dessa integração para nove formas geométricas comuns e para os eixos de rotação indicados.

Tabela 10-2

Alguns Momentos de Inércia

Eixo; Anel fino em torno de um eixo central; $I = MR^2$ (a)	Eixo; Cilindro oco (ou anel grosso) em torno de um eixo central; $I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$ (b)	Eixo; Cilindro (ou disco) maciço em torno do eixo central; $I = \frac{1}{2}MR^2$ (c)
Eixo; Cilindro (ou disco) maciço em torno de um diâmetro central; $I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$ (d)	Eixo; Barra fina em torno de um eixo central perpendicular à maior dimensão; $I = \frac{1}{12}ML^2$ (e)	Eixo; Esfera maciça em torno de um diâmetro; $I = \frac{2}{5}MR^2$ (f)
Eixo; Casca esférica fina em torno de um diâmetro; $I = \frac{2}{3}MR^2$ (g)	Eixo; Anel fino em torno de um diâmetro; $I = \frac{1}{2}MR^2$ (h)	Eixo; Placa fina em torno de um eixo perpendicular passando pelo centro; $I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$ (i)

Teorema dos Eixos Paralelos

Suponha que estamos interessados em determinar o momento de inércia I de um corpo de massa M em relação a um eixo dado. Em princípio, podemos calcular o valor de I usando a integral da Eq. 10-35. Contudo, o problema fica mais fácil se conhecemos o momento de inércia I_{CM} do corpo em relação a um eixo *paralelo* ao eixo desejado, passando pelo centro de massa. Seja h a distância perpendicular entre o eixo dado e o eixo que passa pelo centro de massa (lembre-se de que os dois eixos devem ser paralelos). Nesse caso, o momento de inércia I em relação ao eixo dado é

$$I = I_{CM} + Mh^2 \quad \text{(teorema dos eixos paralelos).} \tag{10-36}$$

A Eq. 10-36, conhecida como **teorema dos eixos paralelos,** é demonstrada a seguir.

Demonstração do Teorema dos Eixos Paralelos

Seja O o centro de massa de um corpo de forma arbitrária cuja seção reta aparece na Fig. 10-12. Posicione em O a origem do sistema de coordenadas. Considere um eixo passando por O e perpendicular ao plano do papel e outro eixo passando pelo ponto P e paralelo ao primeiro eixo. Suponha que as coordenadas x e y do ponto P sejam a e b, respectivamente.

Seja dm um elemento de massa de coordenadas genéricas x e y. De acordo com a Eq. 10-35, o momento de inércia do corpo em relação ao eixo que passa por P é dado por

Estamos interessados em relacionar o momento de inércia em relação ao eixo que passa por P ao eixo que passa pelo CM.

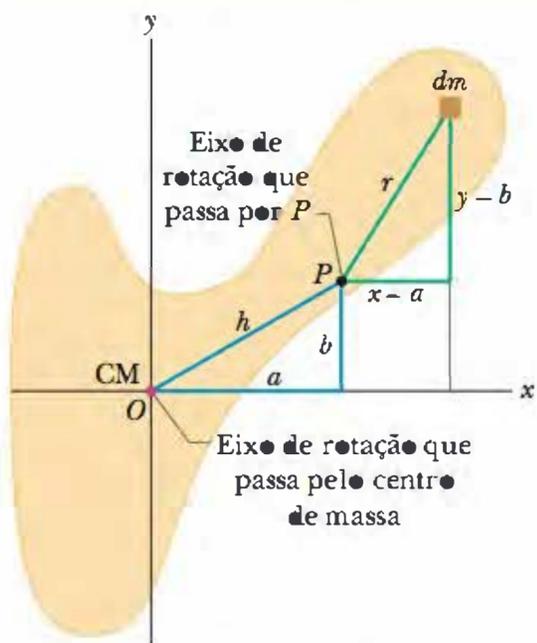



Figura 10-12 Seção transversal de um corpo rígido, com o centro de massa em O. O teorema dos eixos paralelos (Eq. 10-36) relaciona o momento de inércia do corpo em relação a um eixo passando por O ao momento de inércia em relação a um eixo paralelo ao primeiro passando por um ponto P situado a uma distância h do centro de massa. Os dois eixos são perpendiculares ao plano da figura.

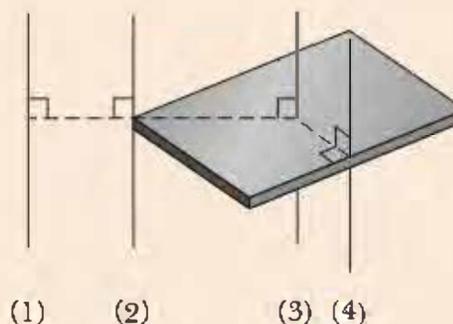
$$I = \int r^2\, dm = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2]\, dm,$$

que pode ser escrita na forma

$$I = \int (x^2 + y^2)\, dm - 2a \int x\, dm - 2b \int y\, dm + \int (a^2 + b^2)\, dm. \quad (10\text{-}37)$$

De acordo com a definição de centro de massa (Eq. 9-9), as duas integrais do meio da Eq. 10-37 são as coordenadas do centro de massa (multiplicadas por constantes) e, portanto, devem ser nulas. Como $x^2 + y^2 = R^2$, onde R é a distância de O a dm, a primeira integral é simplesmente I_{CM}, o momento de inércia do corpo em relação a um eixo passando pelo centro de massa. Observando a Fig. 10-12, vemos que o último termo da Eq. 10-37 é Mh^2, onde M é a massa total do corpo. Assim, a Eq. 10-37 se reduz à Eq. 10-36, que é a relação que queríamos demonstrar.

TESTE 5

A figura mostra um livro e quatro eixos de rotação, todos perpendiculares à capa do livro. Ordene os eixos de acordo com o momento de inércia do objeto em relação ao eixo, começando pelo maior.

Exemplo

Momento de inércia de um sistema de duas partículas

A Fig. 10-13a mostra um corpo rígido composto por duas partículas de massa m ligadas por uma barra de comprimento L e massa desprezível.

(a) Qual é o momento de inércia I_{CM} em relação a um eixo passando pelo centro de massa e perpendicular à barra, como mostra a figura?

IDEIA-CHAVE

Como temos apenas duas partículas com massa, podemos calcular o momento de inércia I_{CM} do corpo usando a Eq. 10-33.

Cálculos Para as duas partículas, ambas a uma distância perpendicular $L/2$ do eixo de rotação, temos:

$$I = \sum m_i r_i^2 = (m)(\tfrac{1}{2}L)^2 + (m)(\tfrac{1}{2}L)^2$$
$$= \tfrac{1}{2}mL^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é o momento de inércia I do corpo em relação a um eixo passando pela extremidade esquerda da barra e paralelo ao primeiro eixo (Fig. 10-13b)?

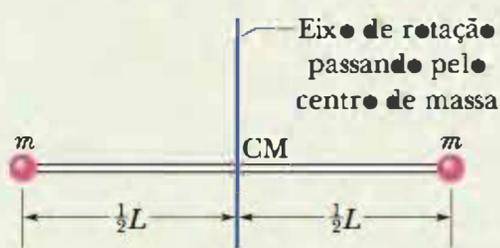
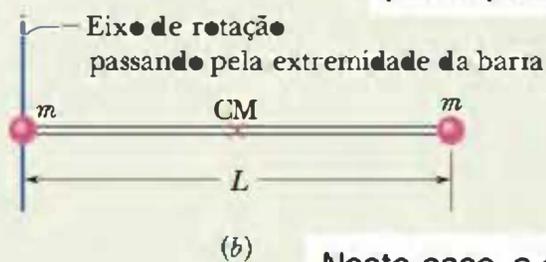



Figura 10-13 Um corpo rígido composto por duas partículas de massa m unidas por uma barra de massa desprezível.

IDEIA-CHAVE

Esta situação é tão simples que podemos determinar I usando duas técnicas. A primeira é semelhante à que foi usada no item (a). A outra, mais geral, consiste em aplicar o teorema dos eixos paralelos.

Primeira técnica Calculamos I como no item (a), exceto pelo fato de que, agora, a distância perpendicular r_i é zero para a partícula da esquerda e L para a partícula da direita. De acordo com a Eq. 10-33,

$$I = m(0)^2 + mL^2 = mL^2. \quad \text{(Resposta)}$$

Segunda técnica Como já conhecemos I_{CM}, o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa, e como o eixo especificado é paralelo a esse "eixo do CM", podemos usar o teorema dos eixos paralelos (Eq. 10-36). Temos:

$$I = I_{CM} + Mh^2 = \tfrac{1}{2}mL^2 + (2m)(\tfrac{1}{2}L)^2$$
$$= mL^2. \quad \text{(Resposta)}$$

Exemplo

Momento de inércia de uma barra homogênea, calculado por integração

A Fig. 10-14 mostra uma barra fina, homogênea, de massa M e comprimento L, e um eixo x ao longo da barra cuja origem coincide com o centro da barra.

(a) Qual é o momento de inércia da barra em relação a um eixo perpendicular à barra passando pelo centro?

IDEIAS-CHAVE

(1) Como a barra é homogênea, o centro de massa coincide com o centro geométrico. Assim, o momento de inércia pedido é I_{CM}. (2) Como a barra é um objeto contínuo, precisamos usar a integral da Eq. 10-35,

$$I = \int r^2\, dm, \quad (10\text{-}38)$$

para calcular o momento de inércia.

Cálculos Como queremos integrar em relação à coordenada x e não em relação à massa m, como na integral da Eq. 10-38, devemos relacionar a massa dm de um elemento da barra a um elemento de distância dx ao longo da barra. (Um desses elementos é mostrado na Fig. 10-14.) Como a barra é homogênea, a razão entre massa e comprimento é a mesma para todos os elementos e para a barra como um todo, de modo que podemos escrever

$$\frac{\text{elemento de massa } dm}{\text{elemento de distância } dx} = \frac{\text{massa da barra } M}{\text{comprimento da barra } L}$$

ou $$dm = \frac{M}{L}\,dx.$$

Podemos agora substituir dm por este valor e r por x na Eq. 10-38. Em seguida, integramos de uma extremidade a outra da barra (de $x = -L/2$ a $x = L/2$) para levar em conta todos os elementos. Temos:

$$I = \int_{x=-L/2}^{x=+L/2} x^2\left(\frac{M}{L}\right)dx$$
$$= \frac{M}{3L}\Big[x^3\Big]_{-L/2}^{+L/2} = \frac{M}{3L}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3\right]$$
$$= \tfrac{1}{12}ML^2. \quad \text{(Resposta)}$$

Este resultado está de acordo com o que aparece na Tabela 10-2*e*.

(b) Qual é o momento de inércia I da barra em relação a um novo eixo perpendicular à barra passando pela extremidade esquerda?

IDEIAS-CHAVE

Poderíamos calcular I mudando a origem do eixo x para a extremidade esquerda da barra e integrando de $x = 0$ a $x = L$. Entretanto, vamos usar uma técnica mais geral (e mais simples), que envolve o uso do teorema dos eixos paralelos (Eq. 10-36).

Cálculos Colocando o eixo na extremidade esquerda da barra e mantendo-o paralelo ao eixo que passa pelo centro de massa, podemos usar o teorema dos eixos paralelos (Eq. 10-36). De acordo com o item (a), $I_{CM} = ML^2/12$. Como mostra a Fig. 10-14, a distância perpendicular h entre o novo eixo de rotação e o centro de massa é $L/2$. Substituindo esses valores na Eq. 10-36, temos:

$$I = I_{CM} + Mh^2 = \tfrac{1}{12}ML^2 + (M)(\tfrac{1}{2}L)^2$$
$$= \tfrac{1}{3}ML^2. \quad \text{(Resposta)}$$

Na verdade, o mesmo resultado é obtido para qualquer eixo perpendicular à barra passando pela extremidade esquerda ou direita, seja ou não paralelo ao eixo da Fig. 10-14.

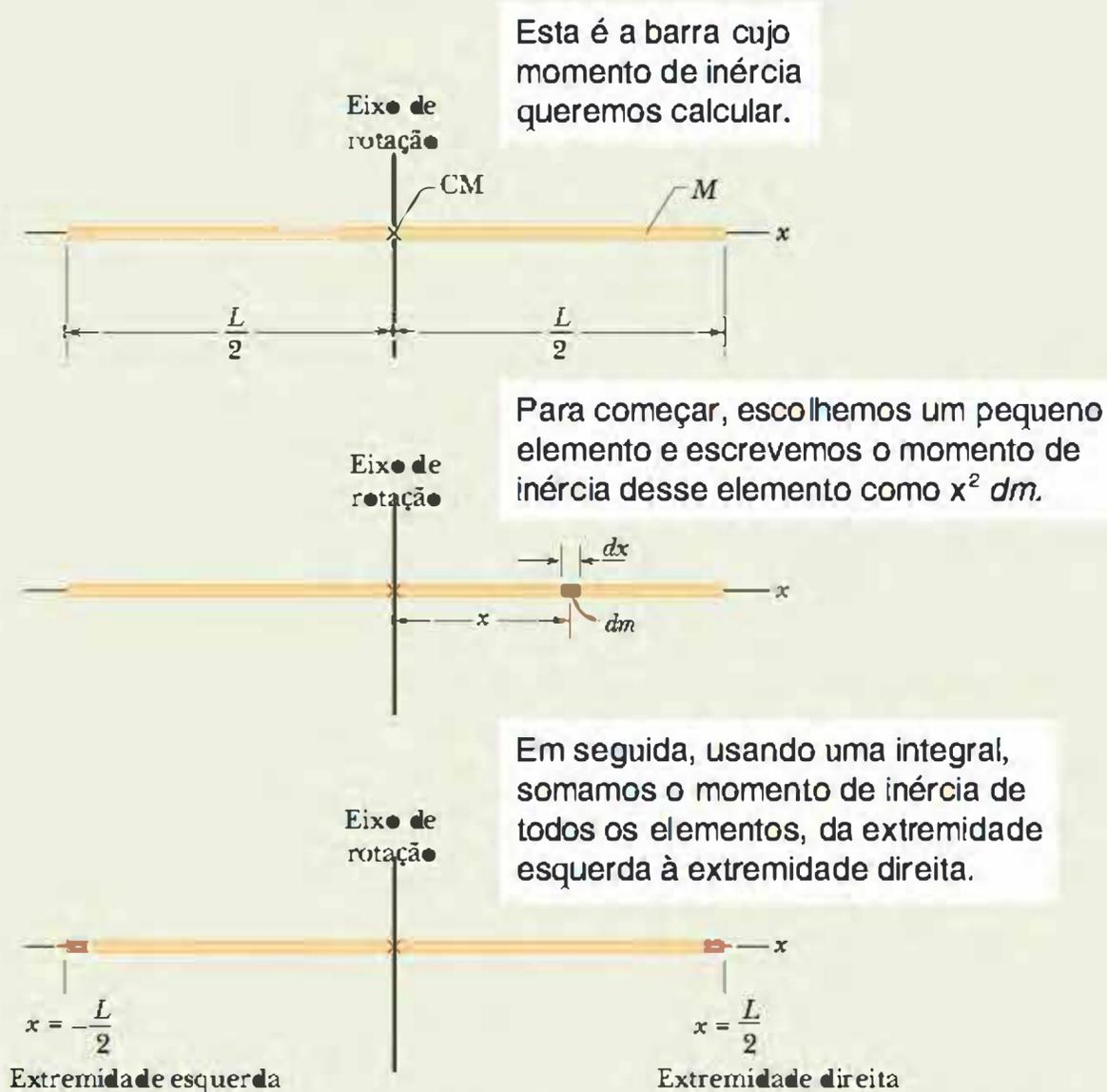



Figura 10-14 Uma barra homogênea de comprimento L e massa M. Um elemento de massa dm e comprimento dx está representado na figura.

Exemplo

Energia cinética de rotação: teste explosivo

As peças de máquinas que serão submetidas constantemente a rotações em alta velocidade costumam ser testadas em um *sistema de ensaio de rotação.* Nesse tipo de sistema, a peça é posta para girar rapidamente no interior de uma montagem cilíndrica de tijolos de chumbo com um revestimento de contenção, tudo isso dentro de uma câmara de aço fechada por uma tampa lacrada. Se a rotação faz a peça se estilhaçar, os tijolos de chumbo, sendo macios, capturam os fragmentos para serem posteriormente analisados.

Em 1985, a empresa Test Devices, Inc. (www.testdevices.com) estava testando um rotor de aço maciço, em forma de disco, com uma massa $M = 272$ kg e um raio $R = 38{,}0$ cm. Quando a peça atingiu uma velocidade angular ω de 14.000 rev/min, os engenheiros que realizavam o ensaio ouviram um ruído seco na câmara, que ficava um andar abaixo e a uma sala de distância. Na investigação, descobriram que tijolos de chumbo haviam sido lançados no corredor que levava à sala de testes, uma das portas da sala havia sido arremessada no estacionamento do lado de fora do prédio, um tijolo de chumbo havia atravessado a parede e invadido a cozinha de um vizinho, as vigas estruturais do edifício do teste tinham sido danificadas, o chão de concreto abaixo da câmara de ensaios havia afundado cerca de 0,5 cm e a tampa de 900 kg tinha sido lançada para cima, atravessara o teto e caíra de volta, destruindo o equipamento de ensaio (Fig. 10-15). Os fragmentos da explosão só não penetraram na sala dos engenheiros por pura sorte.

Qual foi a energia liberada na explosão do rotor?

IDEIA-CHAVE

A energia liberada foi igual à energia cinética de rotação K do rotor no momento em que a velocidade angular era 14.000 rev/min.

Figura 10-15 Parte da destruição causada pela explosão de um disco de aço em alta rotação. *(Cortesia de Test Devices. Inc)*

Cálculos Podemos calcular K usando a Eq. 10-34 ($K = \frac{1}{2}I\omega^2$), mas, para isso, precisamos conhecer o momento de inércia I. Como o rotor era um disco que girava como um carrossel, I é dado pela expressão apropriada da Tabela 10-2*c* ($I = \frac{1}{2}MR^2$). Assim, temos:

$$I = \tfrac{1}{2}MR^2 = \tfrac{1}{2}(272\ \text{kg})(0{,}38\ \text{m})^2 = 19{,}64\ \text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

A velocidade angular do rotor era

$$\omega = (14\,000\ \text{rev/min})(2\pi\ \text{rad/rev})\left(\frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}}\right)$$
$$= 1{,}466 \times 10^3\ \text{rad/s}.$$

Podemos usar a Eq. 10-34 para escrever

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(19{,}64\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(1{,}466 \times 10^3\ \text{rad/s})^2$$
$$= 2{,}1 \times 10^7\ \text{J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Os engenheiros realmente tiveram muita sorte.

10-8 Torque

A maçaneta de uma porta fica o mais longe possível das dobradiças por uma boa razão. É claro que, para abrir uma porta pesada, é preciso fazer uma certa força, mas isso não é tudo. O ponto de aplicação e a direção da força também são importantes. Se a força for aplicada mais perto das dobradiças que a maçaneta, ou com um ângulo diferente de 90° em relação ao plano da porta, será preciso usar uma força maior para abrir a porta que se a força for aplicada à maçaneta, perpendicularmente ao plano da porta.

A Fig. 10-16*a* mostra uma seção reta de um corpo que está livre para girar em torno de um eixo passando por O e perpendicular à seção reta. Uma força $\vec{F}$ é aplicada no ponto P, cuja posição em relação a O é definida por um vetor posição $\vec{r}$. O ângulo entre os vetores $\vec{F}$ e $\vec{r}$ é ϕ. (Para simplificar, consideramos apenas forças que não têm componentes paralelas ao eixo de rotação; isso significa que $\vec{F}$ está no plano do papel.)

Para determinar o modo como $\vec{F}$ provoca uma rotação do corpo em torno do eixo de rotação, podemos separar a força em duas componentes (Fig. 10-16*b*). Uma dessas componentes, a *componente radial* F_r, tem a direção de $\vec{r}$. Essa componente não provoca rotações, já que age ao longo de uma reta que passa por O. (Se você puxar ou empurrar uma porta paralelamente ao plano da porta, a porta não vai girar.) A outra componente de $\vec{F}$, a *componente tangencial* F_t, é perpendicular a $\vec{r}$ e tem módulo $F_t = F \text{ sen } \phi$. Essa componente *provoca* rotações. (Se você puxar ou empurrar uma porta perpendicularmente ao plano da porta, a porta vai girar.)

A capacidade de $\vec{F}$ fazer um corpo girar não depende apenas do módulo da componente tangencial F_t, mas também da distância entre o ponto de aplicação de $\vec{F}$ e o ponto O. Para levar em conta os dois fatores, definimos uma grandeza chamada de **torque** (τ) como o produto de ambos:

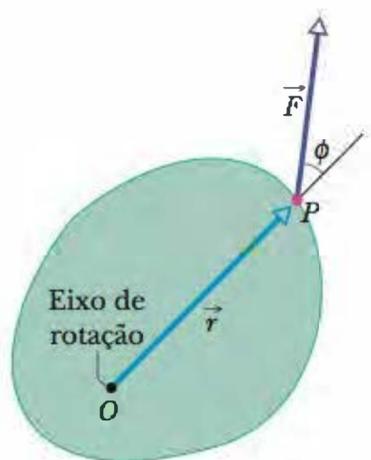
$$\tau = (r)(F \text{ sen } \phi). \qquad (10\text{-}39)$$

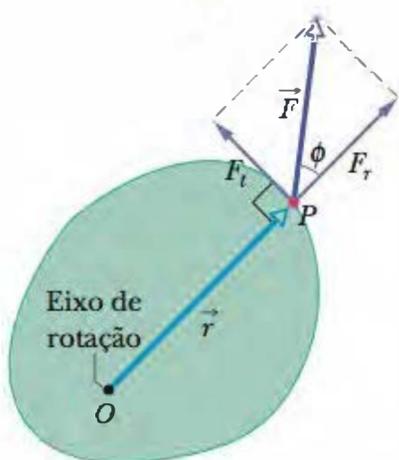
Duas formas equivalentes de calcular o torque são

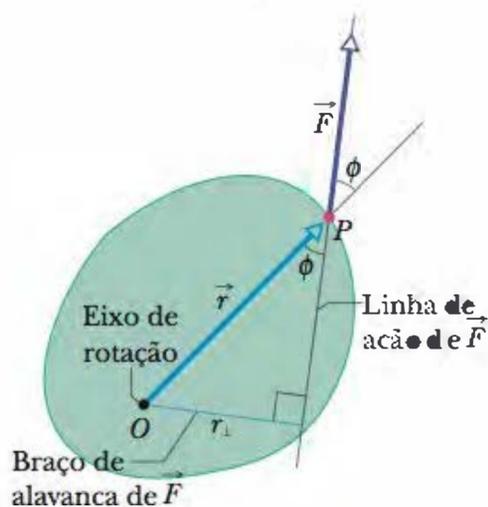
$$\tau = (r)(F \text{ sen } \phi) = rF_t \qquad (10\text{-}40)$$

e

$$\tau = (r \text{ sen } \phi)(F) = r_\perp F, \qquad (10\text{-}41)$$

onde $r_\perp$ é a distância perpendicular entre o eixo de rotação que passa por O e uma reta que coincide com a direção do vetor $\vec{F}$ (Fig. 10-16*c*). Essa reta é chamada de

O torque produzido por esta força faz o corpo girar em torno deste eixo, que é perpendicular ao plano do papel.

(a)

Na verdade, apenas a componente *tangencial* da força produz a rotação.

(b)

Também podemos calcular o torque usando o módulo da força total e o comprimento do braço de alavanca.

(c)

Figura 10-16 (a) Uma força $\vec{F}$ age sobre um corpo rígido com um eixo de rotação perpendicular ao plano do papel. O torque pode ser calculado a partir (a) do ângulo ϕ, (b) da componente tangencial da força, F_t, ou (c) do braço de alavanca, $r_\perp$.

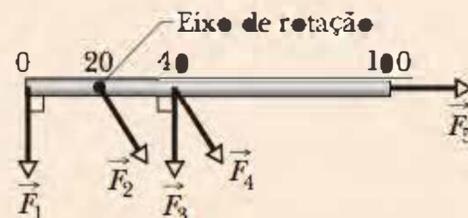
linha de ação de $\vec{F}$ e $r_\perp$ é o **braço de alavanca** de $\vec{F}$. A Fig. 10-16*b* mostra que podemos descrever r, o módulo de $\vec{r}$, como o braço de alavanca de F_t, a componente tangencial de F_r.

O torque, cujo nome vem de uma palavra em latim que significa "torcer", pode ser descrito coloquialmente como a ação de girar ou torcer de uma força $\vec{F}$. Quando aplicamos uma força a um objeto com uma chave de fenda ou uma chave de grifa com o objetivo de fazer o objeto girar, estamos aplicando um torque. A unidade de torque do SI é o newton-metro (N · m). *Atenção:* no SI, o trabalho também tem dimensões de newton-metro. Torque e trabalho, contudo, são grandezas muito diferentes, que não devem ser confundidas. O trabalho é normalmente expresso em joules (1 J = 1 N · m), mas isso nunca acontece com o torque.

No próximo capítulo discutiremos o torque em geral como uma grandeza vetorial. No momento, porém, como vamos considerar apenas rotações em torno de um único eixo, não precisamos usar a notação vetorial. Em vez disso, atribuímos ao torque ou um valor positivo ou negativo, dependendo do sentido da rotação que imprimiria a um corpo a partir do repouso. Se o corpo gira no sentido anti-horário, o torque é positivo. Se o corpo gira no sentido horário, o torque é negativo. (A frase "os relógios são negativos" da Seção 10-2 continua válida.)

O torque obedece ao princípio de superposição que discutimos no Capítulo 5 para o caso das forças: quando vários torques atuam sobre um corpo, o **torque total** (ou **torque resultante**) é a soma dos torques. O símbolo de torque resultante é τ_{res}.

TESTE 6

A figura mostra uma vista superior de uma régua de um metro que pode girar em torno de um eixo situado na posição 20 (20 cm). As cinco forças aplicadas à régua são horizontais e têm o mesmo módulo. Ordene as forças de acordo com o módulo do torque que produzem, do maior para o menor.

10-9 A Segunda Lei de Newton para Rotações

Um torque pode fazer um corpo rígido girar, como acontece, por exemplo, quando abrimos ou fechamos uma porta. No momento, estamos interessados em relacionar o torque resultante τ_{res} aplicado a um corpo rígido à aceleração angular α produzida pelo torque. Fazemos isso por analogia com a segunda lei de Newton ($F_{res} = ma$) para a aceleração a de um corpo de massa m produzida por uma força resultante F_{res} ao longo de um eixo. Substituímos F_{res} por τ_{res}, m por I e a por α, o que nos dá

$$\tau_{res} = I\alpha \quad \text{(segunda lei de Newton para rotações).} \tag{10-42}$$

Demonstração da Equação 10-42

Vamos demonstrar a Eq. 10-42 considerando a situação simples da Fig. 10-17, na qual o corpo rígido é constituído por uma partícula de massa m na extremidade de uma barra de massa desprezível de comprimento r. A barra pode se mover apenas girando em torno de um eixo, perpendicular ao plano do papel, que passa pela outra extremidade da barra. Assim, a partícula pode se mover apenas em uma trajetória circular com o centro no eixo de rotação.

Uma força $\vec{F}$ age sobre a partícula. Como, porém, a partícula só pode se mover ao longo de uma trajetória circular, apenas a componente tangencial F_t da força (a

componente que é tangente à trajetória circular) pode acelerar a partícula ao longo da trajetória. Podemos relacionar F_t à aceleração tangencial a_t da partícula ao longo da trajetória através da segunda lei de Newton, escrevendo

$$F_t = ma_t.$$

De acordo com a Eq. 10-40, o torque que age sobre a partícula é dado por

$$\tau = F_t r = ma_t r.$$

De acordo com a Eq. 10-22 ($a_t = \alpha r$), temos:

$$\tau = m(\alpha r)r = (mr^2)\alpha. \qquad (10\text{-}43)$$

A grandeza entre parênteses do lado direito é o momento de inércia da partícula em relação ao eixo de rotação, (veja a Eq. 10-33, aplicada a uma única partícula). Assim, a Eq. 10-43 se reduz a

$$\tau = I\alpha \quad \text{(ângulo em radianos)}. \qquad (10\text{-}44)$$

onde I é o momento de inércia.

Se a partícula estiver submetida a várias forças, podemos generalizar a Eq. 10-44 escrevendo

$$\tau_{res} = I\alpha \quad \text{(ângulo em radianos)}. \qquad (10\text{-}45)$$

que é a equação que queríamos demonstrar. Podemos estender esta equação a qualquer corpo rígido girando em torno de um eixo fixo, uma vez que qualquer corpo pode ser considerado um conjunto de partículas.

O torque associado à componente tangencial da força produz uma aceleração angular em torno do eixo de rotação.

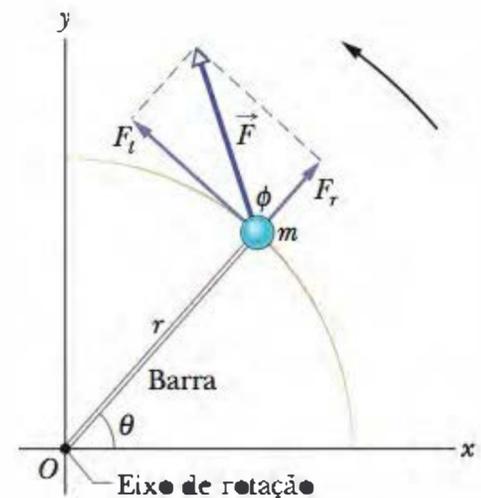
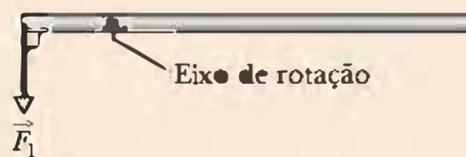



Figura 10-17 Um corpo rígido simples, livre para girar em torno de um eixo que passa por O, é formado por uma partícula de massa m presa na extremidade de uma barra de comprimento r e massa desprezível. A aplicação de uma força $\vec{F}$ faz o corpo girar.

TESTE 7

A figura mostra uma vista superior de uma régua de um metro que pode girar em torno do ponto indicado, que está à esquerda do ponto médio da régua. Duas forças horizontais, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, são aplicadas à régua. Apenas $\vec{F}_1$ é mostrada na figura. A força $\vec{F}_2$ é perpendicular à régua e é aplicada à extremidade direita. Para que a régua não se mova, (a) qual deve ser o sentido de $\vec{F}_2$ e (b) F_2 deve ser maior, menor ou igual a F_1?

Exemplo

Segunda lei de Newton, rotação, torque, disco

A Fig. 10-18a mostra um disco homogêneo, de massa M = 2,5 kg e raio R = 20 cm, montado em um eixo horizontal fixo. Um bloco de massa m = 1,2 kg está pendurado por uma corda de massa desprezível enrolada na borda do disco. Determine a aceleração do bloco em queda, a aceleração angular do disco e a tensão da corda. A corda não escorrega e não existe atrito no eixo.

IDEIAS-CHAVE

(1) Considerando o bloco como um sistema, podemos relacionar a aceleração a às forças que agem sobre o bloco através da segunda lei de Newton ($\vec{F}_{res} = m\vec{a}$). (2) Considerando o disco como um sistema, podemos relacionar a aceleração angular α ao torque que age sobre o disco através da segunda lei de Newton para rotações ($\tau_{res} = I\alpha$). (3) Para combinar os movimentos do bloco e do disco, usamos o fato de que a aceleração linear a do bloco e a aceleração linear (tangencial) a_t da borda do disco são iguais.

Forças que agem sobre o bloco Estas forças estão representadas no diagrama de corpo livre do bloco (Fig. 10-18b): a força da corda é $\vec{T}$ e a força gravitacional é $\vec{F}_g$, de módulo mg. Podemos escrever a segunda lei de Newton para as componentes ao longo de um eixo vertical y ($F_{res,y} = ma_y$) como

$$T - mg = ma. \qquad (10\text{-}46)$$

Entretanto, não podemos obter o valor de a usando apenas esta equação porque ela também contém a incógnita T.

Torque exercido sobre o disco Anteriormente, quando esgotávamos as possibilidades com o eixo y, passávamos para o eixo x. Aqui, passamos para a rotação do disco. Para calcular os torques e o momento de inércia I, usamos o fato de que o eixo de rotação é perpendicular ao disco e passa pelo centro do disco, o ponto O da Fig. 10-18c.

Nesse caso, os torques são dados pela Eq. 10-40 ($\tau = rF_t$). A força gravitacional e a força do eixo agem sobre o centro do disco e, portanto, a uma distância $r = 0$, de modo que o torque produzido por essas forças é nulo. A força $\vec{T}$ exercida pela corda sobre o disco age a uma distância $r = R$ do eixo e é tangente à borda do disco. Assim, a força produz um torque $-RT$, negativo porque o torque tende a fazer o disco girar no sentido horário. De acordo com a Tabela 10-2c, o momento de inércia I do disco é $MR^2/2$. Assim, podemos escrever a equação $\tau_{res} = I\alpha$ na forma

$$-RT = \tfrac{1}{2}MR^2\alpha. \qquad (10\text{-}47)$$

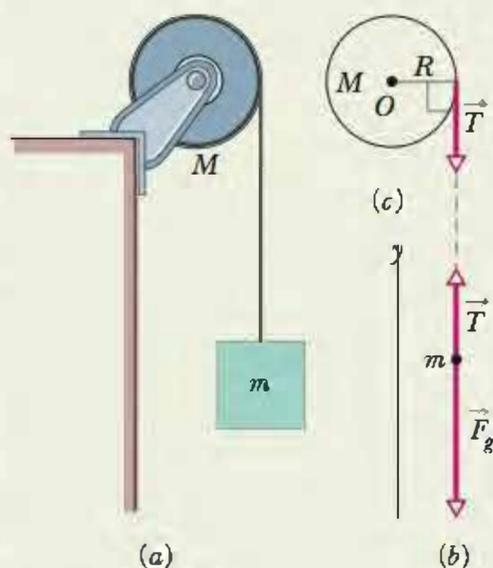
Esta equação pode parecer inútil porque tem duas incógnitas, α e T, nenhuma das quais é a incógnita a cujo valor queremos determinar. Entretanto, com a persistência que é a marca registrada dos físicos, conseguimos torná-la útil quando nos lembramos de um fato: como a corda não escorrega, a aceleração linear a do bloco e a aceleração linear (tangencial) a_t de um ponto na borda do disco são iguais. Nesse caso, de acordo com a Eq. 10-22 ($a_t = \alpha r$), vemos que $\alpha = a/R$. Substituindo este valor na Eq. 10-47, obtemos:

$$T = -\tfrac{1}{2}Ma. \qquad (10\text{-}48)$$

Combinação dos resultados Combinando as Eqs. 10-46 e 10-48, temos:

$$a = -g\frac{2m}{M + 2m} = -(9{,}8\ \text{m/s}^2)\frac{(2)(1{,}2\ \text{kg})}{2{,}5\ \text{kg} + (2)(1{,}2\ \text{kg})}$$

$$= -4{,}8\ \text{m/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

(a) (b) (c)

O torque associado à tensão da corda produz uma aceleração angular do disco.

Essa duas forças determinam a aceleração (linear) do bloco.

Precisamos relacionar as duas acelerações.

Figura 10-18 (a) O corpo em queda faz o disco girar. (b) Diagrama de corpo livre do bloco. (c) Diagrama de corpo livre incompleto do disco.

Podemos usar a Eq. 10-48 para calcular T:

$$T = -\tfrac{1}{2}Ma = -\tfrac{1}{2}(2{,}5\ \text{kg})(-4{,}8\ \text{m/s}^2)$$

$$= 6{,}0\ \text{N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Como era de se esperar, a aceleração a do bloco que cai é menor que g e a tensão T da corda (= 6,0 N) é menor que a força gravitacional que age sobre o bloco (= mg = 11,8 N). Vemos também que a e T dependem da massa do disco, mas não do raio. A título de verificação, notamos que as expressões obtidas se reduzem $a = -g$ e $T = 0$ no caso de um disco de massa desprezível ($M = 0$). Isto é razoável; nesse caso, o bloco simplesmente cai em queda livre. De acordo com a Eq. 10-22, a aceleração angular do disco é

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{-4{,}8\ \text{m/s}^2}{0{,}20\ \text{m}} = -24\ \text{rad/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

10-10 Trabalho e Energia Cinética de Rotação

Como foi visto no Capítulo 7, quando uma força F acelera um corpo rígido de massa m ao longo de um eixo de coordenadas, a força realiza um trabalho W sobre o corpo. Isso significa que a energia cinética do corpo ($K = \frac{1}{2}mv^2$) varia. Suponha que esta seja a única energia do corpo que muda. Nesse caso, podemos relacionar a variação ΔK da energia cinética ao trabalho W através do teorema do trabalho e energia cinética (Eq. 7-10), escrevendo

$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 = W \quad \text{(teorema do trabalho e energia cinética)}. \qquad (10\text{-}49)$$

Para um movimento restrito a um eixo x, podemos calcular o trabalho usando a Eq. 7-32,

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F\,dx \quad \text{(trabalho, movimento unidimensional)}. \qquad (10\text{-}50)$$

A Eq. 10-50 se reduz a $W = Fd$ quando F é constante e o deslocamento do corpo

é d. A taxa com a qual o trabalho é realizado é a potência, que pode ser calculada usando com as Eqs. 7-43 e 7-48,

$$P = \frac{dW}{dt} = Fv \quad \text{(potência, movimento unidimensional).} \tag{10-51}$$

Vamos considerar uma situação análoga para rotações. Quando um torque acelera um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo, o torque realiza um trabalho W sobre o corpo. Isso significa que a energia cinética rotacional do corpo ($K = \frac{1}{2}I\omega^2$) varia. Suponha que esta seja a única energia do corpo que muda. Nesse caso, podemos relacionar a variação ΔK da energia cinética ao trabalho W através do teorema do trabalho e energia cinética, mas agora a energia cinética é uma energia cinética rotacional:

$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 = W \quad \text{(teorema do trabalho e energia cinética).} \tag{10-52}$$

onde I é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo fixo e ω_i e ω_f são, respectivamente, a velocidade angular do corpo antes e depois que o trabalho é realizado.

Podemos calcular o trabalho executado em uma rotação usando uma equação análoga à Eq. 10-50,

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau \, d\theta \quad \text{(trabalho, rotação em torno de um eixo fixo).} \tag{10-53}$$

onde τ é o torque responsável pelo trabalho W e θ_i e θ_f são, respectivamente, a posição angular do corpo antes e depois da rotação. Quando τ é constante, a Eq. 10-53 se reduz a

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) \quad \text{(trabalho, torque constante).} \tag{10-54}$$

A taxa com a qual o trabalho é realizado é a potência, que pode ser calculada usando uma equação equivalente à Equação 10-51,

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\omega \quad \text{(potência, rotação em torno de um eixo).} \tag{10-55}$$

A Tabela 10-3 mostra as equações que descrevem a rotação de um corpo rígido em translação e as equações correspondentes para movimentos de rotação.

Demonstração das Equações 10-52 a 10-55

Vamos considerar novamente a situação da Fig. 10-17, na qual uma força $\vec{F}$ faz girar um corpo rígido composto por uma partícula de massa m presa à extremidade de uma barra de massa desprezível. Durante a rotação, a força $\vec{F}$ realiza trabalho sobre o corpo. Vamos supor que a única energia do corpo que varia é a energia cinética. Nesse caso, podemos aplicar o teorema do trabalho e energia cinética da Eq. 10-49:

$$\Delta K = K_f - K_i = W. \tag{10-56}$$

Usando a relação $K = \frac{1}{2}mv^2$ e a Eq. 10-18 ($v = \omega r$), podemos escrever a Eq. 10-56 na forma

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}mr^2\omega_i^2 = W. \tag{10-57}$$

De acordo com a Eq. 10-33, o momento de inércia do corpo é $I = mr^2$. Substituindo este valor na Eq. 10-57, obtemos

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 = W.$$

Tabela 10-3

Algumas Correspondências entre os Movimentos de Translação e Rotação

Translação Pura (Direção Fixa)		Rotação Pura (Eixo Fixo)	
Posição	x	Posição angular	θ
Velocidade	$v = dx/dt$	Velocidade angular	$\omega = d\theta/dt$
Aceleração	$a = dv/dt$	Aceleração angular	$\alpha = d\omega/dt$
Massa	m	Momento de inércia	I
Segunda lei de Newton	$F_{res} = ma$	Segunda lei de Newton	$\tau_{res} = I\alpha$
Trabalho	$W = \int F\,dx$	Trabalho	$W = \int \tau\,d\theta$
Energia cinética	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Energia cinética	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Potência (força constante)	$P = Fv$	Potência (torque constante)	$P = \tau\omega$
Teorema do trabalho e energia cinética	$W = \Delta K$	Teorema do trabalho e energia cinética	$W = \Delta K$

que é a Eq. 10-52. Demonstramos esta equação para um corpo rígido particular, mas a mesma equação é válida para qualquer corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo.

Vamos agora relacionar o trabalho W realizado sobre o corpo da Fig. 10-17 ao torque τ exercido sobre o corpo pela força $\vec{F}$. Quando a partícula se desloca de uma distância ds ao longo da trajetória circular, apenas a componente tangencial F_t da força acelera a partícula ao longo da trajetória. Assim, apenas F_t realiza trabalho sobre a partícula. Esse trabalho dW pode ser escrito como $F_t\,ds$. Entretanto, podemos substituir ds por $r\,d\theta$, onde $d\theta$ é o ângulo descrito pela partícula. Temos, portanto,

$$dW = F_t r\,d\theta. \tag{10-58}$$

De acordo com a Eq. 10-40, o produto $F_t r$ é igual ao torque τ, de modo que podemos escrever a Eq. 10-58 na forma

$$dW = \tau\,d\theta. \tag{10-59}$$

O trabalho realizado em um deslocamento angular finito de θ_i para θ_f é, portanto,

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\,d\theta,$$

que é a Eq. 10-53, válida para qualquer corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo. A Eq. 10-54 é uma consequência direta da Eq. 10-53.

Podemos calcular a potência P desenvolvida por um corpo em um movimento de rotação a partir da Eq. 10-59:

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} = \tau\omega,$$

que é a Eq. 10-55.

Exemplo

Trabalho, energia cinética de rotação, torque, disco

Suponha que o disco da Fig. 10-18 parte do repouso no instante $t = 0$, que a tensão da corda de massa desprezível é 6,0 N e que a aceleração angular do disco é -24 rad/s^2. Qual é a energia cinética de rotação K no instante $t = 2{,}5$ s?

IDEIA-CHAVE

Podemos calcular K usando a Eq. 10-34 ($K = \frac{1}{2}I\omega^2$). Já sabemos que $I = \frac{1}{2}MR^2$, mas ainda não conhecemos o valor de ω no instante $t = 2{,}5$ s. Entretanto, como a aceleração

angular α tem o valor constante de -24 rad/s², podemos aplicar as equações para aceleração angular constante na Tabela 10-1.

Cálculos Como estamos interessados em determinar ω e conhecemos α e ω_0 (= 0), usamos a Eq. 10-12:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \alpha t = \alpha t.$$

Fazendo $\omega = \alpha t$ e $I = \frac{1}{2}MR^2$ na Eq. 10-34, obtemos

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}MR^2)(\alpha t)^2 = \tfrac{1}{4}M(R\alpha t)^2$$
$$= \tfrac{1}{4}(2{,}5\ \text{kg})[(0{,}20\ \text{m})(-24\ \text{rad/s}^2)(2{,}5\ \text{s})]^2$$
$$= 90\ \text{J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

IDEIA-CHAVE

Também podemos obter esta resposta calculando a energia cinética do disco a partir do trabalho realizado sobre o disco.

Cálculos Primeiro, relacionamos a *variação* da energia cinética do disco ao trabalho total W realizado sobre o disco, usando o teorema do trabalho e energia cinética ($K_f - K_i = W$). Substituindo K_f por K e K_i por 0, obtemos

$$K = K_i + W = 0 + W = W. \qquad (10\text{-}60)$$

Em seguida, precisamos calcular o trabalho W. Podemos relacionar W aos torques que atuam sobre o disco usando a Eq. 10-53 ou a 10-54. O único torque que produz aceleração angular e realiza trabalho é o torque $\vec{T}$ que a corda exerce sobre o disco, que é igual a $-TR$. Como α é constante, o torque também é constante. Assim, podemos usar a Eq. 10-54 para escrever

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) = -TR(\theta_f - \theta_i). \qquad (10\text{-}61)$$

Como α é constante, podemos usar a Eq. 10-13 para calcular $\theta_f - \theta_i$. Com $\omega_i = 0$, temos:

$$\theta_f - \theta_i = \omega_i t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = \tfrac{1}{2}\alpha t^2.$$

Podemos substituir este valor na Eq. 10-61 e substituir o resultado na Eq. 10-60. Com $T = 6{,}0$ N e $\alpha = -24$ rad/s², temos:

$$K = W = -TR(\theta_f - \theta_i) = -TR(\tfrac{1}{2}\alpha t^2) = -\tfrac{1}{2}TR\alpha t^2$$
$$= -\tfrac{1}{2}(6{,}0\ \text{N})(0{,}20\ \text{m})(-24\ \text{rad/s}^2)(2{,}5\ \text{s})^2$$
$$= 90\ \text{J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

REVISÃO E RESUMO

Posição Angular Para descrever a rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo, chamado de **eixo de rotação**, supomos que uma **reta de referência** está fixa no corpo, perpendicular ao eixo e girando com o corpo. Medimos a **posição angular** θ desta reta em relação a uma direção fixa. Quando θ é medido em **radianos**,

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{(ângulo em radianos)}, \qquad (10\text{-}1)$$

onde s é o comprimento de um arco de circunferência de raio r e ângulo θ. A relação entre um ângulo em revoluções, um ângulo em graus e um ângulo em radianos é a seguinte:

$$1\ \text{rev} = 360° = 2\pi\ \text{rad}. \qquad (10\text{-}2)$$

Deslocamento Angular Um corpo que gira em torno de um eixo de rotação, mudando de posição angular de θ_1 para θ_2, sofre um **deslocamento angular**

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1, \qquad (10\text{-}4)$$

onde $\Delta\theta$ é positivo para rotações no sentido anti-horário e negativo para rotações no sentido horário.

Velocidade Angular Se um corpo sofre um deslocamento angular $\Delta\theta$ em um intervalo de tempo Δt, a **velocidade angular média** do corpo, $\omega_{méd}$, é

$$\omega_{méd} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \qquad (10\text{-}5)$$

A **velocidade angular (instantânea)** ω do corpo é

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}. \qquad (10\text{-}6)$$

Tanto $\omega_{méd}$ como ω são vetores, cuja orientação é dada pela **regra da mão direita** da Fig. 10-6. O módulo da velocidade angular do corpo é a **velocidade angular escalar**.

Aceleração Angular Se a velocidade angular de um corpo varia de ω_1 para ω_2 em um intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, a **aceleração angular média** $\alpha_{méd}$ do corpo é

$$\alpha_{méd} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \qquad (10\text{-}7)$$

A **aceleração angular (instantânea)** α do corpo é

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}. \qquad (10\text{-}8)$$

Tanto $\alpha_{méd}$ como α são vetores.

Equações Cinemáticas para Aceleração Angular Constante O movimento com *aceleração angular constante* (α = constante) é um caso especial importante de movimento de rotação. As equações cinemáticas apropriadas, que aparecem na Tabela 10-1, são

$$\omega = \omega_0 + \alpha t, \qquad (10\text{-}12)$$

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2, \qquad (10\text{-}13)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0), \qquad (10\text{-}14)$$

$$\theta - \theta_0 = \tfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t, \qquad (10\text{-}15)$$

$$\theta - \theta_0 = \omega t - \tfrac{1}{2}\alpha t^2. \qquad (10\text{-}16)$$

Relações entre Variáveis Lineares e Angulares Um ponto de um corpo rígido em rotação, a uma *distância perpendicular* r do eixo de rotação, descreve uma circunferência de raio r. Se o corpo gira de um ângulo θ, o ponto descreve um arco de círculo de comprimento s dado por

$$s = \theta r \quad \text{(ângulo em radianos)}, \qquad (10\text{-}17)$$

onde θ está em radianos.

A velocidade linear $\vec{v}$ do ponto é tangente à circunferência; a velocidade escalar linear v do ponto é dada por

$$v = \omega r \quad \text{(ângulo em radianos)}, \qquad (10\text{-}18)$$

onde ω é a velocidade angular escalar do corpo em radianos por segundo.

A aceleração linear $\vec{a}$ do ponto tem uma componente *tangencial* e uma componente *radial*. A componente tangencial é

$$a_t = \alpha r \quad \text{(ângulo em radianos)}, \qquad (10\text{-}22)$$

onde α é o módulo da aceleração angular do corpo em radianos por segundo ao quadrado. A componente radial de $\vec{a}$ é

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad \text{(ângulo em radianos)}. \qquad (10\text{-}23)$$

No caso do movimento circular uniforme, o período T do movimento do ponto e do corpo é

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{(ângulo em radianos)}. \qquad (10\text{-}19, 10\text{-}20)$$

Energia Cinética de Rotação e Momento de Inércia A energia cinética K de um corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo é dada por

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{(ângulo em radianos)}, \qquad (10\text{-}34)$$

onde I é o **momento de inércia** do corpo, definido por

$$I = \sum m_i r_i^2 \qquad (10\text{-}33)$$

para um sistema de partículas discretas e por

$$I = \int r^2\, dm \qquad (10\text{-}35)$$

para um corpo com uma distribuição contínua de massa. Nessas expressões, r_i e r representam a distância perpendicular do eixo de rotação a cada partícula ou elemento de massa e o somatório e a integração se estendem a todo o corpo, de modo a incluir todas as partículas ou elementos de massa.

Teorema dos Eixos Paralelos O *teorema dos eixos paralelos* relaciona o momento de inércia I de um corpo em relação a qualquer eixo ao momento de inércia do mesmo corpo em relação a um eixo paralelo ao primeiro passando pelo centro de massa:

$$I = I_{CM} + Mh^2. \qquad (10\text{-}36)$$

onde h é a distância perpendicular entre os dois eixos e I_{CM} é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo que passa pelo centro de massa. Podemos definir h como o deslocamento do eixo de rotação em relação ao eixo de rotação que passa pelo centro de massa.

Torque *Torque* é uma ação de girar ou de torcer um corpo em torno de um eixo de rotação, produzida por uma força $\vec{F}$. Se $\vec{F}$ é exercida em um ponto dado pelo vetor posição $\vec{r}$ em relação ao eixo, o módulo do torque é

$$\tau = rF_t = r_\perp F = rF \operatorname{sen} \phi, \qquad (10\text{-}40, 10\text{-}41, 10\text{-}39)$$

onde F_t é a componente de $\vec{F}$ perpendicular a $\vec{r}$ e ϕ é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$. A grandeza $r_\perp$ é a distância perpendicular entre o eixo de rotação e a reta que coincide com o vetor $\vec{F}$. Essa reta é chamada de **linha de ação** de $\vec{F}$ e $r_\perp$ é chamada de **braço de alavanca** de $\vec{F}$. Da mesma forma, r é o braço de alavanca de F_t.

A unidade de torque do SI é o newton-metro (N · m). O torque τ é positivo se tende a girar um corpo inicialmente em repouso no sentido anti-horário e negativo se tende a girar o corpo no sentido horário.

Segunda Lei de Newton para Rotações A segunda lei de Newton para rotações é

$$\tau_{res} = I\alpha, \qquad (10\text{-}45)$$

onde τ_{res} é o torque resultante que age sobre a partícula ou corpo rígido, I é o momento de inércia da partícula ou do corpo em relação ao eixo de rotação e α é a aceleração angular do movimento de rotação em torno do eixo.

Trabalho e Energia Cinética de Rotação As equações usadas para calcular trabalho e potência para movimentos de rotação são análogas às usadas para movimentos de translação:

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\, d\theta \qquad (10\text{-}53)$$

e

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\omega. \qquad (10\text{-}55)$$

Quando τ é constante, a Eq. 10-53 se reduz a

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i). \qquad (10\text{-}54)$$

A forma do teorema do trabalho e energia cinética usada para corpos em rotação é a seguinte:

$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 = W. \qquad (10\text{-}52)$$

PERGUNTAS

1 A Fig. 10-19 é um gráfico da velocidade angular em função do tempo para um disco que gira como um carrossel. Ordene os instantes a, b, c e d de acordo com o módulo (a) da aceleração tangencial e (b) da aceleração radial de um ponto na borda do disco, começando pelo maior.

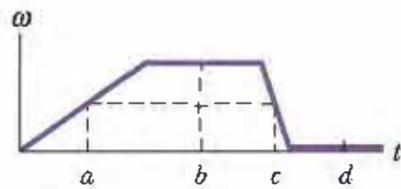



Figura 10-19 Pergunta 1.

2 A Fig. 10-20 mostra gráficos da posição angular θ em função do tempo t para três casos nos quais um disco gira como um carrossel. Em cada caso, o sentido de rotação muda em uma certa posição angular θ_m. (a) Para cada caso, determine se θ_m corresponde a uma rotação no sentido horário ou anti-horário em relação à posição $\theta = 0$ ou se $\theta = 0$. Para cada caso, determine (b) se ω é zero antes, depois ou no instante $t = 0$ e (c) se α é positiva, negativa ou nula.

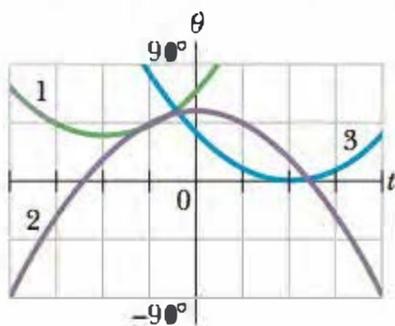



Figura 10-20 Pergunta 2.

3 Uma força é aplicada à borda de um disco que pode girar como um carrossel, fazendo mudar a velocidade angular do disco. As velocidades angulares inicial e final, respectivamente, para quatro situações, são as seguintes: (a) -2 rad/s, 5 rad/s; (b) 2 rad/s, 5 rad/s; (c) -2 rad/s, -5 rad/s; e (d) 2 rad/s, -5 rad/s. Ordene as situações de acordo com o trabalho realizado pelo torque aplicado pela força, começando pelo maior.

4 A Fig. 10-21b é um gráfico da posição angular do disco da Fig. 10-21a. A velocidade angular do disco é positiva, negativa ou nula em (a) $t = 1$ s, (b) $t = 2$ s, e (c) $t = 3$ s? (d) A aceleração angular é positiva ou negativa?

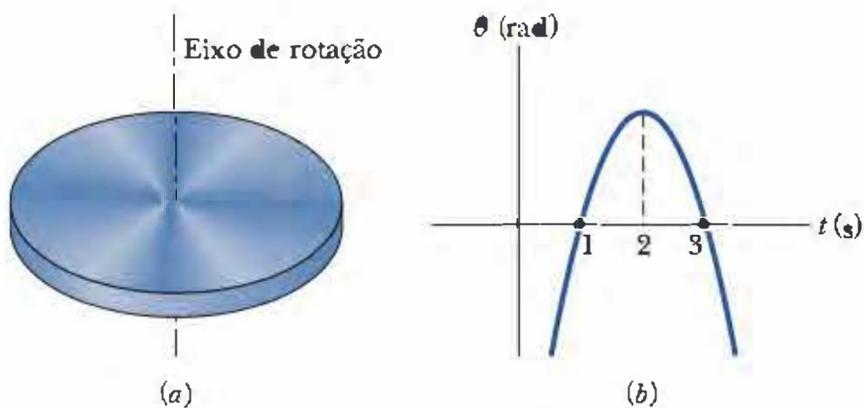



Figura 10-21 Pergunta 4.

5 Na Fig. 10-22, duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, agem sobre um disco que gira em torno do centro como um carrossel. As forças mantêm os ângulos indicados durante a rotação, que ocorre no sentido anti-horário e com velocidade angular constante. Precisamos diminuir o ângulo θ de $\vec{F}_1$ sem mudar o módulo de $\vec{F}_1$. (a) Para manter a velocidade angular constante, devemos aumentar, diminuir ou manter constante o módulo de $\vec{F}_2$? (b) A força $\vec{F}_1$ tende a girar o disco no sentido horário ou anti-horário? (c) E a força $\vec{F}_2$?

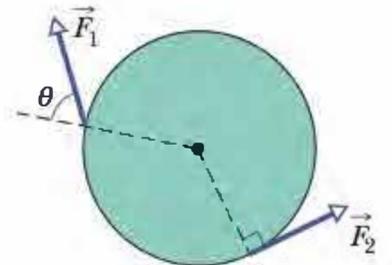



Figura 10-22 Pergunta 5.

6 Na vista superior da Fig. 10-23, cinco forças de mesmo módulo agem sobre um estranho carrossel: um quadrado que pode girar em torno do ponto P, o ponto médio de um dos lados. Ordene as forças de acordo com o torque que produzem em relação ao ponto P, começando pelo maior.

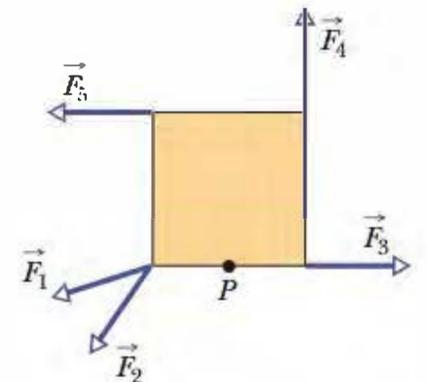



Figura 10-23 Pergunta 6.

7 A Fig. 10-24a é uma vista superior de uma barra horizontal que pode girar em torno de um eixo; duas forças horizontais atuam sobre a barra, que está parada. Se o ângulo entre a $\vec{F}_2$ e a barra é reduzido a partir de 90°, $\vec{F}_2$ deve aumentar, diminuir ou permanecer a mesma para que a barra continue parada?

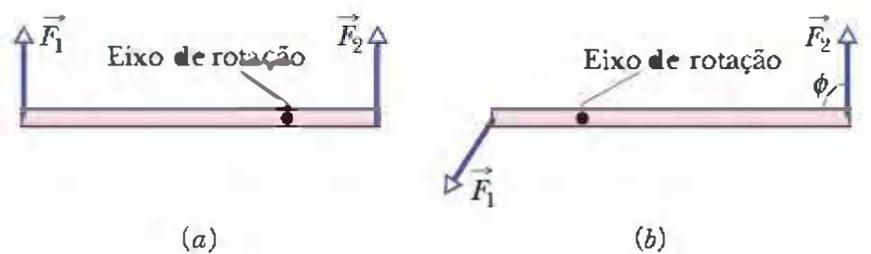



Figura 10-24 Perguntas 7 e 8.

8 A Fig. 10-24b mostra uma vista superior de uma barra horizontal que gira em torno de um eixo sob a ação de duas forças horizontais, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, com $\vec{F}_2$ fazendo um ângulo ϕ com a barra. Ordene os seguintes valores de ϕ de acordo com o módulo da aceleração angular da barra, começando pelo maior: 90°, 70° e 110°.

9 A Fig. 10-25 mostra uma placa metálica homogênea que era quadrada antes que 25% de sua área fossem cortados. Três pontos estão indicados por letras. Ordene-os de acordo com o valor do momento de inércia da placa em relação a um eixo perpendicular à placa passando por esses pontos, começando pelo maior.

Figura 10-25 Pergunta 9.

10 A Fig. 10-26 mostra três discos planos (de raios iguais) que podem girar em torno do centro como carrosséis. Cada disco é composto dos mesmos dois materiais, um mais denso que o outro (ou seja, com uma massa maior por unidade de volume). Nos discos 1 e 3, o material mais denso forma a metade externa da área do disco. No disco 2, ele forma a metade interna da área do disco. Forças de mesmo módulo são aplicadas tangencialmente aos discos, na borda ou na interface dos dois materiais, como na figura. Ordene os discos de acordo (a) com o torque em relação ao centro do disco, (b) o momento de inércia em relação ao centro e (c) a aceleração angular do disco, em ordem decrescente.

Mais denso — Disco 1; Menos denso — Disco 2; Mais denso — Disco 3

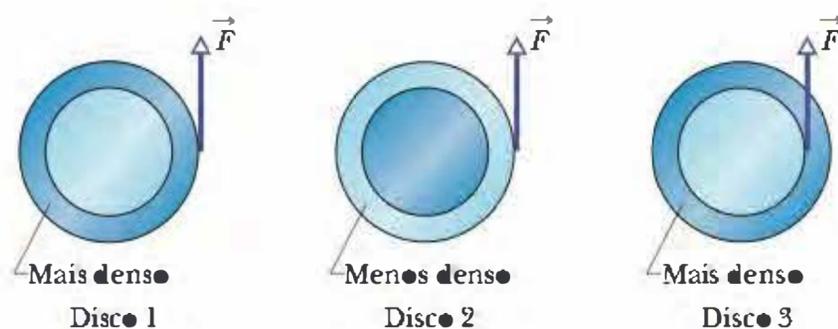



Figura 10-26 Pergunta 10.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física* de Jearl Walker, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

Seção 10-2 As Variáveis da Rotação

•1 Um bom lançador de beisebol pode arremessar uma bola a 85 mi/h com uma rotação de 1800 rev/min. Quantas revoluções a bola realiza até chegar à base principal? Para simplificar, suponha que a trajetória de 60 pés é percorrida em linha reta.

•2 Qual é a velocidade angular (a) do ponteiro dos segundos, (b) do ponteiro dos minutos e (c) do ponteiro das horas de um relógio analógico? Dê as respostas em radianos por segundo.

••3 Quando uma torrada com manteiga é deixada cair de uma mesa, adquire um movimento de rotação. Supondo que a distância da mesa ao chão é 76 cm e que a torrada não descreve uma revolução completa, determine (a) a menor e (b) a maior velocidade angular para a qual a torrada cai com a manteiga para baixo.

••4 A posição angular de um ponto de uma roda é dada por $\theta = 2{,}0 + 4{,}0t^2 + 2{,}0t^3$, onde θ está em radianos e t em segundos. Em $t = 0$, qual é (a) a posição e (b) a velocidade angular do ponto? (c) Qual é a velocidade angular em $t = 4{,}0$ s? (d) Calcule a aceleração angular em $t = 2{,}0$ s. (e) A aceleração angular da roda é constante?

••5 Um mergulhador realiza 2,5 giros ao saltar de uma plataforma de 10 metros. Supondo que a velocidade vertical inicial seja nula, determine a velocidade angular média do mergulhador.

••6 A posição angular de um ponto da borda de uma roda é dada por $\theta = 4{,}0t - 3{,}0t^2 + t^3$, onde θ está em radianos e t em segundos. Qual é a velocidade angular em (a) $t = 2{,}0$ s e (b) $t = 4{,}0$ s? (c) Qual é a aceleração angular média no intervalo de tempo que começa em $t = 2{,}0$ s e termina em $t = 4{,}0$ s? Qual é a aceleração angular instantânea (d) no início e (e) no fim deste intervalo?

•••7 A roda da Fig. 10-27 tem oito raios de 30 cm igualmente espaçados, está montada em um eixo fixo e gira a 2,5 rev/s. Você deseja atirar uma flecha de 20 cm de comprimento paralelamente ao eixo da roda sem atingir um dos raios. Suponha que a flecha e os raios são muito finos. (a) Qual é a menor velocidade que a flecha deve ter? (b) O ponto entre o eixo e a borda da roda por onde a flecha passa faz alguma diferença? Caso a resposta seja afirmativa, para que ponto você deve mirar?

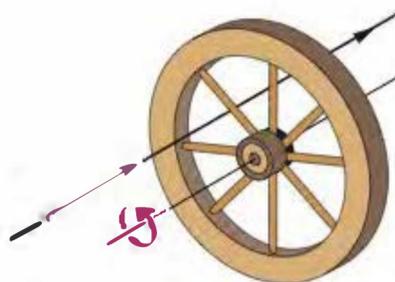



Figura 10-27 Problema 7.

•••8 A aceleração angular de uma roda é $\alpha = 6{,}0t^4 - 4{,}0t^2$, com α em radianos por segundo ao quadrado e t em segundos. No instante $t = 0$, a roda tem uma velocidade angular de +2,0 rad/s e uma posição angular de +1,0 rad. Escreva expressões (a) para a velocidade angular (em rad/s) e (b) para a posição angular (em rad) em função do tempo (em s).

Seção 10-4 Rotação com Aceleração Angular Constante

•9 Um tambor gira em torno do eixo central com uma velocidade angular de 12,60 rad/s. Se o tambor é freado a uma taxa constante de 4,20 rad/s², (a) quanto tempo leva para parar? (b) Qual é o ângulo total descrito pelo tambor até parar?

•10 Partindo do repouso, um disco gira em torno do eixo central com uma aceleração angular constante. O disco gira 25 rad em 5,0 s. Durante esse tempo, qual é o módulo (a) da aceleração angular e (b) da velocidade angular média? (c) Qual é a velocidade angular instantânea do disco ao final dos 5,0 s? (d) Com a aceleração angular mantida, que ângulo adicional o disco irá descrever nos 5,0 s seguintes?

•11 Um disco, inicialmente girando a 120 rad/s, é freado com uma aceleração angular constante de módulo 4,0 rad/s². (a) Quanto tempo o disco leva para parar? (b) Qual é o ângulo total descrito pelo disco durante esse tempo?

•12 A velocidade angular do motor de um automóvel é aumentada a uma taxa constante de 1200 rev/min para 3000 rev/min em 12 s. (a) Qual é a aceleração angular em revoluções por minuto ao quadrado? (b) Quantas revoluções o motor executa nesse intervalo de 12 s?

••13 Uma roda executa 40 revoluções quando desacelera a partir de uma velocidade angular de 1,5 rad/s até parar. (a) Supondo que a aceleração angular é constante, determine o tempo em que a roda leva para parar. (b) Qual é a aceleração angular da roda? (c) Quanto tempo é necessário para que a roda complete as 20 primeiras revoluções?

••14 Um disco gira em torno do eixo central partindo do repouso com aceleração angular constante. Em um certo instante, está girando a 10 rev/s; após 60 revoluções, a velocidade angular é 15 rev/s. Calcule (a) a aceleração angular, (b) o tempo necessário para completar 60 revoluções, (c) o tempo necessário para atingir a velocidade angular de 10 rev/s e (d) o número de revoluções desde o repouso até o instante em que o disco atinge uma velocidade angular de 10 rev/s.

••15 Uma roda tem uma aceleração angular constante de 3,0 rad/s². Durante um certo intervalo de 4,0 s, descreve um ângulo de 120 rad. Supondo que a roda partiu do repouso, por quanto tempo já estava em movimento no início deste intervalo de 4,0 s?

••**16** Um carrossel gira a partir do repouso com uma aceleração angular de 1,50 rad/s². Quanto tempo leva para executar (a) as primeiras 2,00 revoluções e (b) as 2,00 revoluções seguintes?

••**17** Em $t = 0$, uma roda tem uma velocidade angular de 4,7 rad/s, uma aceleração angular constante de $-0{,}25$ rad/s² e uma reta de referência em $\theta_0 = 0$. (a) Qual é o maior ângulo $\theta_{máx}$ descrito pela reta de referência no sentido positivo? Qual é (b) o primeiro e (c) o segundo instante no qual a reta de referência passa pelo ângulo $\theta = \theta_{máx}/2$? Em que (d) instante negativo e (e) instante positivo a reta de referência passa pelo ângulo $\theta = 10{,}5$ rad? (f) Faça um gráfico de θ em função de t e indique as respostas dos itens (a) a (e) no gráfico.

Seção 10-5 Relações entre as Variáveis Lineares e Angulares

•**18** Se a hélice de um avião gira a 2000 rev/min quando o avião voa com uma velocidade de 480 km/h em relação ao solo, qual é a velocidade escalar linear de um ponto na ponta da hélice, a 1,5 m de distância do eixo, em relação (a) ao piloto e (b) a um observador no solo? A velocidade do avião é paralela ao eixo de rotação da hélice.

•**19** Qual é o módulo (a) da velocidade angular, (b) da aceleração radial e (c) da aceleração tangencial de uma nave espacial que faz uma curva circular com 3220 km de raio a uma velocidade de 29.000 km/h?

•**20** Um objeto gira em torno de um eixo fixo e a posição angular de uma reta de referência sobre o objeto é dada por $\theta = 0{,}40e^{2t}$, onde θ está em radianos e t em segundos. Considere um ponto do objeto situado a 4,0 cm do eixo de rotação. Em $t = 0$, qual é o módulo (a) da componente tangencial e (b) da componente radial da aceleração do ponto?

•**21** Entre 1911 e 1990, o alto da torre inclinada de Pisa, Itália, se deslocou para o sul a uma taxa média de 1,2 mm/ano. A torre tem 55 m de altura. Qual é a velocidade angular média do alto da torre em relação à base em radianos por segundo?

•**22** Um astronauta está sendo testado em uma centrífuga. A centrífuga tem um raio de 10 m e, partindo do repouso, gira de acordo com a equação $\theta = 0{,}30t^2$, onde t está em segundos e θ em radianos. No instante $t = 5{,}0$ s, qual é o módulo (a) da velocidade angular, (b) da velocidade linear, (c) da aceleração tangencial e (d) da aceleração radial do astronauta?

•**23** Uma roda com um diâmetro de 1,20 m está girando com uma velocidade angular de 200 rev/min. (a) Qual é a velocidade angular da roda em rad/s? (b) Qual é a velocidade linear de um ponto na borda da roda? (c) Que aceleração angular constante (em revoluções por minuto ao quadrado) aumenta a velocidade angular da roda para 1000 rev/min em 60,0 s? (d) Quantas revoluções a roda executa nesses 60,0 s?

•**24** Um disco de vinil funciona girando em torno de um eixo, de modo que um sulco, aproximadamente circular, desliza sob uma agulha que fica na extremidade de um braço mecânico. Saliências do sulco passam pela agulha e a fazem oscilar. O equipamento converte essas oscilações em sinais elétricos, que são amplificados e transformados em sons. Suponha que um disco de vinil gira a $33\frac{1}{3}$ rev/min, que o sulco que está sendo tocado está a uma distância de 10,0 cm do centro do disco e que a distância média entre as saliências do sulco é 1,75 mm. A que taxa (em toques por segundo) as saliências atingem a agulha?

••**25** (a) Qual é a velocidade angular ω em torno do eixo polar de um ponto da superfície da Terra na latitude 40° N? (A Terra gira em torno desse eixo.) (b) Qual é a velocidade linear v desse ponto? Qual é o valor (c) de ω e (d) de v para um ponto no equador?

••**26** O volante de uma máquina a vapor gira com uma velocidade angular constante de 150 rev/min. Quando a máquina é desligada, o atrito dos mancais e a resistência do ar param a roda em 2,2 h. (a) Qual é a aceleração angular constante da roda, em revoluções por minuto ao quadrado, durante a desaceleração? (b) Quantas revoluções a roda executa antes de parar? (c) No instante em que a roda está girando a 75 rev/min, qual é a componente tangencial da aceleração linear de uma partícula da roda que está a 50 cm do eixo de rotação? (d) Qual é o módulo da aceleração linear total da partícula do item (c)?

••**27** O prato de um toca-discos está girando a $33\frac{1}{3}$ rev/min. Uma semente de melancia está sobre o prato a 6,0 cm de distância do eixo de rotação. (a) Calcule a aceleração da semente, supondo que ela não escorrega. (b) Qual é o valor mínimo do coeficiente de atrito estático entre a semente e o prato para que a semente não escorregue? (c) Suponha que o prato atinge a velocidade angular final em 0,25 s, partindo do repouso com aceleração constante. Calcule o menor coeficiente de atrito estático necessário para que a semente não escorregue durante o período de aceleração.

••**28** Na Fig. 10-28, uma roda A de raio $r_A = 10$ cm está acoplada por uma correia B a uma roda C de raio $r_C = 25$ cm. A velocidade angular da roda A é aumentada a partir do repouso a uma taxa constante de 1,6 rad/s². Determine o tempo necessário para que a roda C atinja uma velocidade angular de 100 rev/min, supondo que a correia não desliza. (*Sugestão:* se a correia não desliza, as velocidades lineares das bordas dos discos são iguais.)

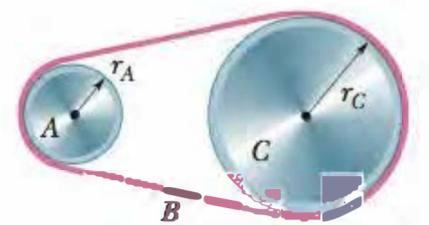



Figura 10-28 Problema 28.

••**29** Um método tradicional para medir a velocidade da luz utiliza uma roda dentada giratória. Um feixe de luz passa pelo espaço entre dois dentes situados na borda da roda, como na Fig. 10-29, viaja até um espelho distante e chega de volta à roda exatamente a tempo de passar pelo espaço seguinte entre dois dentes. Uma dessas rodas tem 5,0 cm de raio e 500 espaços entre dentes. Medidas realizadas quando o espelho está a uma distância $L = 500$ m da roda fornecem o valor de $3{,}0 \times 10^5$ km/s para a velocidade da luz. (a) Qual é a velocidade angular (constante) da roda? (b) Qual é a velocidade linear de um ponto da borda da roda?

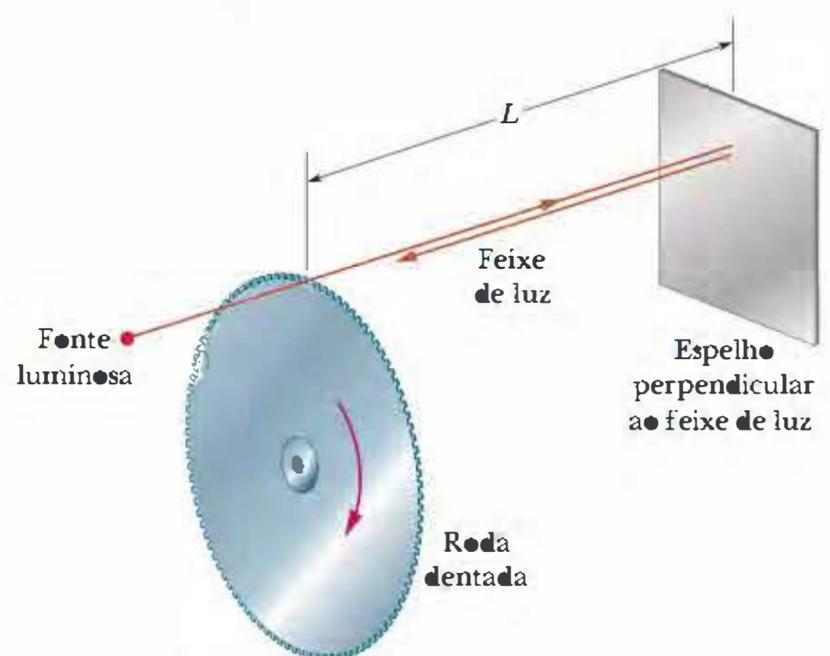



Figura 10-29 Problema 29.

••30 Uma roda de um giroscópio com 2,83 cm de raio é acelerada a partir do repouso a 14,2 rad/s² até atingir uma velocidade angular de 2760 rev/min. (a) Qual é a aceleração tangencial de um ponto da borda da roda durante o processo de aceleração angular? (b) Qual é a aceleração radial deste ponto quando a roda está girando na velocidade máxima? (c) Qual é a distância percorrida por um ponto da borda da roda durante o de aceleração angular?

••31 Um disco com 0,25 m de raio deve girar como um carrossel de um ângulo de 800 rad, partindo do repouso, ganhando velocidade angular a uma taxa constante α_1 nos primeiros 400 rad e, em seguida, perdendo velocidade angular a uma taxa constante $-\alpha_1$ até ficar novamente em repouso. O módulo da aceleração centrípeta de qualquer parte do disco não deve exceder 400 m/s². (a) Qual é o menor tempo necessário para a rotação? (b) Qual é o valor correspondente de α_1?

•••32 Um pulsar é uma estrela de nêutrons que gira rapidamente em torno de si mesma e emite um feixe de rádio, do mesmo modo como um farol emite um feixe luminoso. Recebemos na Terra um pulso de rádio para cada revolução da estrela. O período T de rotação de um pulsar é determinado medindo o intervalo de tempo entre os pulsos. O pulsar da nebulosa do Caranguejo tem um período de rotação $T = 0,033$ s que está aumentando a uma taxa de $1,26 \times 10^{-5}$ s/ano. (a) Qual é a aceleração angular α do pulsar? (b) Se α se mantiver constante, daqui a quantos anos o pulsar vai parar de girar? (c) O pulsar foi criado pela explosão de uma supernova observada no ano de 1054. Supondo que a aceleração α se manteve constante, determine o período T logo após a explosão.

Seção 10-6 Energia Cinética de Rotação

•33 Calcule o momento de inércia de uma roda que possui uma energia cinética de 24.400 J quando gira a 602 rev/min.

•34 A Fig. 10-30 mostra a velocidade angular em função do tempo para uma barra fina que gira em torno de uma das extremidades. A escala do eixo ω é definida por $\omega_s = 6,0$ rad/s. (a) Qual é o módulo da aceleração angular da barra? (b) Em $t = 4,0$ s, a barra tem uma energia cinética de 1,60 J. Qual é a energia cinética da barra em $t = 0$?

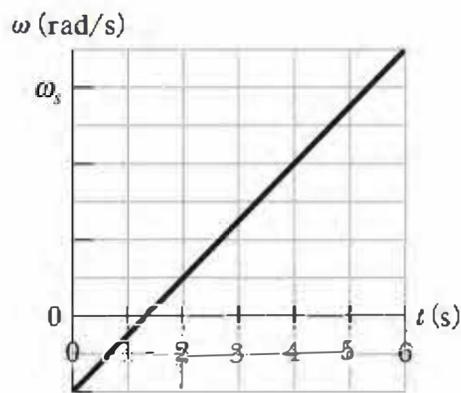



Figura 10-30 Problema 34.

Seção 10-7 Cálculo do Momento de Inércia

•35 Dois cilindros homogêneos, ambos girando em torno do respectivo eixo central (longitudinal) com uma velocidade angular de 235 rad/s, têm a mesma massa de 1,25 kg e raios diferentes. Qual é a energia cinética de rotação (a) do cilindro menor, de raio 0,25 m, e (b) do cilindro maior, de raio 0,75 m?

•36 A Fig. 10-31a mostra um disco que pode girar em torno de um eixo perpendicular à sua face a uma distância h do centro do disco. A Fig. 10-31b mostra o momento de inércia I do disco em relação ao eixo em função da distância h, do centro até a borda do disco. A escala do eixo I é definida por $I_A = 0,050$ kg · m² e $I_B = 0,150$ kg · m². Qual é a massa do disco?

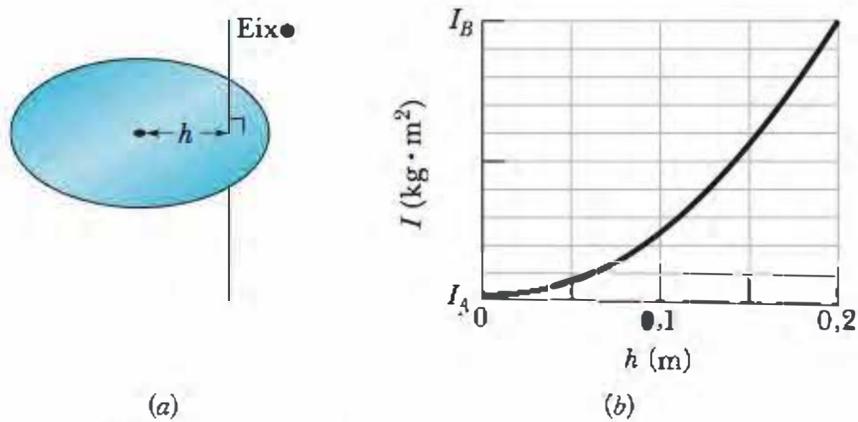



Figura 10-31 Problema 36.

•37 Calcule o momento de inércia de uma régua de um metro, com uma massa de 0,56 kg, em relação a um eixo perpendicular à régua na marca de 20 cm. (Trate a régua como uma barra fina.)

•38 A Fig. 10-32 mostra três partículas de 0,0100 kg que foram coladas em uma barra de comprimento $L = 6,00$ cm e massa desprezível. O conjunto pode girar em torno de um eixo perpendicular que passa pelo ponto O, situado na extremidade esquerda. Se removemos uma das partículas (ou seja, 33% da massa), de que porcentagem o momento de inércia do conjunto em relação ao eixo de rotação diminui se a partícula removida é (a) a mais próxima do ponto O e (b) a mais distante do ponto O?

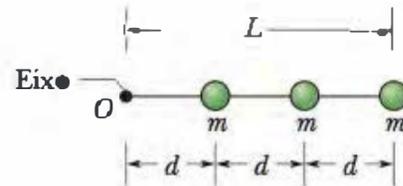



Figura 10-32 Problemas 38 e 62.

••39 Alguns caminhões utilizam a energia armazenada em um volante que um motor elétrico acelera até uma velocidade de 200π rad/s. Um desses volantes é um cilindro homogêneo com uma massa de 500 kg e um raio de 1,0 m. (a) Qual é a energia cinética do volante quando está girando com a velocidade máxima? (b) Se o caminhão desenvolve uma potência média de 8,0 kW, por quantos minutos pode operar sem que o volante seja novamente acelerado?

••40 A Fig. 10-33 mostra um arranjo de 15 discos iguais colados para formar uma barra de comprimento $L = 1,0000$ m e massa total $M = 100,0$ mg. O arranjo pode girar em torno de um eixo perpendicular que passa pelo disco central no ponto O. (a) Qual é o momento de inércia do conjunto em relação a esse eixo? (b) Se considerarmos o arranjo como uma barra aproximadamente homogênea de massa M e comprimento L, que erro percentual estaremos cometendo se usarmos a fórmula da Tabela 10-2e para calcular o momento de inércia?

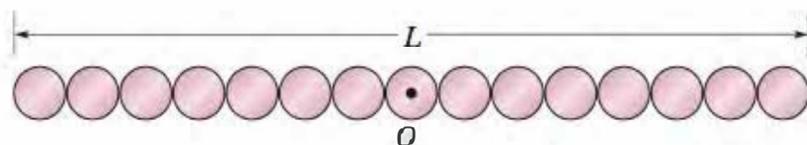



Figura 10-33 Problema 40.

••41 Na Fig. 10-34, duas partículas, ambas de massa $m = 0,85$ kg, estão ligadas uma à outra, e a um eixo de rotação no ponto O, por duas barras finas, ambas de comprimento $d = 5,6$ cm e massa $M = 1,2$ kg. O conjunto gira em torno do eixo de rotação com velocidade angular $\omega = 0,30$ rad/s. Determine (a) o momento de inércia do

conjunto em relação ao ponto O e (b) a energia cinética do conjunto.

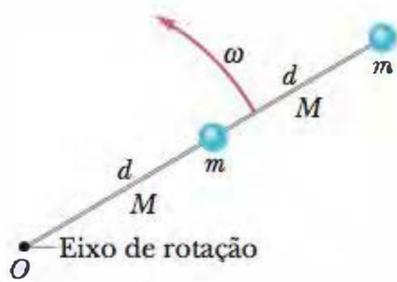



Figura 10-34 Problema 41.

••42 As massas e coordenadas de quatro partículas são as seguintes: 50 g, $x = 2{,}0$ cm, $y = 2{,}0$ cm; 25 g, $x = 0$, $y = 4{,}0$ cm; 25 g, $x = -3{,}0$ cm, $y = -3{,}0$ cm; 30 g, $x = -2{,}0$ cm, $y = 4{,}0$ cm. Qual é o momento de inércia do conjunto em relação ao eixo (a) x, (b) y e (c) z? (d) Suponha que as respostas de (a) e (b) sejam A e B, respectivamente. Nesse caso, qual é a resposta de (c) em termos de A e B?

••43 O bloco homogêneo da Fig. 10-35 tem massa 0,172 kg e lados $a = 3{,}5$ cm, $b = 8{,}4$ cm e $c = 1{,}4$ cm. Calcule o momento de inércia do bloco em relação a um eixo que passa por um canto e é perpendicular às faces maiores.

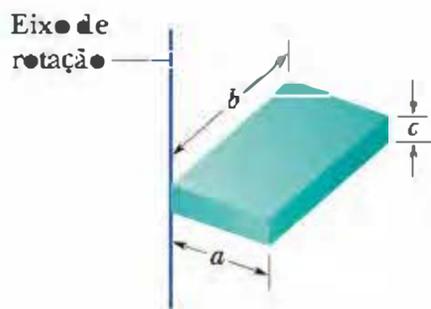



Figura 10-35 Problema 43.

••44 Quatro partículas iguais de massa 0,50 kg cada uma são colocadas nos vértices de um quadrado de 2,0 m × 2,0 m e mantidas nessa posição por quatro barras de massa desprezível, que formam os lados do quadrado. Qual é o momento de inércia desse corpo rígido em relação a um eixo que (a) está no plano do quadrado e passa pelos pontos médios de dois lados opostos, (b) passa pelo ponto médio de um dos lados e é perpendicular ao plano do quadrado e (c) está no plano do quadrado e passa por duas partículas diagonalmente opostas?

Seção 10-8 Torque

•45 O corpo da Fig. 10-36 pode girar em torno de um eixo perpendicular ao papel passando por O e está submetido a duas forças, como mostra a figura. Se $r_1 = 1{,}30$ m, $r_2 = 2{,}15$ m, $F_1 = 4{,}20$ N, $F_2 = 4{,}90$ N, $\theta_1 = 75{,}0°$ e $\theta_2 = 60{,}0°$, qual é o torque resultante em relação ao eixo?

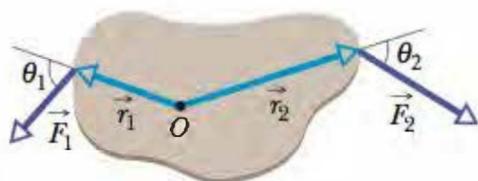



Figura 10-36 Problema 45.

•46 O corpo da Fig. 10-37 pode girar em torno de um eixo que passa por O e é perpendicular ao papel e está submetido a três forças: $F_A = 10$ N no ponto A, a 8,0 m de O; $F_B = 16$ N em B, a 4,0 m de O; e $F_C = 19$ N em C, a 3,0 m de O. Qual é o torque resultante em relação a O?

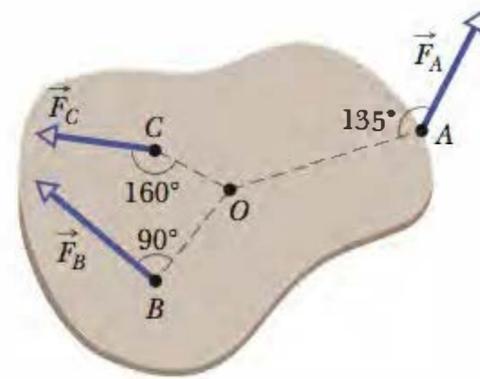



Figura 10-37 Problema 46.

•47 Uma pequena bola de massa 0,75 kg está presa a uma das extremidades de uma barra de 1,25 m de comprimento e massa desprezível. A outra extremidade da barra está pendurada em um eixo. Qual é o módulo do torque exercido pela força gravitacional em relação ao eixo quando o pêndulo assim formado faz um ângulo de 30° com a vertical?

•48 O comprimento do braço do pedal de uma bicicleta é 0,152 m e uma força de 111 N é aplicada ao pedal pelo ciclista. Qual é o módulo do torque em relação ao eixo do braço do pedal quando o braço faz um ângulo de (a) 30°, (b) 90° e (c) 180° com a vertical?

Seção 10-9 A Segunda Lei de Newton para Rotações

•49 No início de um salto de trampolim, a velocidade angular de uma mergulhadora em relação a um eixo que passa pelo centro de massa varia de zero a 6,20 rad/s em 220 ms. O momento de inércia em relação ao mesmo eixo é 12,0 kg · m². Quais são os módulos (a) da aceleração angular média da mergulhadora e (b) do torque externo médio exercido pelo trampolim sobre a mergulhadora no início do salto?

•50 Se um torque de 32,0 N · m exercido sobre uma roda produz uma aceleração angular de 25,0 rad/s², qual é o momento de inércia da roda?

••51 Na Fig. 10-38, o bloco 1 tem massa $m_1 = 460$ g, o bloco 2 tem massa $m_2 = 500$ g, e a polia, que está montada em um eixo horizontal com atrito desprezível, tem um raio $R = 5{,}00$ cm. Quando o sistema é liberado a partir do repouso, o bloco 2 cai 75,0 cm em 5,00 s sem que a corda deslize na borda da polia. (a) Qual é o módulo da aceleração dos blocos? Qual é o valor (b) da tensão T_2 e (c) da tensão T_1? (d) Qual é o módulo da aceleração angular da polia? (e) Qual é o momento de inércia da polia?

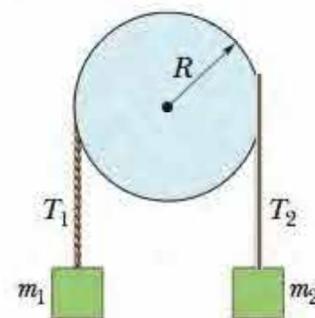



Figura 10-38 Problemas 51 e 83.

••52 Na Fig. 10-39, um cilindro com uma massa de 2,0 kg pode girar em torno do eixo central, que passa pelo ponto O. As forças mostradas têm os seguintes módulos: $F_1 = 6{,}0$ N, $F_2 = 4{,}0$ N, $F_3 = 2{,}0$ N e $F_4 = 5{,}0$ N. As distâncias radiais são $r = 5{,}0$ cm e $R = 12$ cm. Determine (a) o módulo e (b) a orientação da aceleração angular do cilindro. (Durante a rotação, as forças mantêm os mesmos ângulos em relação ao cilindro.)

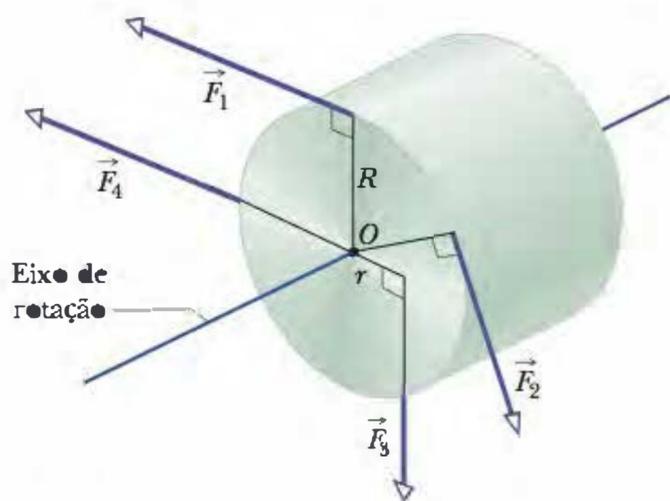



Figura 10-39 Problema 52.

••**53** A Fig. 10-40 mostra um disco homogêneo que pode girar em torno do centro como um carrossel. O disco tem um raio de 2,00 cm e uma massa de 20,0 gramas e está inicialmente em repouso. A partir do instante $t = 0$, duas forças devem ser aplicadas tangencialmente à borda do disco, como mostra a figura, para que, no instante $t = 1{,}25$ s, o disco tenha uma velocidade angular de 250 rad/s no sentido anti-horário. A força $\vec{F}_1$ tem um módulo de 0,100 N. Qual é o módulo de $\vec{F}_2$?

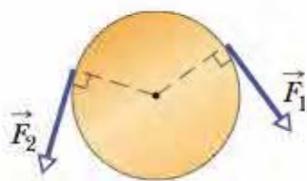



Figura 10-40 Problema 53.

••**54** Em uma rasteira do judô, você tira o apoio do pé esquerdo do adversário e, ao mesmo tempo, puxa seu quimono para o lado sem apoio. Em consequência, o lutador gira em torno do pé direito e cai no tatame. A Fig. 10-41 mostra um diagrama simplificado do lutador, já com o pé esquerdo fora do chão. O eixo de rotação passa pelo ponto O. A força gravitacional $\vec{F}_g$ age sobre o centro de massa do lutador, que está a uma distância horizontal $d = 28$ cm do ponto O. A massa do lutador é 70 kg e o momento de inércia em relação ao ponto O é 65 kg · m². Qual é o módulo da aceleração angular inicial do lutador em relação ao ponto O se o puxão $\vec{F}_a$ que você aplica ao quimono (a) é desprezível e (b) é horizontal, com um módulo de 300 N e aplicado a uma altura $h = 1{,}4$ m?

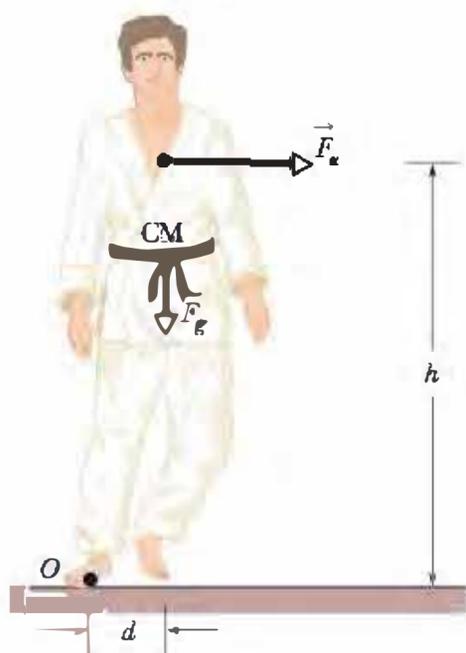



Figura 10-41 Problema 54.

••**55** Na Fig. 10-42*a*, uma placa de plástico de forma irregular, com espessura e massa específica (massa por unidade de volume) uniformes, gira em torno de um eixo perpendicular à face da placa passando pelo ponto O. O momento de inércia da placa em torno desse eixo é medido usando o seguinte método: um disco circular de massa 0,500 kg e raio 2,00 cm é colado na placa, com o centro coincidindo com O (Fig. 10-42*b*). Um barbante é enrolado na borda do disco como se o disco fosse um pião e puxado durante 5,00 s. Em consequência, o disco e a placa são submetidos a uma força constante de 0,400 N, aplicada pelo barbante tangencialmente à borda do disco. A velocidade angular resultante é 114 rad/s. Qual é o momento de inércia da placa em relação ao eixo?

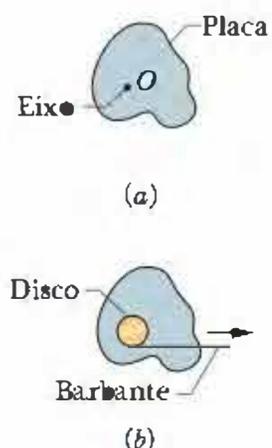



Figura 10-42 Problema 55.

••**56** A Fig. 10-43 mostra as partículas 1 e 2, ambas de massa m, presas às extremidades de uma barra rígida de massa desprezível e comprimento $L_1 + L_2$, com $L_1 = 20$ cm e $L_2 = 80$ cm. A barra é mantida horizontalmente no fulcro até ser liberada. Qual é o módulo da aceleração inicial (a) da partícula 1 e (b) da partícula 2?

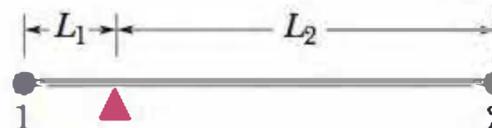



Figura 10-43 Problema 56.

•••**57** Uma polia, com um momento de inércia de $1{,}0 \times 10^{-3}$ kg · m² em relação ao eixo e um raio de 10 cm, é submetida a uma força aplicada tangencialmente à borda. O módulo da força varia no tempo de acordo com a equação $F = 0{,}50t + 0{,}30t^2$, com F em newtons e t em segundos. A polia está inicialmente em repouso. Qual é (a) a aceleração angular e (b) a velocidade angular da polia no instante $t = 3{,}0$ s?

Seção 10-10 Trabalho e Energia Cinética de Rotação

•**58** (a) Se $R = 12$ cm, $M = 400$ g e $m = 50$ g na Fig. 10-18, determine a velocidade do bloco após ter descido 50 cm a partir do repouso. Resolva o problema usando a lei da conservação da energia. (b) Repita o item (a) para $R = 5{,}0$ cm.

•**59** O virabrequim de um automóvel transfere energia do motor para o eixo a uma taxa de 100 hp (= 74,6 kW) quando gira a 1800 rev/min. Qual é o torque (em newtons-metros) exercido pelo virabrequim?

•**60** Uma barra fina de 0,75 m de comprimento e uma massa de 0,42 kg está suspensa por uma das extremidades. A barra é puxada para o lado e liberada para oscilar como um pêndulo, passando pela posição mais baixa com uma velocidade angular de 4,0 rad/s. Desprezando o atrito e a resistência do ar, determine (a) a energia cinética da barra na posição mais baixa e (b) a altura acima dessa posição que o centro de massa alcança.

•61 Uma roda de 32,0 kg, essencialmente um aro fino com 1,20 m de raio, está girando a 280 rev/min. A roda precisa ser parada em 15,0 s. (a) Qual é o trabalho necessário para fazê-la parar? (b) Qual é a potência média necessária?

••62 Na Fig. 10-32, três partículas de 0,0100 kg foram coladas em uma barra, de comprimento $L = 6{,}00$ cm e massa desprezível, que pode girar em torno de um eixo perpendicular que passa pelo ponto O em uma das extremidades. Determine o trabalho necessário para mudar a velocidade angular (a) de 0 para 20,0 rad/s, (b) de 20,0 rad/s para 40,0 rad/s e (c) de 40,0 rad/s para 60,0 rad/s. (d) Qual é a inclinação da curva da energia cinética do conjunto (em joules) em função do quadrado da velocidade angular (em radianos quadrados por segundo ao quadrado)?

••63 Uma régua de um metro é mantida verticalmente com uma das extremidades apoiada no solo e depois liberada. Determine a velocidade da outra extremidade pouco antes de tocar o solo, supondo que a extremidade de apoio não escorrega. (*Sugestão:* considere a régua uma barra fina e use a lei de conservação da energia.)

••64 Um cilindro homogêneo com 10 cm de raio e uma massa de 20 kg está montado de modo a poder girar livremente em torno de um eixo horizontal paralelo ao eixo central longitudinal do cilindro e situado a 5,0 cm do eixo. (a) Qual é o momento de inércia do cilindro em relação ao eixo de rotação? (b) Se o cilindro é liberado a partir do repouso com o eixo central longitudinal na mesma altura que o eixo em torno do qual pode girar, qual é a velocidade angular do cilindro ao passar pelo ponto mais baixo da trajetória?

•••65 Uma chaminé cilíndrica cai quando a base sofre um abalo. Trate a chaminé como uma barra fina com 55,0 m de comprimento. No instante em que a chaminé faz um ângulo de 35,0° com a vertical durante a queda, qual é (a) a aceleração radial do topo e (b) a aceleração tangencial do topo? (*Sugestão:* use considerações de energia e não de torque.) (c) Para que ângulo θ a aceleração tangencial é igual a g?

•••66 Uma casca esférica homogênea de massa $M = 4{,}5$ kg e raio $R = 8{,}5$ cm pode girar em torno de um eixo vertical sem atrito (Fig. 10-44). Uma corda de massa desprezível está enrolada no equador da casca, passa por uma polia de momento de inércia $I = 3{,}0 \times 10^{-3}$ kg · m² e raio $r = 5{,}0$ cm e está presa a um pequeno objeto de massa $m = 0{,}60$ kg. Não há atrito no eixo da polia e a corda não escorrega na casca nem na polia. Qual é a velocidade do objeto depois de cair 82 cm após ter sido liberado a partir do repouso? Use considerações de energia.

M, R
I, r
m

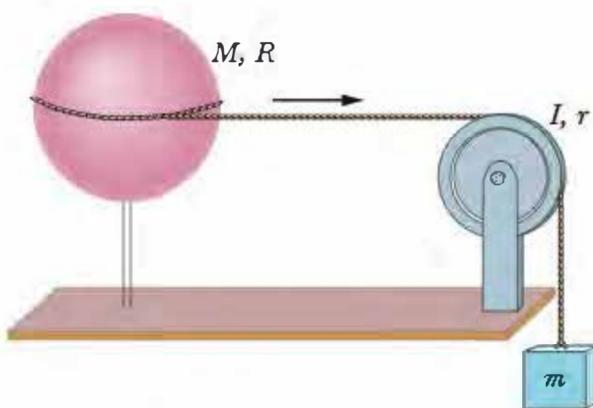



Figura 10-44 Problema 66.

•••67 A Fig. 10-45 mostra um corpo rígido formado por um aro fino (de massa m e raio $R = 0{,}150$ m) e uma barra fina radial (de massa m e comprimento $L = 2{,}00R$). O conjunto está na vertical, mas se recebe um pequeno empurrão, começa a girar em torno de um eixo horizontal no plano do aro e da barra, que passa pela extremidade inferior da barra. Supondo que a energia fornecida ao sistema pelo pequeno empurrão é desprezível, qual é a velocidade angular do conjunto ao passar pela posição invertida (de cabeça para baixo)?

Aro
Barra
Eixo de rotação

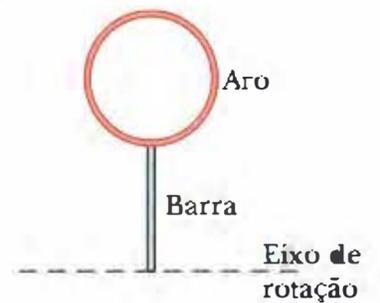



Figura 10-45 Problema 67.

Problemas Adicionais

68 Duas esferas homogêneas maciças têm a mesma massa de 1,65 kg, mas o raio de uma é 0,226 m e o da outra é 0,854 m. Ambas podem girar em torno de um eixo que passa pelo centro. (a) Qual é o módulo τ do torque necessário para levar a esfera menor do repouso a uma velocidade angular de 317 rad/s em 15,5 s? (b) Qual é o módulo F da força que deve ser aplicada tangencialmente ao equador da esfera para produzir esse torque? Quais é o valor correspondente de (c) τ e (d) F para a esfera maior?

69 Na Fig. 10-46, um pequeno disco de raio $r = 2{,}00$ cm foi colado na borda de um disco maior de raio $R = 4{,}00$ cm, com os discos no mesmo plano. Os discos podem girar em torno de um eixo perpendicular que passa pelo ponto O, situado no centro do disco maior. Os discos têm uma massa específica (massa por unidade de volume) uniforme de $1{,}40 \times 10^3$ kg/m³ e uma espessura, também uniforme, de 5,00 mm. Qual é o momento de inércia do conjunto dos dois discos em relação ao eixo de rotação que passa por O?

O

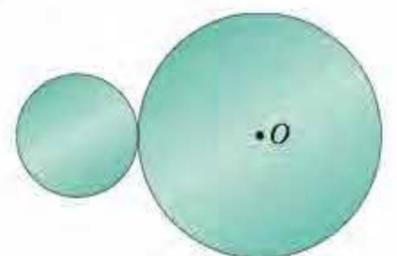



Figura 10-46 Problema 69.

70 Uma roda partiu do repouso com uma aceleração angular constante de 2,00 rad/s². Durante um certo intervalo de 3,00 s, a roda descreve um ângulo de 90,0 rad. (a) Qual era a velocidade angular da roda no início do intervalo de 3,00 s? (b) Por quanto tempo a roda girou antes do início do intervalo de 3,00 s?

71 Na Fig. 10-47, dois blocos de 6,20 kg estão ligados por uma corda de massa desprezível que passa por uma polia de 2,40 cm de raio e momento de inércia $7{,}40 \times 10^{-4}$ kg · m². A corda não escorrega na polia; não se sabe se existe atrito entre a mesa e o bloco que escorrega; não há atrito no eixo da polia. Quando o sistema é liberado a partir do repouso, a polia gira de 0,650 rad em 91,0 ms e a aceleração dos blocos é constante. Determine (a) o módulo da aceleração angular da polia, (b) o módulo da aceleração de cada bloco, (c) a tensão T_1 da corda e (d) a tensão T_2 da corda.

T_2
T_1

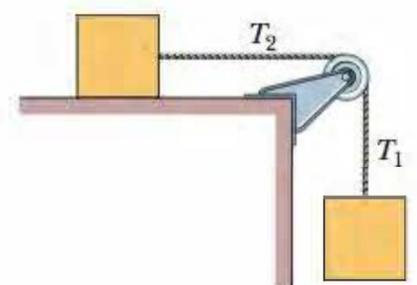



Figura 10-47 Problema 71.

72 Nas duas extremidades de uma fina barra de aço com 1,20 m de comprimento e 6,40 kg de massa existem pequenas bolas de massa 1,06 kg. A barra pode girar em um plano horizontal em torno de um eixo vertical que passa pelo ponto médio da barra. Em um certo instante, a barra está girando a 39,0 rev/s. Devido ao atrito, desacelera até parar, 32,0 s depois. Supondo que o torque produzido pelo atrito é constante, calcule (a) a aceleração angular, (b) o torque produzido pelo atrito, (c) a energia transferida de energia mecânica para energia térmica pelo atrito e (d) o número de revoluções executadas pela barra nesses 32,0 s. (e) Suponha que o torque produzido pelo atrito não é constante. Se alguma das grandezas calculadas nos itens (a), (b), (c) e (d) ainda puder ser calculada sem qualquer informação adicional, forneça o seu valor.

73 Uma pá do rotor de um helicóptero é homogênea, tem 7,80 m de comprimento, uma massa de 110 kg e está presa ao eixo do rotor por um único parafuso. (a) Qual é o módulo da força exercida pelo eixo sobre o parafuso quando o rotor está girando a 320 rev/min? (*Sugestão:* para este cálculo, a pá pode ser considerada uma massa pontual localizada no centro de massa. Por quê?) (b) Calcule o módulo do torque que deve ser aplicado ao rotor para que atinja a velocidade angular do item anterior, a partir do repouso, em 6,70 s. Ignore a resistência do ar. (A lâmina não pode ser considerada uma massa pontual para este cálculo. Por quê? Suponha que a distribuição de massa é a de uma barra fina homogênea.) (c) Qual é o trabalho realizado pelo torque sobre a pá para que a pá atinja a velocidade angular de 320 rev/min?

74 *Corrida de discos.* A Fig. 10-48 mostra dois discos que podem girar em torno do centro como um carrossel. No instante $t = 0$, as retas de referência dos dois discos têm a mesma orientação; o disco A já está girando com uma velocidade angular constante de 9,5 rad/s e o disco B parte do repouso com uma aceleração angular constante de 2,2 rad/s^2. (a) Em que instante t as duas retas de referência têm o mesmo deslocamento angular θ? (b) Esse é o primeiro instante t, desde $t = 0$, no qual as duas retas de referência estão alinhadas?

Disco A Disco B

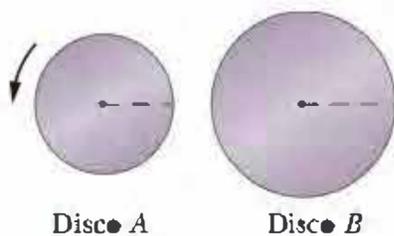



Figura 10-48 Problema 74.

75 Um equilibrista procura manter sempre seu centro de massa verticalmente acima do arame (ou corda). Para isso, carrega muitas vezes uma vara comprida. Quando se inclina, digamos, para a direita (deslocando o centro de massa para a direita) e corre o risco de girar em torno do arame, movimenta a vara para a esquerda, o que desloca o centro de massa para a esquerda e diminui a velocidade de rotação, proporcionando-lhe mais tempo para recuperar o equilíbrio. Suponha que o equilibrista tem uma massa de 70,0 kg e um momento de inércia de 15,0 kg · m^2 em relação ao arame. Qual é o módulo da aceleração angular em relação ao arame se o centro de massa do equilibrista está 5,0 cm à direita do arame e (a) o equilibrista não carrega uma vara e (b) a vara de 14,90 kg que carrega é movimentada de tal forma que o centro de massa do equilibrista fica 10 cm à esquerda do arame?

76 Um roda começa a girar a partir do repouso em $t = 0$ com aceleração angular constante. No instante $t = 2{,}0$ s, a velocidade angular da roda é 5,0 rad/s. A aceleração cessa abruptamente no instante $t = 20$ s. De que ângulo gira a roda no intervalo de $t = 0$ a $t = 40$ s?

77 Um prato de toca-discos, que está girando a $33\frac{1}{3}$ rev/min, diminui gradualmente de velocidade e para 30 s depois que o motor é desligado. (a) Determine a aceleração angular do prato (suposta constante) em revoluções por minuto ao quadrado. (b) Quantas revoluções o prato executa até parar?

78 Um corpo rígido é formado por três barras finas iguais, de comprimento $L = 0{,}600$ m, unidas na forma da letra **H** (Fig. 10-49). O corpo pode girar livremente em torno de um eixo horizontal que coincide com uma das pernas do **H**. O corpo é liberado a partir do repouso em uma posição na qual o plano do **H** está na horizontal. Qual é a velocidade angular do corpo quando o plano do **H** está na vertical?

L L L

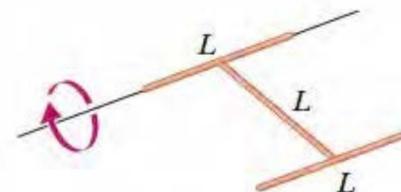



Figura 10-49 Problema 78.

79 (a) Mostre que o momento de inércia de um cilindro maciço de massa M e raio R em relação ao eixo central é igual ao momento de inércia de um aro fino de massa M e raio $R/\sqrt{2}$ em relação ao eixo central. (b) Mostre que o momento de inércia I de um corpo qualquer de massa M em relação a qualquer eixo é igual ao momento de inércia de um *aro equivalente* em torno do mesmo eixo com a mesma massa M e um raio k dado por

$$k = \sqrt{\frac{I}{M}}.$$

O raio k do aro equivalente é chamado de *raio de giração* do corpo.

80 Um disco gira, com aceleração angular constante, da posição angular $\theta_1 = 10{,}0$ rad até a posição angular $\theta_2 = 70{,}0$ rad em 6,00 s. A velocidade angular em θ_2 é 15,0 rad/s. (a) Qual era a velocidade angular em θ_1? (b) Qual é a aceleração angular? (c) Em que posição angular o disco estava inicialmente em repouso? (d) Plote θ em função de t e a velocidade angular ω do disco em função de t, a partir do início do movimento ($t = 0$).

81 A barra fina e homogênea da Fig. 10-50 tem 2,0 m de comprimento e pode girar, sem atrito, em torno de um pino horizontal que passa por uma das extremidades. A barra é liberada a partir do repouso e de um ângulo $\theta = 40°$ acima da horizontal. Use a lei de conservação da energia para determinar a velocidade angular da barra ao passar pela posição horizontal.

θ Pino

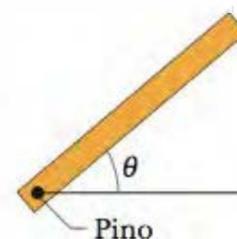



Figura 10-50 Problema 81.

82 George Washington Gale Ferris, Jr., um engenheiro civil formado pelo Instituto Politécnico Rensselaer, construiu a primeira roda-gigante para a Exposição Mundial Colombiana de 1893, em Chicago. A roda, uma impressionante obra da engenharia para a época, movimentava 36 cabinas de madeira, cada uma com capacidade para 60 passageiros, ao longo de uma circunferência com 76 m de diâmetro. As cabinas eram carregadas 6 de cada vez, e quando as 36 cabinas estavam ocupadas, a roda executava uma revolução completa, com velocidade angular constante, em cerca de 2 min.

Estime o trabalho necessário para a máquina fazer girar apenas os passageiros.

83 Na Fig. 10-38, dois blocos, de massas $m_1 = 400$ g e $m_2 = 600$ g, estão ligados por uma corda de massa desprezível que está enrolada na borda de um disco homogêneo de massa $M = 500$ g e raio $R = 12{,}0$ cm. O disco pode girar sem atrito em torno de um eixo horizontal que passa pelo centro; a corda não desliza na borda do disco. O sistema é liberado a partir do repouso. Determine (a) o módulo da aceleração dos blocos, (b) a tensão T_1 da corda da esquerda e (c) a tensão T_2 da corda da direita.

84 Às 7h14min de 30 de junho de 1908, uma enorme explosão aconteceu na atmosfera sobre a Sibéria Central, na latitude 61° N e longitude 102° E; a bola de fogo criada pela explosão foi o objeto mais brilhante visto na Terra antes das armas nucleares. O chamado *Evento de Tunguska*, que, de acordo com uma testemunha, "cobriu uma parte enorme do céu", foi provavelmente a explosão de um *asteroide rochoso* de aproximadamente 140 m de largura. (a) Considerando apenas a rotação da Terra, determine quanto tempo depois o asteroide teria que chegar à Terra para explodir acima de Helsinki, na longitude 25° E, destruindo totalmente a cidade. (b) Se o asteroide fosse um *asteroide metálico*, poderia ter chegado à superfície da Terra. Quando tempo depois o asteroide teria que chegar à Terra para que o choque ocorresse no oceano Atlântico, na longitude 20° W? (A tsunami resultante destruiria cidades costeiras dos dois lados do Atlântico.)

85 Uma bola de golfe é lançada com um ângulo de 20° em relação à horizontal, uma velocidade de 60 m/s e uma velocidade angular de 90 rad/s. Desprezando a resistência do ar, determine o número de revoluções que a bola executa até o instante em que atinge a altura máxima.

86 A Fig. 10-51 mostra um objeto plano formado por dois anéis circulares que têm um centro comum e são mantidos fixos por três barras de massa desprezível. O objeto, que está inicialmente em repouso, pode girar (como um carrossel) em torno do centro comum, onde se encontra outra barra de massa desprezível. As massas, raios internos e raios externos dos anéis aparecem na tabela a seguir. Uma força tangencial de módulo 12,0 N é aplicada à borda externa do anel externo por 0,300 s. Qual é a variação na velocidade angular do objeto nesse intervalo de tempo?

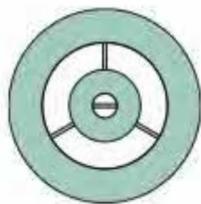



Figura 10-51 Problema 86.

Anel	Massa (kg)	Raio interno (m)	Raio externo (m)
1	0,120	0,0160	0,0450
2	0,240	0,0900	0,1400

87 Na Fig. 10-52, uma roda com 0,20 m de raio é montada em um eixo horizontal sem atrito. Uma corda de massa desprezível é enrolada na roda e presa a uma caixa de 2,0 kg que escorrega sobre uma superfície sem atrito com uma inclinação $\theta = 20°$ em relação à horizontal. A caixa escorrega para baixo com uma aceleração de 2,0 m/s². Qual é o momento de inércia da roda em relação ao eixo?

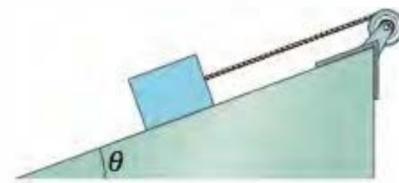



Figura 10-52 Problema 87.

88 Uma casca esférica fina tem um raio de 1,90 m. Um torque aplicado de 960 N · m produz uma aceleração angular de 6,20 rad/s² em relação a um eixo que passa pelo centro da casca. Quais são (a) o momento de inércia da casca em relação a esse eixo e (b) a massa da casca?

89 Um ciclista de 70 kg apoia toda a sua massa em cada movimento para baixo do pedal enquanto pedala em uma estrada íngreme. Supondo que o diâmetro da circunferência descrita pelo pedal é 0,40 m, determine o módulo do torque máximo exercido pelo ciclista em relação ao eixo de rotação dos pedais.

90 O volante de um motor está girando a 25,0 rad/s. Quando o motor é desligado, o volante desacelera a uma taxa constante e para em 20,0 s. Calcule (a) a aceleração angular do volante, (b) o ângulo descrito pelo volante até parar e (c) o número de revoluções realizadas pelo volante até parar.

91 Na Fig. 10-18*a*, uma roda com 0,20 m de raio está montada em um eixo horizontal sem atrito. O momento de inércia da roda em relação ao eixo é 0,40 kg · m². Uma corda de massa desprezível, enrolada na borda da roda, está presa a uma caixa de 6,0 kg. O sistema é liberado a partir do repouso. Quando a caixa tem uma energia cinética de 6,0 J, quais são (a) a energia cinética de rotação da roda e (b) a distância percorrida pela caixa?

92 O Sol está a $2{,}3 \times 10^4$ anos-luz do centro da Via Láctea e descreve uma circunferência em torno deste centro a uma velocidade de 250 km/s. (a) Quanto tempo leva para o Sol executar uma revolução em torno do centro da galáxia? (b) Quantas revoluções o Sol completou desde que se formou, há cerca de $4{,}5 \times 10^9$ anos?

93 Uma roda de 0,20 m de raio está montada em um eixo horizontal sem atrito. O momento de inércia da roda em relação ao eixo é 0,050 kg · m². Uma corda de massa desprezível está enrolada na roda e presa a um bloco de 2,0 kg que escorrega em uma superfície horizontal sem atrito. Se uma força horizontal de módulo $P = 3{,}0$ N é aplicada ao bloco, como na Fig. 10-53, qual é o módulo da aceleração angular da roda? Suponha que a corda não desliza em relação à roda.

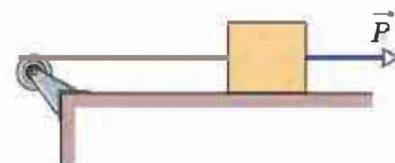



Figura 10-53 Problema 93.

94 Um carro parte do repouso e se move em uma pista circular com 30,0 m de raio. A velocidade do carro aumenta a uma taxa constante de 0,500 m/s². (a) Qual é o módulo da aceleração linear *média* do carro após 15,0 s? (b) Que ângulo o vetor aceleração média faz com a velocidade do carro nesse instante?

95 O corpo rígido mostrado na Fig. 10-54 é formado por três partículas ligadas por barras de massa desprezível. O corpo gira em torno de um eixo perpendicular ao plano da três partículas que passa pelo ponto P. Se $M = 0{,}40$ kg, $a = 30$ cm e $b = 50$ cm, qual é o trabalho necessário para levar o corpo do repouso até a velocidade angular de 5,0 rad/s?

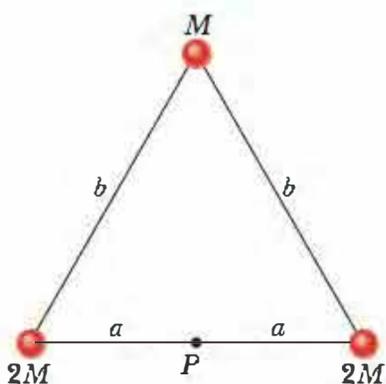



Figura 10-54 Problema 95.

96 *Engenharia de embalagens.* A tampa com um anel de puxar foi um grande avanço na engenharia das latas de bebida. O anel gira em torno de um pino situado no centro da tampa. Quando um dos lados do anel é puxado para cima, o outro lado empurra para baixo uma parte da tampa que foi riscada. Se você puxa o anel para cima com uma força de 10 N, qual é, aproximadamente, o módulo da força aplicada à parte riscada da tampa? (*Sugestão:* obtenha os dados necessários em uma lata de verdade.)

97 A Fig. 10-55 mostra uma pá de hélice que gira a 2000 rev/min em torno de um eixo perpendicular passando pelo ponto B. O ponto A está na outra extremidade da pá, a uma distância de 1,50 m. (a) Qual é a diferença entre os módulos da aceleração centrípeta a do ponto A e de um ponto situado a 0,150 m de distância do eixo? (b) Determine a inclinação do gráfico de a em função da distância ao longo da pá.

Figura 10.55 Problema 97.

98 Um mecanismo em forma de ioiô, montado em um eixo horizontal sem atrito, é usado para levantar uma caixa de 30 kg, como mostra a Fig. 10-56. O raio externo R da roda é 0,50 m e o raio r do cubo da roda é 0,20 m. Quando uma força horizontal $\vec{F}$ constante de módulo 140 N é aplicada a uma corda enrolada na roda, a caixa, que está pendurada em uma corda enrolada no cubo, tem uma aceleração para cima de módulo 0,80 m/s². Qual é o momento de inércia do mecanismo em relação ao eixo de rotação?

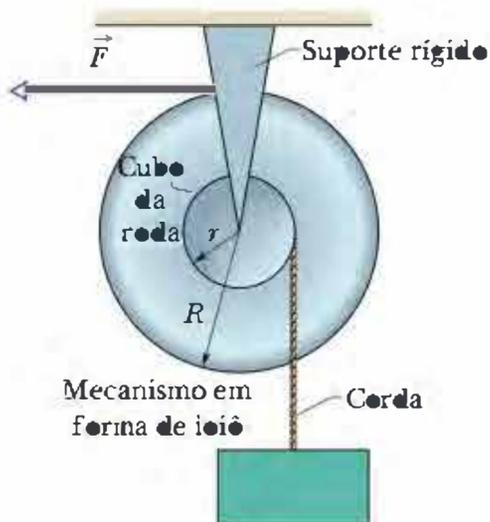



Figura 10-56 Problema 98.

99 Uma pequena bola com uma massa de 1,30 kg está montada em uma das extremidades de uma barra de 0,780 m de comprimento e massa desprezível. O sistema gira em um círculo horizontal em torno da outra extremidade da barra a 5010 rev/min. (a) Calcule o momento de inércia do sistema em relação ao eixo de rotação. (b) Existe uma força de arrasto de $2,30 \times 10^{-2}$ N agindo sobre a bola, no sentido oposto ao do movimento. Que torque deve ser aplicado ao sistema para mantê-lo em rotação com velocidade constante?

100 Duas barras finas (ambas de massa 0,20 kg) estão unidas para formar um corpo rígido, como mostra a Fig. 10-57. Uma das barras tem comprimento $L_1 = 0,40$ m e a outra tem comprimento $L_2 = 0,50$ m. Qual é o momento de inércia deste corpo rígido em relação (a) a um eixo perpendicular ao plano do papel passando pelo centro da barra menor e (b) um eixo perpendicular ao plano do papel passando pelo centro da barra maior?

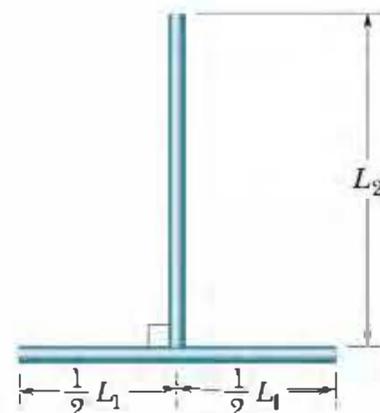



Figura 10-57 Problema 100.

101 Na Fig. 10-58, quatro polias estão ligadas por duas correias. A polia A (de 15 cm de raio) é a polia motriz e gira a 10 rad/s. A polia B (de 10 cm de raio) está ligada à polia A pela correia 1. A polia B' (de 5 cm de raio) é concêntrica com a polia B e está rigidamente ligada a ela. A polia C (de 25 cm de raio) está ligada à polia B' pela correia 2. Calcule (a) a velocidade linear de um ponto da correia 1, (b) a velocidade angular da polia B, (c) a velocidade angular da polia B', (d) a velocidade linear de um ponto da correia 2 e (e) a velocidade angular da polia C. (*Sugestão:* se a correia entre duas polias não desliza, as velocidades lineares das bordas das duas polias são iguais.)

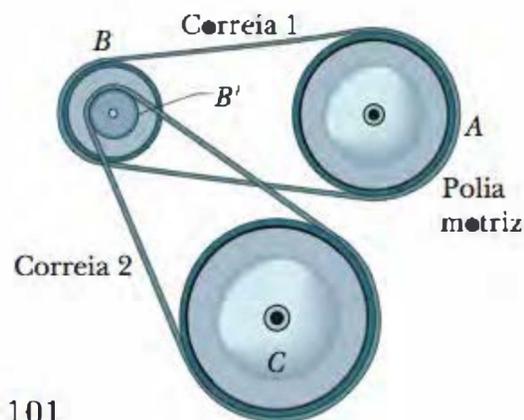



Figura 10-58 Problema 101.

102 O corpo rígido da Fig. 10-59 é formado por três bolas e três barras de ligação, com $M = 1,6$ kg, $L = 0,60$ m e $\theta = 30°$. As bolas podem ser tratadas como partículas e as barras têm massa desprezível. Determine a energia cinética de rotação do corpo se a velocidade angular é 1,2 rad/s em relação (a) a um eixo que passa pelo ponto P e é perpendicular ao plano do papel e (b) a um eixo que passa pelo ponto P, é perpendicular à barra de comprimento $2L$ e está no plano do papel.

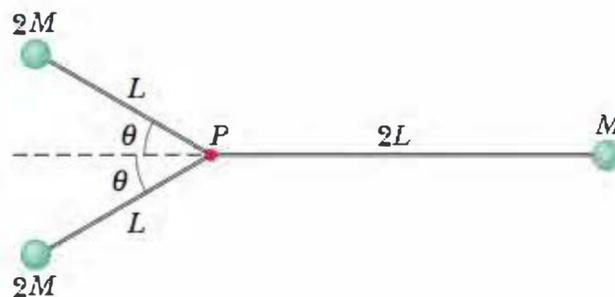



Figura 10-59 Problema 102.

103 Na Fig. 10-60, uma barra fina e homogênea (com 4,0 m de comprimento e uma massa de 3,0 kg) gira livremente em torno de um eixo horizontal A que é perpendicular à barra e passa por um ponto situado a uma distância $d = 1,0$ m da extremidade da barra. A energia cinética da barra ao passar pela posição vertical é 20 J. (a) Qual é o momento de inércia da barra em relação ao eixo A? (b) Qual é a velocidade (linear) da extremidade B da barra ao passar pela posição vertical? (c) Em que ângulo θ a barra para momentaneamente?

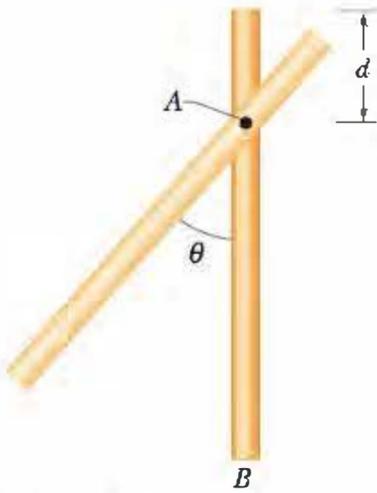



Figura 10-60 Problema 103.

104 Quatro partículas, todas de massa 0,20 kg, ocupam os vértices de um quadrado com 0,50 m de lado. As partículas estão ligadas por barras de massa desprezível. Este corpo rígido pode girar em um plano vertical em torno de um eixo horizontal A que passa por uma das partículas. O corpo é liberado a partir do repouso com a barra AB na horizontal, como mostra a Fig. 10-61. (a) Qual é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo A? (b) Qual é a velocidade angular do corpo em relação ao eixo A no instante em que a barra AB passa pela posição vertical?

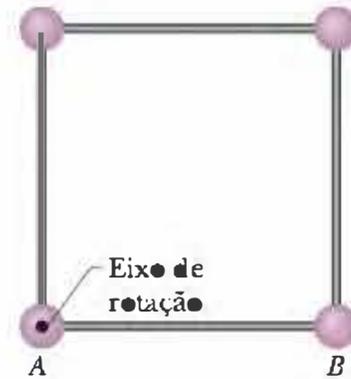



Figura 10.61 Problema 104.

CAPÍTULO

11 ROLAMENTO, TORQUE E MOMENTO ANGULAR

Figura 11-1 O Segway. *(Justin Sullivan/Getty Images News and Sport Services)*

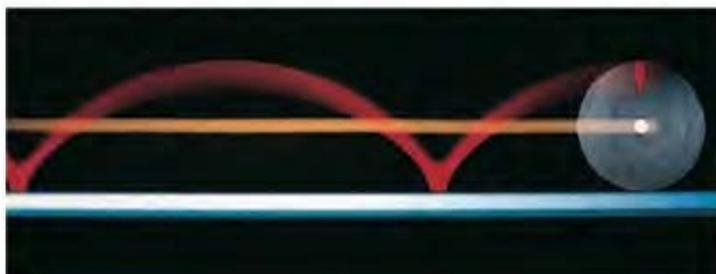
11-1 O QUE É FÍSICA?

Como vimos no Capítulo 10, um dos objetivos da física é o estudo das rotações. Entre as aplicações desse estudo, a mais importante é talvez a análise do rolamento de rodas e objetos que se comportam como rodas. Esta aplicação da física vem sendo usada há muito tempo. Assim, por exemplo, quando os habitantes pré-históricos da ilha da Páscoa moveram gigantescas estátuas de pedra de uma pedreira para outros lugares da ilha, eles as arrastaram sobre toras, que funcionaram como roletes. Mais tarde, quando os americanos colonizaram o oeste no século XIX, transportaram seus pertences primeiro em carroças e depois em vagões de trem. Hoje em dia, gostemos ou não, o mundo está repleto de carros, caminhões, motocicletas, bicicletas e outros veículos sobre rodas.

A física e a engenharia do transporte sobre rodas são tão antigas que alguém poderia pensar que nada de novo resta para ser criado. Entretanto, as pranchas de *skate* e os patins *in-line* foram inventados e lançados recentemente no mercado e se tornaram um grande sucesso. Um tipo moderno de carrinho de rolimã, conhecido como *street luge*, entrou na moda nos Estados Unidos, e veículos individuais como o Segway (Fig. 11-1) podem mudar a forma como as pessoas se movimentam nas grandes cidades. As aplicações da física do rolamento ainda podem reservar muitas surpresas e recompensas. Nosso ponto de partida para estudar essa parte da física será simplificar o movimento de rolamento.

11-2 O Rolamento como uma Combinação de Translação e Rotação

No momento, vamos considerar apenas objetos que *rolam suavemente* em uma superfície, ou seja, que rolam sem escorregar ou quicar na superfície. A Fig. 11-2 mostra como o movimento de rolamento suave pode ser complicado: embora o centro do objeto se mova em uma linha reta paralela à superfície, um ponto da borda certamente não o faz. Entretanto, podemos estudar este movimento tratando-o como uma combinação de translação do centro de massa e rotação do resto do objeto em torno do centro de massa.

Figura 11-2 Fotografia de longa exposição de um disco rolando. Pequenas lâmpadas foram presas ao disco, uma no centro e outra na borda. A segunda descreve uma curva chamada *cicloide*. *(Richard Megna/Fundamental Photographs)*

Para compreender como isso é possível, imagine que você está parado em uma calçada observando a roda de bicicleta da Fig. 11-3 passar na rua. Como mostra a figura, você vê o centro de massa O da roda se mover com velocidade constante v_{CM}. O ponto P em que a roda faz contato com o piso também se move para a frente com velocidade v_{CM}, de modo que P permanece sempre diretamente abaixo de O.

Durante um intervalo de tempo t, você observa os pontos O e P se deslocarem de uma distância s. O ciclista vê a roda girar de um ângulo θ em torno do eixo, com o ponto que estava tocando a rua no início do intervalo descrevendo um arco de comprimento s. A Eq. 10-17 relaciona o comprimento do arco s ao ângulo de rotação θ:

$$s = \theta R, \qquad (11\text{-}1)$$

em que R é o raio da roda. A velocidade linear v_{CM} do centro da roda (o centro de massa desta roda homogênea) é ds/dt. A velocidade angular ω da roda é $d\theta/dt$. Derivando a Eq. 11-1 em relação ao tempo (com R constante), obtemos

$$v_{CM} = \omega R \quad \text{(rolamento suave).} \qquad (11\text{-}2)$$

A Fig. 11-4 mostra que o movimento de rolamento de uma roda é uma combinação de um movimento puro de translação com um movimento puro de rotação. A Fig. 11-4*a* mostra o movimento puro de rotação (como se o eixo de rotação estivesse estacionário): todos os pontos da roda giram em torno do centro com velocidade angular ω. (Este é o tipo de movimento que discutimos no Capítulo 10.) Todos os pontos na periferia da roda têm uma velocidade linear escalar v_{CM} dada pela Eq. 11-2. A Fig. 11-4*b* mostra o movimento puro de translação (como se a roda não estivesse rodando): todos os pontos da roda se movem para a direita com uma velocidade escalar $\vec{v}_{CM}$.

A combinação dos movimentos representados nas Figs. 11-4*a* e 11-4*b* é o rolamento da roda, representado na Fig. 11-4*c*. Observe que, nesta combinação de movimentos, a velocidade escalar da extremidade inferior da roda (ponto P) é zero e a velocidade escalar da extremidade superior (ponto T) é $2v_{CM}$, maior que em qualquer outro ponto da roda. Esses resultados são confirmados na Fig. 11-5, que é uma fotografia de longa exposição de uma roda de bicicleta em movimento. O fato de que os raios da roda estão mais nítidos na parte de baixo do que na parte de cima mostra que a roda está se movendo mais devagar na parte de baixo do que na parte de cima.

O movimento de qualquer corpo redondo rolando suavemente em uma superfície pode ser separado em movimentos puros de rotação e translação, como nas Figs. 11-4*a* e 11-4*b*.

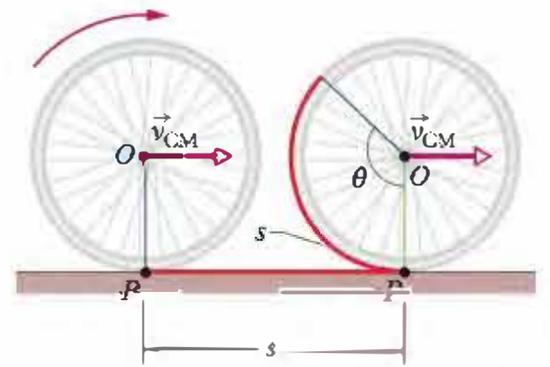



Figura 11-3 O centro de massa O de uma roda percorre uma distância s com velocidade $\vec{v}_{CM}$ enquanto a roda gira de um ângulo θ. O ponto P de contato entre a roda e a superfície na qual está rolando também percorre uma distância s.

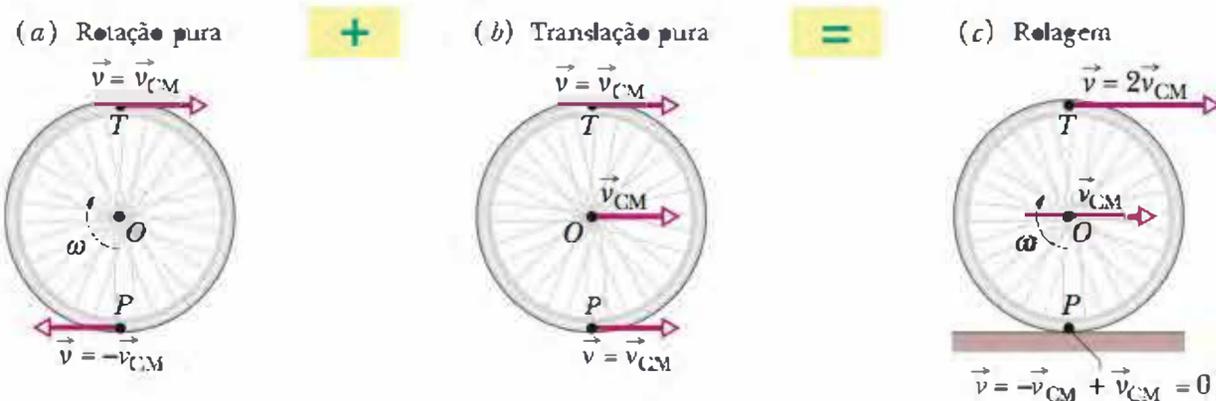



Figura 11-4 Movimento de rolamento de uma roda como uma combinação de um movimento de rotação pura e um movimento de translação pura. (*a*) Movimento de rotação pura: todos os pontos da roda se movem com a mesma velocidade angular ω. Todos os pontos da borda da roda se movem com a mesma velocidade linear escalar $v = v_{CM}$. São mostradas as velocidades lineares $\vec{v}$ de dois desses pontos, na borda de cima (T) e na borda de baixo (P) da roda. (*b*) Movimento de translação pura: todos os pontos da roda se movem para a direita com a mesma velocidade linear $\vec{v}_{CM}$. (*c*) O movimento de rolamento da roda é uma combinação de (*a*) com (*b*).

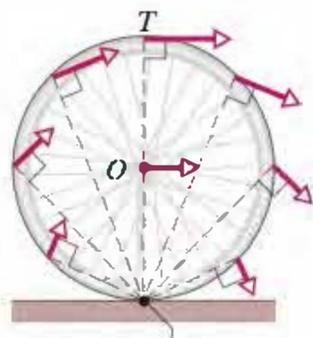
Figura 11-5 Fotografia de uma roda de bicicleta em movimento. Os raios de baixo estão mais nítidos que os raios de cima porque estão se movendo mais devagar, como mostra a Fig. 11-4*c*. *(Cortesia de Alice Halliday)*

Eixo de rotação em P

Figura 11-6 O rolamento pode ser visto como uma rotação pura, com velocidade angular ω, em torno de um eixo que sempre passa por P. Os vetores mostram as velocidades lineares instantâneas de pontos escolhidos da roda. Esses vetores podem ser obtidos combinando os movimentos de translação e rotação, como na Fig. 11-4.

Rolamento como uma Rotação Pura

A Fig. 11-6 sugere outra forma de descrever o movimento de rolamento de uma roda: como uma rotação pura em torno de um eixo que sempre passa pelo ponto de contato entre a roda e a superfície sobre a qual a roda está rolando. Consideramos o movimento de rolamento como uma rotação pura em torno de um eixo passando pelo ponto P na Fig. 11-4c e perpendicular ao plano do papel. Os vetores da Fig. 11-6 mostram as velocidades instantâneas dos pontos da roda.

Pergunta Que velocidade angular em torno deste novo eixo um observador estacionário atribuiria a uma roda de bicicleta?

Resposta A mesma velocidade angular ω que o ciclista atribui à roda quando a observa em movimento de rotação pura em torno de um eixo passando pelo centro de massa.

Para mostrar que esta resposta está correta, vamos usá-la para calcular a velocidade linear da extremidade superior da roda, do ponto de vista de um observador estacionário. Chamando de R o raio da roda, a extremidade superior está a uma distância $2R$ do eixo que passa pelo ponto P na Fig. 11-6, de modo que, de acordo com a Eq.11-2, a velocidade linear da extremidade superior é

$$v_{sup} = (\omega)(2R) = 2(\omega R) = 2v_{CM},$$

em perfeita concordância com a Fig. 11-4c. O leitor pode verificar que a concordância também é observada para os pontos O e P da Fig. 11-4c.

TESTE 1

A roda traseira da bicicleta de um palhaço tem um raio duas vezes maior que a roda dianteira. (a) A velocidade linear da extremidade superior da roda traseira é maior, menor ou igual à velocidade linear da extremidade superior da roda dianteira quando a bicicleta está em movimento? (b) A velocidade angular da roda traseira é maior, menor ou igual à velocidade angular da roda dianteira?

11-3 A Energia Cinética de Rolamento

Vamos agora calcular a energia cinética de uma roda em rolamento do ponto de vista de um observador estacionário. Quando encaramos o rolamento como uma rotação pura em torno de um eixo que passa pelo ponto P da Fig. 11-6, a Eq. 10-34 nos dá

$$K = \tfrac{1}{2} I_P \omega^2, \qquad (11\text{-}3)$$

em que ω é a velocidade angular da roda e I_P é o momento de inércia da roda em relação a um eixo passando por P. De acordo com o teorema dos eixos paralelos da Eq. 10-36 ($I = I_{CM} + Mh^2$), temos:

$$I_P = I_{CM} + MR^2, \qquad (11\text{-}4)$$

onde M é a massa da roda, I_{CM} é o momento de inércia da roda em relação a um eixo passando pelo centro de massa e R (o raio da roda) é a distância perpendicular h. Substituindo a Eq. 11-4 na Eq. 11-3, obtemos

$$K = \tfrac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \tfrac{1}{2} MR^2 \omega^2,$$

e usando a relação $v_{CM} = \omega R$ (Eq. 11-2), temos

$$K = \tfrac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \tfrac{1}{2} M v_{CM}^2. \qquad (11\text{-}5)$$

Podemos interpretar o termo $\frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$ como a energia cinética associada à rotação da roda em torno de um eixo que passa pelo centro de massa (Fig. 11-4a) e o termo

$\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$ como a energia cinética associada ao movimento de translação do centro de massa da roda (Fig. 11-4*b*). Assim, temos a seguinte regra:

Um objeto em rolamento possui dois tipos de energia cinética: uma energia cinética de rotação ($\frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$) associada à rotação em torno do centro de massa e uma energia cinética de translação ($\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$) associada à translação do centro de massa.

11-4 As Forças do Rolamento

Atrito e Rolamento

Uma roda que rola com velocidade constante, como na Fig. 11-3, não tende a deslizar no ponto de contato P e, portanto, não está sujeita a uma força de atrito. Entretanto, se uma força age sobre a roda para aumentar ou diminuir a velocidade, essa força produz uma aceleração $\vec{a}_{CM}$ do centro de massa na direção do movimento. A força também faz com que a roda gire mais depressa ou mais devagar, o que significa que ela produz uma aceleração angular α. Essa aceleração tende a fazer a roda deslizar no ponto P. Assim, uma força de atrito passa a agir sobre a roda no ponto P para se opor a essa tendência.

Se a roda *não desliza*, a força é uma força de atrito *estático* $\vec{f}_s$ e o movimento é de rolamento suave. Nesse caso, podemos relacionar o módulo da aceleração linear $\vec{a}_{CM}$ à aceleração angular α derivando a Eq. 11-2 em relação ao tempo (com R constante). No lado esquerdo, dv_{CM}/dt é igual a a_{CM}; no lado direito, $d\omega/dt$ é igual a α. Assim, no caso de um rolamento suave, temos:

$$a_{CM} = \alpha R \quad \text{(rolamento suave).} \tag{11-6}$$

Se a roda *desliza* quando a força é aplicada, a força de atrito no ponto P da roda da Fig. 11-3 é uma força de atrito *cinético* $\vec{f}_k$. Nesse caso, o movimento não é de rolamento suave e a Eq. 11-6 não se aplica. Neste capítulo, vamos discutir apenas movimentos de rolamento suave.

A Fig. 11-7 mostra um exemplo no qual uma roda está sendo acelerada enquanto rola para a direita ao longo de uma superfície plana, como acontece com a roda de uma bicicleta no início de uma corrida. O aumento da velocidade de rotação tende a fazer a parte inferior da roda deslizar para a esquerda no ponto P. Uma força de atrito em P, dirigida para a direita, se opõe à tendência de deslizamento. Se a roda não desliza, a força de atrito é uma força de atrito estático $\vec{f}_s$ (como na Fig. 11-7), o movimento é de rolamento suave e a Eq. 11-6 pode ser empregada. (Se não fosse o atrito, as corridas de bicicleta seriam estacionárias e muito enfadonhas.)

Se a velocidade de rotação da roda na Fig. 11-7 estivesse diminuindo, como no caso de uma bicicleta sendo freada, a figura teria que sofrer duas modificações: o sentido da aceleração do centro de massa $\vec{a}_{CM}$ e o sentido da força de atrito $\vec{f}_s$ no ponto P passariam a ser para a esquerda.

Figura 11-7 Uma roda rola horizontalmente sem deslizar enquanto acelera com uma aceleração linear $\vec{a}_{CM}$. Uma força de atrito estático $\vec{f}_s$ age sobre a roda em P, impedindo o deslizamento.

Rolamento para Baixo em uma Rampa

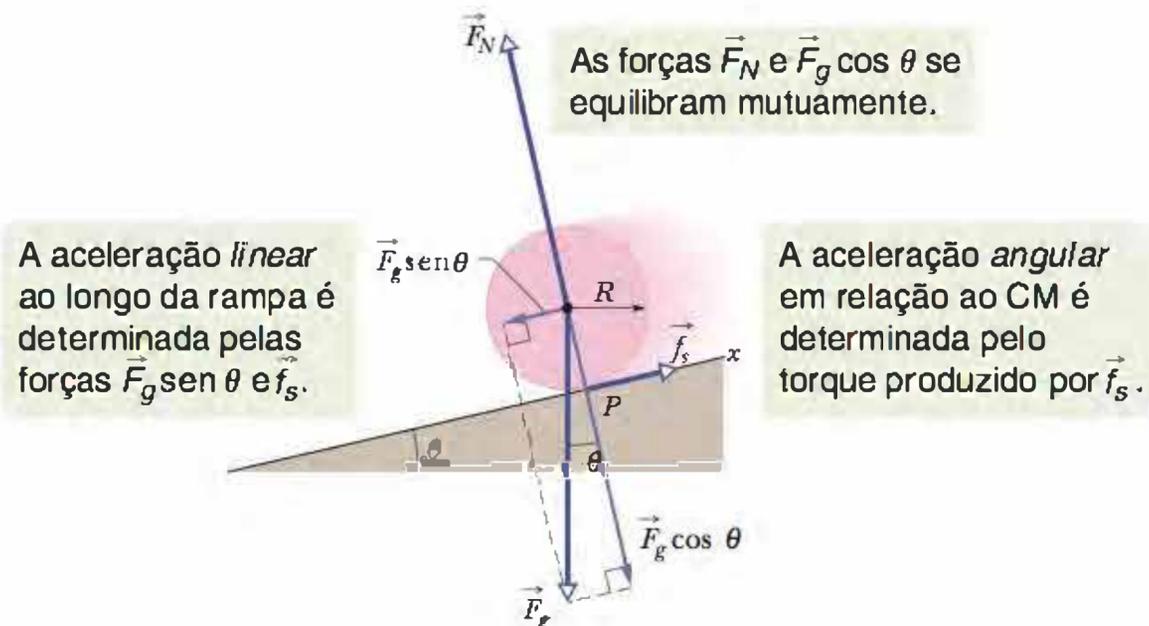
A Fig. 11-8 mostra um corpo redondo homogêneo, de massa M e raio R, rolando suavemente para baixo ao longo de um eixo x em uma rampa inclinada de um ângulo θ. Queremos obter uma expressão para a aceleração do corpo $a_{CM,x}$ ao longo da rampa. Para isso, usamos as versões linear ($F_{res} = Ma$) e angular ($\tau_{res} = I\alpha$) da segunda lei de Newton.

Para começar, desenhamos as forças que agem sobre o corpo, como mostra a Fig. 11-8:

Figura 11-8 Um corpo redondo homogêneo de raio R rola para baixo em uma rampa. As forças que agem sobre o corpo são a força gravitacional $\vec{F}_g$, a força normal $\vec{F}_N$ e a força de atrito $\vec{f}_s$, que aponta para cima ao longo da rampa. (Para maior clareza, o vetor $\vec{f}_N$ foi deslocado ao longo da linha de ação até a origem coincidir com o centro do corpo.)

As forças $\vec{F}_N$ e $\vec{F}_g \cos\theta$ se equilibram mutuamente.

A aceleração *linear* ao longo da rampa é determinada pelas forças $\vec{F}_g \operatorname{sen}\theta$ e $\vec{f}_s$.

A aceleração *angular* em relação ao CM é determinada pelo torque produzido por $\vec{f}_s$.

1. A força gravitacional $\vec{F}_g$ que atua sobre o corpo está dirigida para baixo. A origem desse vetor está no centro de massa do corpo. A componente ao longo da rampa é F_g sen θ, que é igual a Mg sen θ.
2. A força normal $\vec{F}_N$ é perpendicular à rampa e atua no ponto de contato P, mas, na Fig. 11-8, o vetor foi deslocado ao longo da linha de ação até que a origem ficasse no centro de massa do corpo.
3. A força de atrito estático $\vec{f}_s$ atua no ponto de contato P e está dirigida para cima ao longo da rampa. (Você percebe por quê? Caso o corpo deslizasse no ponto P, o movimento seria *para baixo* ao longo da rampa. Assim, a força de atrito que se opõe a esse deslizamento deve estar dirigida *para cima* ao longo da rampa.)

Podemos escrever a segunda lei de Newton para as componentes ao longo do eixo x da Fig. 11-8 ($F_{res,x} = Ma_x$) como

$$f_s - Mg\operatorname{sen}\theta = Ma_{CM,x}. \tag{11-7}$$

A Eq. 11-7 tem duas incógnitas, f_s e $a_{CM,x}$. (*Não podemos* supor que o valor de f_s corresponde ao valor máximo, $f_{s,máx}$. Tudo que sabemos é que o valor de f_s é suficiente para que o corpo role suavemente para baixo na rampa, sem deslizar.)

Agora podemos usar a forma angular da segunda lei de Newton para descrever a rotação do corpo em torno de um eixo horizontal passando pelo centro de massa. Para começar, usamos a Eq. 10-41 ($\tau = r_\perp F$) para escrever os torques a que o corpo está submetido. A força de atrito $\vec{f}_s$ possui um braço de alavanca R e, portanto, produz um torque Rf_s que é positivo, já que tende a fazer o corpo girar no sentido anti-horário da Fig. 11-8. As forças $\vec{F}_g$ e $\vec{F}_N$ possuem braço de alavanca nulo em relação ao centro de massa e, portanto, produzem torque nulo. Assim, podemos escrever a forma angular da segunda lei de Newton ($\tau_{res} = I\alpha$) em relação a um eixo horizontal passando pelo centro de massa como

$$Rf_s = I_{CM}\alpha. \tag{11-8}$$

A Eq. 11-8 tem duas incógnitas, f_s e α.

Como o corpo está rolando suavemente, podemos usar a Eq. 11-6 ($a_{CM} = \alpha R$) para relacionar as incógnitas $a_{CM,x}$ e α. Entretanto, devemos ter cuidado, pois neste caso $a_{CM,x}$ é negativa (no sentido negativo do eixo x) e α é positiva (no sentido anti-horário). Assim, devemos fazer $\alpha = -a_{CM,x}/R$ na Eq. 11-8. Explicitando f_s, obtemos

$$f_s = -I_{CM}\frac{a_{CM,x}}{R^2}. \tag{11-9}$$

Substituindo f_s na Eq. 11-7 pelo lado direito da Eq. 11-9, obtemos:

$$a_{CM,x} = -\frac{g\operatorname{sen}\theta}{1 + I_{CM}/MR^2}. \tag{11-10}$$

Podemos usar a Eq. 11-10 para determinar a aceleração linear $a_{CM,x}$ de qualquer corpo que rola suavemente em um plano inclinado cujo ângulo com a horizontal é θ.

TESTE 2

Os discos A e B são iguais e rolam inicialmente em um piso horizontal com a mesma velocidade. O disco A sobe uma rampa com atrito e atinge uma altura máxima h; o disco B sobe uma rampa igual à primeira, mas sem atrito. A altura máxima atingida pelo disco B é maior, menor ou igual a h?

Exemplo

Bola que desce uma rampa

Uma bola homogênea, de massa $M = 6{,}00$ kg e raio R, rola suavemente, a partir do repouso, descendo uma rampa inclinada de ângulo $\theta = 30{,}0°$ (Fig. 11-8).

(a) A bola desce uma distância vertical $h = 1{,}20$ m para chegar à base da rampa. Qual é a velocidade da bola ao chegar à base da rampa?

IDEIAS-CHAVE

A energia mecânica E do sistema bola–Terra é conservada quando a bola rola rampa abaixo. Isso acontece porque a única força que realiza trabalho sobre a bola é a força gravitacional, que é uma força conservativa. A força normal exercida pela rampa sobre a bola não realiza trabalho porque é perpendicular à trajetória da bola. A força de atrito exercida pela rampa sobre a bola não transforma energia em energia térmica porque a bola não desliza (a bola *rola suavemente*).

Sendo assim, podemos escrever a lei de conservação da energia mecânica ($E_f = E_i$) na forma

$$K_f + U_f = K_i + U_i, \qquad (11\text{-}11)$$

onde os índices f e i se referem aos valores final (na base da rampa) e inicial (no alto da rampa), respectivamente. A energia potencial gravitacional é, inicialmente, $U_i = Mgh$ (onde M é a massa da bola). Na situação final, $U_f = 0$. A energia cinética é, inicialmente, $K_i = 0$. Para calcular a energia cinética final K_f, precisamos de uma ideia adicional: como a bola rola, a energia cinética envolve translação *e* rotação, de modo que devemos incluir as duas formas de energia cinética usando o lado direito da Eq. 11-5.

Cálculos Substituindo todas essas expressões na Eq. 11-11, obtemos

$$(\tfrac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \tfrac{1}{2}Mv_{CM}^2) + 0 = 0 + Mgh, \qquad (11\text{-}12)$$

em que I_{CM} é o momento de inércia da bola em relação a um eixo que passa pelo centro de massa, v_{CM} é a velocidade pedida na base da rampa e ω é a velocidade angular na base da rampa.

Como a bola rola suavemente, podemos usar a Eq. 11-2 para substituir ω por v_{CM}/R e reduzir o número de incógnitas da Eq. 11-12. Fazendo isso, substituindo I_{CM} por $\frac{2}{5}MR^2$ (de acordo com a Tabela 10-2*f*) e explicitando v_{CM}, obtemos

$$v_{CM} = \sqrt{(\tfrac{10}{7})gh} = \sqrt{(\tfrac{10}{7})(9{,}8\ \text{m/s}^2)(1{,}20\ \text{m})}$$
$$= 4{,}10\ \text{m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Note que a resposta não depende de M nem de R.

(b) Quais são o módulo e a orientação da força de atrito que age sobre a bola quando desce a rampa rolando?

IDEIA-CHAVE

Como a bola rola suavemente, a força de atrito que age sobre a bola é dada pela Eq. 11-9.

Cálculos Para usar a Eq. 11-9, precisamos conhecer a aceleração da bola, $a_{CM,x}$, que pode ser calculada com o auxílio da Eq. 11-10:

$$a_{CM,x} = -\frac{g \operatorname{sen}\theta}{1 + I_{CM}/MR^2} = -\frac{g \operatorname{sen}\theta}{1 + \frac{2}{5}MR^2/MR^2}$$
$$= -\frac{(9{,}8\ \text{m/s}^2)\operatorname{sen} 30{,}0°}{1 + \frac{2}{5}} = -3{,}50\ \text{m/s}^2.$$

Note que não precisamos conhecer nem a massa M nem o raio R da bola para calcular $a_{CM,x}$. Isso significa que uma bola de qualquer tamanho e qualquer massa (contanto que seja homogênea) tem a mesma aceleração para baixo em uma rampa com uma inclinação de 30,0°, desde que role suavemente.

Podemos agora resolver a Eq. 11-9 para obter o valor do módulo da força de atrito:

$$f_s = -I_{CM}\frac{a_{CM,x}}{R^2} = -\tfrac{2}{5}MR^2\frac{a_{CM,x}}{R^2} = -\tfrac{2}{5}Ma_{CM,x}$$
$$= -\tfrac{2}{5}(6{,}00\ \text{kg})(-3{,}50\ \text{m/s}^2) = 8{,}40\ \text{N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Note que precisamos da massa M, mas não do raio R. Isso significa que a força de atrito exercida sobre qualquer bola de 6,00 kg que rolar suavemente em uma rampa de 30,0° será 8,40 N, independentemente do raio da bola.

11-5 O Ioiô

O ioiô é um laboratório de física que cabe no bolso. Se um ioiô desce rolando uma distância h ao longo da corda, perde uma quantidade de energia potencial igual a mgh, mas ganha energia cinética tanto na forma de translação ($\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$) como de rotação ($\frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$). Quando volta a subir, perde energia cinética e readquire energia potencial.

Nos ioiôs modernos, a corda não está presa no eixo, mas forma uma laçada em torno do eixo. Quando o ioiô "bate" na extremidade inferior da corda, uma força dirigida para cima, exercida pela corda sobre o eixo, interrompe a descida. O ioiô passa a girar, com o eixo enlaçado pela corda, apenas com energia cinética rotacional. O ioiô se mantém girando ("adormecido") até ser "despertado" por um puxão na corda, que faz a corda se enrolar no eixo e, consequentemente, o ioiô voltar a subir. A energia cinética rotacional do ioiô na extremidade inferior da corda (e, portanto, o tempo de "sono") pode ser consideravelmente aumentada arremessando o ioiô para baixo para que comece a descer a corda com velocidade inicial linear v_{CM} e velocidade angular ω em vez de rolar para baixo a partir do repouso.

Figura 11-9 (*a*) Um ioiô visto de lado. A corda, considerada de espessura desprezível, está enrolada em um eixo de raio R_0. (*b*) Diagrama de corpo livre do ioiô durante a descida. Apenas o eixo é mostrado.

Para obter uma expressão para a aceleração linear a_{CM} de um ioiô que rola para baixo em uma corda, podemos usar a segunda lei de Newton, como fizemos para o corpo que rolava para baixo na rampa da Fig. 11-8. A análise é a mesma, exceto pelo seguinte:

1. Em vez de descer rolando por uma rampa que faz um ângulo θ com a horizontal, o ioiô desce por uma corda que faz um ângulo $\theta = 90°$ com a horizontal.
2. Em vez de rolar sobre a superfície externa de raio R, o ioiô rola em torno de um eixo de raio R_0 (Fig. 11-9*a*).
3. Em vez de ser freado pela força de atrito $\vec{f}_s$, o ioiô é freado pela força $\vec{T}$ que a corda exerce sobre ele (Fig. 11-9*b*).

A análise do movimento novamente nos levaria à Eq. 11-10. Assim, vamos apenas mudar a notação da Eq. 11-10 e fazer $\theta = 90°$ para escrever a aceleração linear como

$$a_{CM} = -\frac{g}{1 + I_{CM}/MR_0^2}, \qquad (11\text{-}13)$$

em que I_{CM} é o momento de inércia do ioiô em relação a um eixo passando pelo centro e M é a massa. Um ioiô possui a mesma aceleração para baixo quando está subindo de volta.

11-6 Revisão do Torque

No Capítulo 10, definimos o torque τ de um corpo rígido capaz de girar em torno de um eixo fixo, com todas as partículas do corpo sendo forçadas a se mover em trajetórias circulares com centro nesse eixo. Agora, vamos ampliar a definição de torque para aplicá-la a uma partícula que se move em uma trajetória qualquer em relação a um *ponto* fixo (em vez de um eixo fixo). A trajetória não precisa mais ser circular e devemos escrever o torque como um vetor $\vec{\tau}$ que pode ter qualquer orientação.

A Fig. 11-10*a* mostra uma partícula no ponto A de um plano xy. Uma única força $\vec{F}$ nesse plano age sobre a partícula e a posição da partícula em relação à origem O é dada pelo vetor posição $\vec{r}$. O torque $\vec{\tau}$ que age sobre a partícula em relação ao ponto fixo O é uma grandeza vetorial definida por

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{(definição de torque).} \qquad (11\text{-}14)$$

Podemos calcular o produto vetorial envolvido na definição de $\vec{\tau}$ usando as regras do produto vetorial que aparecem na Seção 3-8. Para determinar a orientação de $\vec{\tau}$, deslocamos o vetor $\vec{F}$ (sem mudar a orientação) até que a origem do vetor esteja no

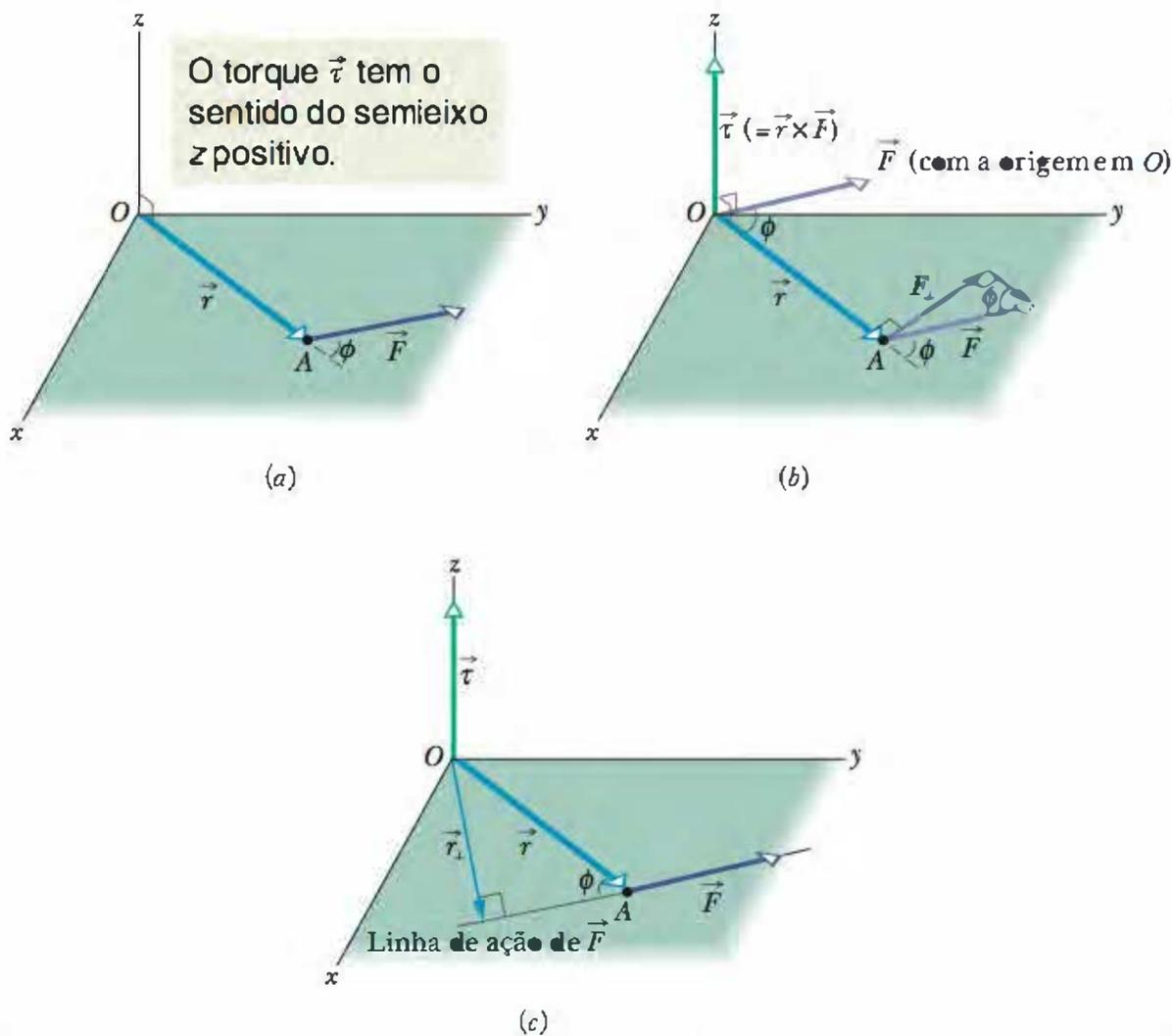



Figura 11-10 Definição do torque. (*a*) Uma força $\vec{F}$, no plano *xy*, age sobre uma partícula situada no ponto *A*. (*b*) Essa força produz um torque $\vec{\tau}(= \vec{r} \times \vec{F})$ sobre a partícula em relação à origem *O*. De acordo com a regra da mão direita para o produto vetorial, o vetor torque aponta no sentido positivo do eixo *z*. O módulo é dado por $rF_\perp$ em (*b*) e por $r_\perp F$ em (*c*).

ponto *O*, o que faz coincidirem as origens dos dois vetores envolvidos no produto vetorial, como na Fig. 11-10*b*. Em seguida, usamos a regra da mão direita para produtos vetoriais da Fig. 3-19*a*, envolvendo com os dedos da mão direita o vetor $\vec{r}$ (o primeiro vetor no produto) com as pontas dos dedos apontando para $\vec{F}$ (o segundo vetor). O polegar direito esticado mostra a orientação de $\vec{\tau}$. Na Fig. 11-10*b*, a orientação de $\vec{\tau}$ é o sentido positivo do eixo *z*.

Para determinar o módulo de $\vec{\tau}$, aplicamos a expressão geral da Eq. 3-27 ($c = ab$ sen ϕ), o que nos dá

$$\tau = rF \operatorname{sen} \phi, \tag{11-15}$$

em que ϕ é o menor dos ângulos entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$ quando as origens dos vetores coincidem. De acordo com a Fig. 11-10*b*, a Eq. 11-15 pode ser escrita na forma

$$\tau = rF_\perp, \tag{11-16}$$

em que $F_\perp$ ($= F$ sen ϕ) é a componente de $\vec{F}$ perpendicular a $\vec{r}$. De acordo com a Fig. 11-10*c*, a Eq. 11-15 também pode ser escrita na forma

$$\tau = r_\perp F, \tag{11-17}$$

em que $r_\perp$ ($= r$ sen ϕ) é o braço de alavanca de $\vec{F}$ (a distância perpendicular entre o ponto *O* e a linha de ação de $\vec{F}$).

TESTE 3

O vetor posição $\vec{r}$ de uma partícula aponta no sentido positivo de um eixo *z*. Se o torque a que a partícula está submetida (a) é zero, (b) aponta no sentido negativo de *x* e (c) aponta no sentido negativo de *y*, qual é a orientação da força responsável pelo torque?

Exemplo

Torque exercido por uma força sobre uma partícula

Na Fig. 11-11a, três forças, todas de módulo 2,0 N, agem sobre uma partícula. A partícula está no plano xy, em um ponto A dado por um vetor posição $\vec{r}$ tal que $r = 3,0$ m e $\theta = 30°$. A força $\vec{F}_1$ é paralela ao eixo x, a força $\vec{F}_2$ é paralela ao eixo z e a força $\vec{F}_3$ é paralela ao eixo y. Qual é o torque, em relação à origem O, produzido por cada uma das três forças?

IDEIA-CHAVE

Como os três vetores das forças não estão no mesmo plano, não podemos calcular os torques como no Capítulo 10. Em vez disso, devemos usar produtos vetoriais, com módulos dados pela Eq. 11-15 ($\tau = rF$ sen ϕ) e orientações dadas pela regra da mão direita para produtos vetoriais.

Cálculos Como estamos interessados em calcular os torques em relação à origem O, o vetor $\vec{r}$ usado para calcular os produtos vetoriais é o próprio vetor posição que aparece no enunciado do problema. Para determinar o ângulo ϕ entre a orientação de $\vec{r}$ e a orientação de cada força, deslocamos os vetores força da Fig. 11-11a, um de cada vez, para que suas origens coincidam com o ponto O. As Figs. 11-11b, 11-11c e 11.11d, que são vistas superiores do plano xz, mostram os vetores força deslocados $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e

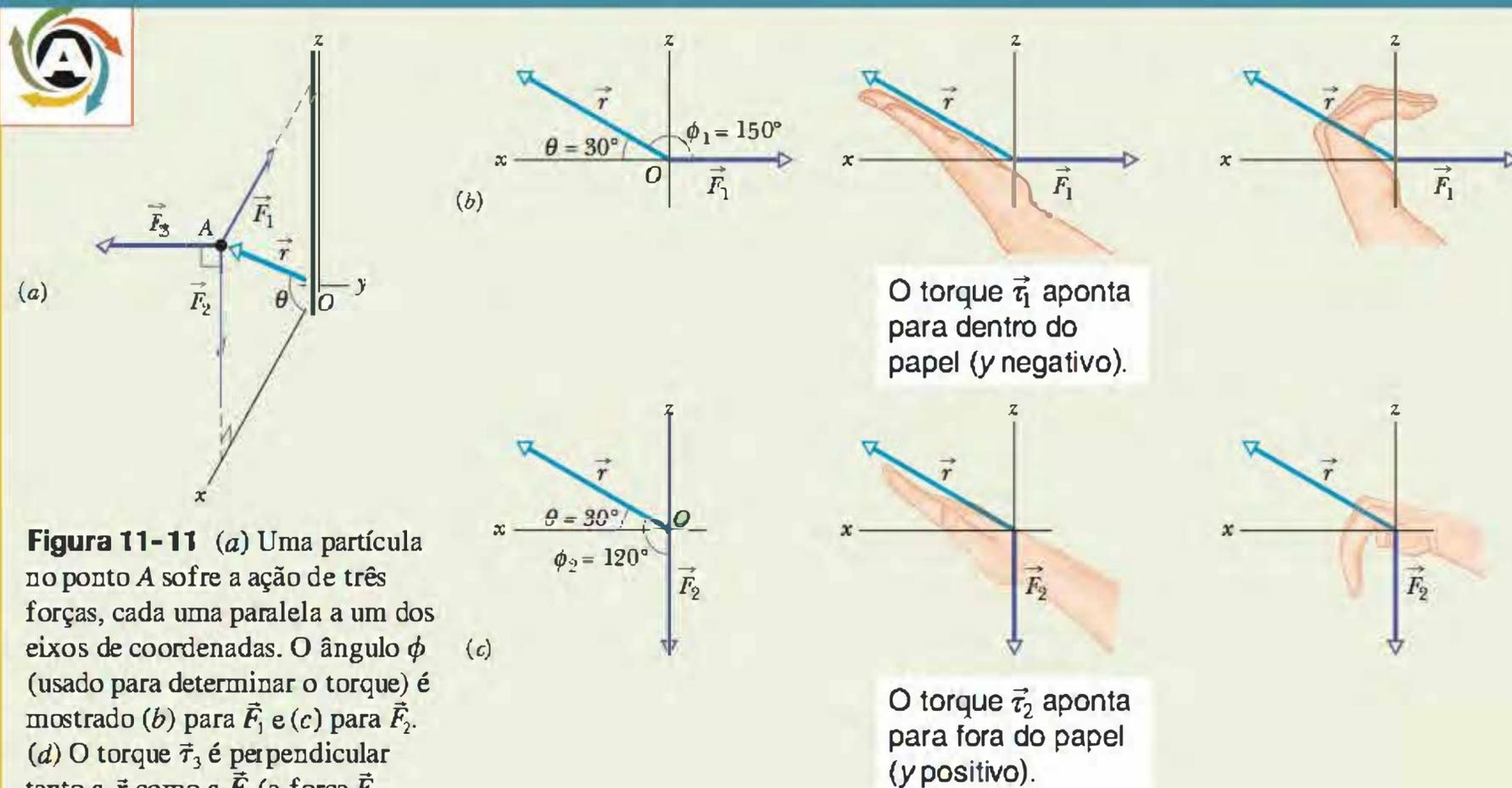



Figura 11-11 (a) Uma partícula no ponto A sofre a ação de três forças, cada uma paralela a um dos eixos de coordenadas. O ângulo ϕ (usado para determinar o torque) é mostrado (b) para $\vec{F}_1$ e (c) para $\vec{F}_2$. (d) O torque $\vec{\tau}_3$ é perpendicular tanto a $\vec{r}$ como a $\vec{F}_3$ (a força $\vec{F}_3$ aponta para dentro do papel). (e) Os torques (em relação à origem O) que agem sobre a partícula.

11-7 Momento Angular

Como vimos em capítulos anteriores, o conceito de momento linear $\vec{p}$ e a lei de conservação do momento linear são ferramentas extremamente poderosas, que permitem prever, por exemplo, o resultado de uma colisão de dois carros sem conhecer os detalhes da colisão. Vamos iniciar agora a discussão de uma grandeza correspondente a $\vec{p}$ para movimentos de rotação, terminando na Seção 11-11 com uma lei, para movimentos de rotação, análoga à lei de conservação do momento linear.

A Fig. 11-12 mostra uma partícula de massa m e momento linear $\vec{p}$ $(= m\vec{v})$ que está passando pelo ponto A de um plano xy. O **momento angular** $\vec{\ell}$ da partícula em relação à origem O é uma grandeza vetorial definida através da equação

$\vec{F}_3$, respectivamente. (Observe como isso torna muito mais fácil visualizar os ângulos.) Na Fig. 11-11*d*, o ângulo entre as orientações de $\vec{r}$ e $\vec{F}_3$ é 90° e o símbolo ⊗ significa que o sentido de $\vec{F}_3$ é para dentro do papel. Se o sentido da força fosse para fora do papel, ela seria representada pelo símbolo ⊙.

Aplicando a Eq. 11-15 a cada força, obtemos os módulos dos torques:

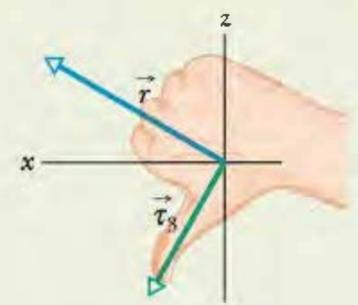
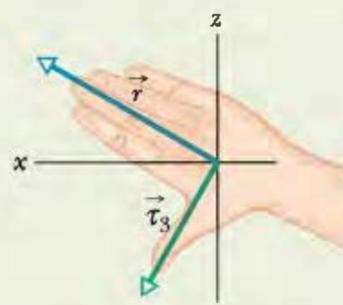
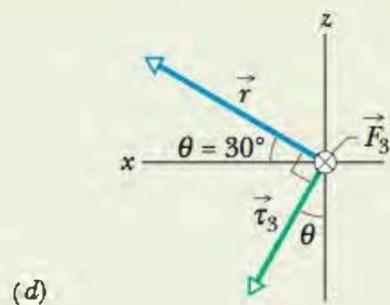
$$\tau_1 = rF_1 \operatorname{sen} \phi_1 = (3{,}0\ \text{m})(2{,}0\ \text{N})(\operatorname{sen} 150°) = 3{,}0\ \text{N}\cdot\text{m},$$

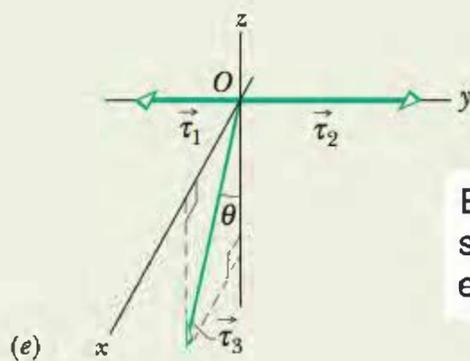
$$\tau_2 = rF_2 \operatorname{sen} \phi_2 = (3{,}0\ \text{m})(2{,}0\ \text{N})(\operatorname{sen} 120°) = 5{,}2\ \text{N}\cdot\text{m},$$

e

$$\tau_3 = rF_3 \operatorname{sen} \phi_3 = (3{,}0\ \text{m})(2{,}0\ \text{N})(\operatorname{sen} 90°) = 6{,}0\ \text{N}\cdot\text{m}. \quad \text{(Resposta)}$$

Para determinar a orientação desses torques, usamos a regra da mão direita, posicionando os dedos da mão direita em volta de $\vec{r}$ de modo a que apontem para $\vec{F}$ na direção do *menor* dos ângulos entre os dois vetores. O polegar aponta na direção do torque. Assim, $\vec{\tau}_1$ aponta para dentro do papel na Fig. 11-11*b*; $\vec{\tau}_2$ aponta para fora do papel na Fig. 11-11*c*; $\vec{\tau}_3$ tem a orientação mostrada na Fig. 11-11*d*. Os três vetores torque são mostrados na Fig. 11-11*e*.

(*d*)

O torque $\vec{\tau}_3$ está no plano *xz*.

(*e*)

Estes são os três torques que agem sobre a partícula, todos calculados em relação à origem *O*.

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \quad \text{(definição de momento angular)}. \qquad (11\text{-}18)$$

onde $\vec{r}$ é o vetor posição da partícula em relação a *O*. Quando a partícula se move em relação a *O* na direção do momento linear $\vec{p}$ (= $m\vec{v}$), o vetor posição $\vec{r}$ gira em torno de *O*. Observe que, para possuir momento angular em relação a *O*, a partícula *não precisa* estar girando em torno de *O*. Comparando as Eqs. 11-14 e 11-18, vemos que a relação entre o momento angular e o momento linear é a mesma que entre o torque e a força. A unidade de momento angular do SI é o quilograma-metro quadrado por segundo (kg · m²/s), que equivale ao joule-segundo (J · s).

(a)

(b)

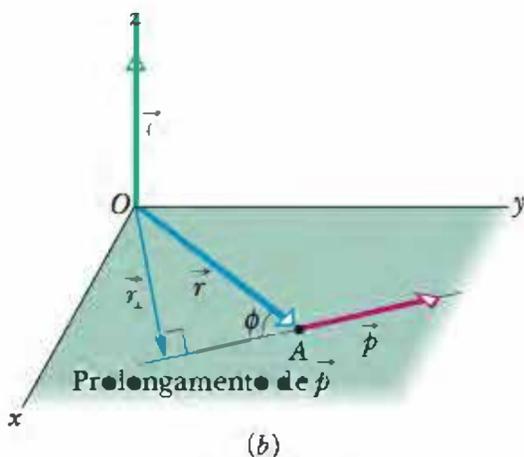
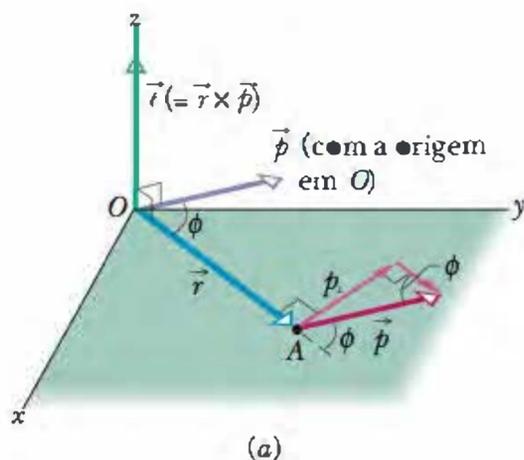



Figura 11-12 Definição de momento angular. Uma partícula ao passar pelo ponto A possui momento linear $\vec{p}\,(=m\vec{v})$, com o vetor $\vec{p}$ no plano xy. A partícula possui momento angular $\vec{\ell}\,(=\vec{r}\times\vec{p})$ em relação à origem O. Pela regra da mão direita, o vetor momento angular aponta no sentido positivo de z. (a) O módulo de $\vec{\ell}$ é dado por $\ell = rp_\perp = rmv_\perp$. (b) O módulo de $\vec{\ell}$ também é dado por $\ell = r_\perp p = r_\perp mv$.

Para determinar a orientação do vetor momento angular $\vec{\ell}$ na Fig. 11-12, deslocamos o vetor $\vec{p}$ até que a origem coincida com o ponto O. Em seguida, usamos a regra da mão direita para produtos vetoriais envolvendo o vetor $\vec{r}$ com os dedos da mão direita apontados para o vetor $\vec{p}$. O dedo polegar esticado mostra que $\vec{\ell}$ aponta no sentido positivo do eixo z da Fig. 11-12. O sentido positivo corresponde a uma rotação do vetor posição $\vec{r}$ no sentido anti-horário em torno do eixo z, associada ao movimento da partícula. (O sentido negativo de $\vec{\ell}$ corresponderia a uma rotação de $\vec{r}$ em torno do eixo z no sentido horário.)

Para determinar o módulo de $\vec{\ell}$, usamos a Eq. 3-27 para escrever

$$\ell = rmv \operatorname{sen}\phi, \tag{11-19}$$

onde ϕ é o menor ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{p}$ quando os dois vetores têm uma origem comum. De acordo com a Fig. 11-12a, a Eq. 11-19 pode ser escrita na forma

$$\ell = rp_\perp = rmv_\perp, \tag{11-20}$$

onde $p_\perp$ é a componente de $\vec{p}$ perpendicular a $\vec{r}$ e $v_\perp$ é a componente de $\vec{v}$ perpendicular a $\vec{r}$. De acordo com a Fig. 11-12b, a Eq. 11-19 pode ser escrita na forma

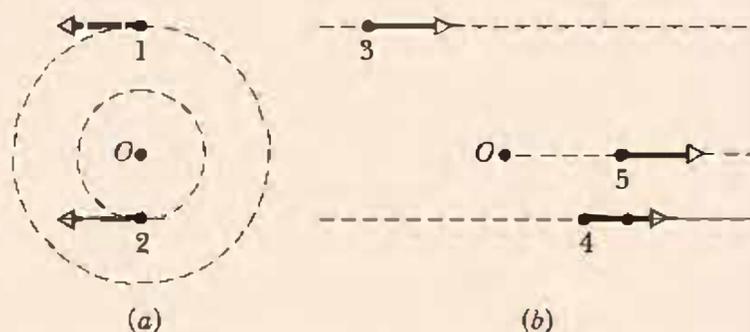
$$\ell = r_\perp p = r_\perp mv, \tag{11-21}$$

onde $r_\perp$ é a distância perpendicular entre O e a extensão de $\vec{p}$.

Note o seguinte: (1) o momento angular tem significado apenas em relação a um ponto dado; (2) o vetor momento angular é sempre perpendicular ao plano formado pelos vetores posição e momento linear, $\vec{r}$ e $\vec{p}$.

TESTE 4

Na parte a da figura, as partículas 1 e 2 giram em torno do ponto O em sentidos opostos, em circunferências de 2 m e 4 m de raio, respectivamente. Na parte b, as partículas 3 e 4 se movem na mesma direção, em linha reta, a 4 m e 2 m de distância perpendicular do ponto O, respectivamente. A partícula 5 se afasta de O ao longo de uma linha reta que passa por O. As cinco partículas têm a mesma massa e a mesma velocidade constante. (a) Ordene as partículas de acordo com o módulo do momento angular em relação a O, em ordem decrescente. (b) Quais das partículas possuem momento angular negativo em relação a O?

(a) (b)

Exemplo

Momento angular de um sistema de duas partículas

A Fig. 11-13 mostra uma vista superior de duas partículas que se movem com velocidade constante ao longo de trajetórias horizontais. A partícula 1, com um momento de módulo $p_1 = 5{,}0$ kg · m/s, tem um vetor posição $\vec{r}_1$ e passará a 2,0 m de distância do ponto O. A partícula 2, com um momento de módulo $p_2 = 2{,}0$ kg · m/s, tem um vetor posição $\vec{r}_2$ e passará a 4,0 m de distância do ponto O. Qual é o módulo e a orientação do momento angular total $\vec{L}$ em relação ao ponto O do sistema formado pelas duas partículas?

IDEIA-CHAVE

Para determinar $\vec{L}$, basta calcular os momentos angulares das duas partículas, $\vec{\ell}_1$ e $\vec{\ell}_2$, e somá-los. Para calcular os módulos dos momentos angulares, podemos usar qualquer das Eqs. 11-18 a 11-21. Entretanto, a Eq. 11-21 é a mais fácil neste caso, já que conhecemos as distâncias perpendiculares $r_{1\perp}$ (= 2,0 m) e $r_{2\perp}$ (= 4,0 m) e os módulos dos momentos lineares, p_1 e p_2.

Cálculos No caso da partícula 1, a Eq. 11-21 nos dá

$$\ell_1 = r_{\perp 1}p_1 = (2{,}0\text{ m})(5{,}0\text{ kg}\cdot\text{m/s})$$
$$= 10\text{ kg}\cdot\text{m}^2\text{/s}.$$

Para determinar a orientação do vetor $\vec{\ell}_1$, usamos a Eq. 11-18 e a regra da mão direita para produtos vetoriais. No caso de $\vec{r}_1 \times \vec{p}_1$, o produto vetorial aponta para fora do papel, perpendicularmente ao plano da Fig. 11-13. Este é o sentido positivo, já que o vetor posição $\vec{r}_1$ da partícula gira no sentido anti-horário em relação a O quando a partícula 1 se move. Assim, o vetor momento angular da partícula 1 é

$$\ell_1 = +10\text{ kg}\cdot\text{m}^2\text{/s}.$$

Analogamente, o módulo de $\vec{\ell}_2$ é

$$\ell_2 = r_{\perp 2}p_2 = (4{,}0\text{ m})(2{,}0\text{ kg}\cdot\text{m/s})$$
$$= 8{,}0\text{ kg}\cdot\text{m}^2\text{/s},$$

e o produto vetorial $\vec{r}_2 \times \vec{p}_2$ aponta para dentro do papel, que é o sentido negativo, já que o vetor posição $\vec{r}_2$ gira no sentido horário em relação a O quando a partícula 2 se move.

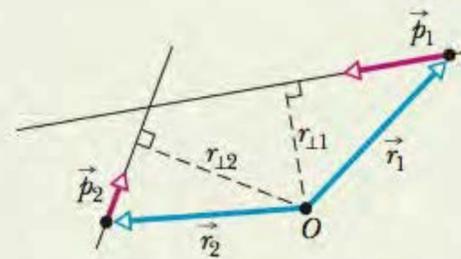



Figura 11-13 Duas partículas passam nas proximidades do ponto O.

Assim, o vetor momento angular da partícula 2 é

$$\ell_2 = -8{,}0\text{ kg}\cdot\text{m}^2\text{/s}.$$

O momento angular total do sistema formado pelas duas partículas é

$$L = \ell_1 + \ell_2 = +10\text{ kg}\cdot\text{m}^2\text{/s} + (-8{,}0\text{ kg}\cdot\text{m}^2\text{/s})$$
$$= +2{,}0\text{ kg}\cdot\text{m}^2\text{/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

O sinal positivo indica que o momento angular resultante do sistema em relação ao ponto O aponta para fora do papel.

11-8 Segunda Lei de Newton para Rotações

A segunda lei de Newton escrita na forma

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{(partícula isolada)} \qquad (11\text{-}22)$$

expressa a relação entre força e momento linear para uma partícula isolada. Temos visto um suficiente paralelismo entre grandezas lineares e angulares para estar seguros de que existe também uma relação entre torque e momento angular. Guiados pela Eq. 11-22, podemos até mesmo conjeturar que essa relação seja a seguinte:

$$\vec{\tau}_{\text{res}} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} \quad \text{(partícula isolada).} \qquad (11\text{-}23)$$

A Eq. 11-23 é, de fato, uma forma da segunda lei de Newton que se aplica ao movimento de rotação de uma partícula isolada:

A soma (vetorial) dos torques que agem sobre uma partícula é igual à taxa de variação no tempo do momento angular da partícula.

A Eq. 11-23 não faz sentido a menos que o torque $\vec{\tau}_{\text{res}}$ e o momento angular $\vec{\ell}$ sejam definidos em relação ao mesmo ponto, que, em geral, é a origem do sistema de coordenadas escolhido.

Demonstração da Equação 11-23

Começamos com a Eq. 11-18, a definição do momento angular de uma partícula:

$$\vec{\ell} = m(\vec{r} \times \vec{v}),$$

em que $\vec{r}$ é o vetor posição da partícula e $\vec{v}$ é a velocidade da partícula. Derivando*

* Ao derivar um produto vetorial, é importante manter a ordem das grandezas ($\vec{r}$ e $\vec{v}$, no caso) que formam o produto. (Veja a Eq. 3-28.)

ambos os membros em relação ao tempo t, obtemos:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}\right). \qquad (11\text{-}24)$$

Entretanto, $d\vec{v}/dt$ é a aceleração $\vec{a}$ da partícula e $d\vec{r}/dt$ é a velocidade $\vec{v}$. Assim, podemos escrever a Eq. 11-24 na forma

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{v}).$$

Acontece que $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ (o produto vetorial de qualquer vetor por si próprio é zero, pois o ângulo entre os dois vetores é necessariamente zero). Assim, temos:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times m\vec{a}.$$

Podemos usar a segunda lei de Newton ($\vec{F}_{res} = m\vec{a}$) para substituir $m\vec{a}$ pela soma das forças que atuam sobre a partícula, obtendo

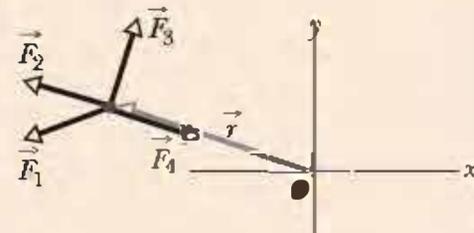
$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{res} = \sum(\vec{r} \times \vec{F}). \qquad (11\text{-}25)$$

Em que o símbolo Σ indica que devemos somar os produtos vetoriais $\vec{r} \times \vec{F}$ para todas as forças. Entretanto, de acordo com a Eq. 11-14, cada um desses produtos vetoriais é o torque associado à força correspondente. Assim, a Eq.11-25 nos diz que

$$\vec{\tau}_{res} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}.$$

Esta é a Equação 11-23, a relação que queríamos demonstrar.

TESTE 5

A figura mostra o vetor posição $\vec{r}$ de uma partícula em um certo instante e quatro opções para a orientação de uma força que deve acelerar a partícula. As quatro opções estão no plano xy. (a) Ordene as opções de acordo com o módulo da taxa de variação com o tempo ($d\vec{\ell}/dt$) que produzem no momento angular da partícula em relação ao ponto O, em ordem decrescente. (b) Qual das opções está associada a uma taxa de variação negativa do momento angular em relação ao ponto O?

Exemplo

Torque, derivada do momento angular e a queda de um pinguim

Na Fig. 11-14, um pinguim de massa m cai, sem velocidade inicial, do ponto A, situado a uma distância horizontal D da origem O de um sistema de coordenadas xyz. (O sentido positivo do eixo z é para fora do papel.)

(a) Qual é o momento angular $\vec{\ell}$ do pinguim durante a queda, em relação ao ponto O?

IDEIA-CHAVE

Tratando o pinguim como uma partícula, seu momento angular $\vec{\ell}$ é dado pela Eq. 11-18 ($\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$), onde $\vec{r}$ é o vetor posição do pinguim (que vai de O até o pinguim) e $\vec{p}$ é o momento linear do pinguim. (O pinguim possui um momento *angular* em relação a O, embora esteja se movendo em linha reta, porque o vetor $\vec{r}$ gira em torno de O durante a queda.)

Cálculos Para determinar o módulo de $\vec{\ell}$, podemos usar qualquer uma das equações escalares obtidas a partir da Eq. 11-18, ou seja, as Eqs. 11-19 a 11-21. Entretanto, a Eq. 11-21 ($\ell = r_\perp mv$) é a mais fácil de usar porque a distância perpendicular $r_\perp$ entre O e o prolongamento do vetor $\vec{p}$ é um dos dados do problema (a distância D). A velocidade

de um objeto que cai a partir do repouso durante um intervalo de tempo t é $v = gt$. Podemos escrever a Eq. 11-21 em termos dos valores conhecidos na forma

$$\ell = r_\perp mv = Dmgt. \qquad \text{(Resposta)}$$

Para determinar a orientação de $\vec{\ell}$, usamos a regra da mão direita para o produto vetorial $\vec{r} \times \vec{p}$ da Eq. 11-18. Deslocamos mentalmente o vetor $\vec{p}$ até que a origem do vetor esteja no ponto O e envolvemos $\vec{r}$ com os dedos da mão direita apontando na direção de $\vec{p}$. O dedo polegar estendido aponta para dentro do papel, mostrando que o produto $\vec{r} \times \vec{p}$ e, portanto, $\vec{\ell}$ tem essa orientação, que coincide com o sentido negativo do eixo z. Representamos $\vec{\ell}$ pelo símbolo ⊗ no ponto O. Apenas o módulo do vetor $\vec{\ell}$ varia com o tempo; a orientação permanece inalterada.

(b) Qual é o torque $\vec{\tau}$ em relação ao ponto O a que é submetido o pinguim devido à força gravitacional?

IDEIAS-CHAVE

(1) O torque é dado pela Eq. 11-14 ($\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$), onde agora a força é $\vec{F}_g$. (2) A força $\vec{F}_g$ produz um torque sobre o pinguim, embora o animal esteja se movendo em linha reta, porque $\vec{r}$ gira em torno de O durante a queda.

Cálculos Para determinar o módulo de $\vec{\tau}$, podemos usar qualquer uma das equações escalares obtidas a partir da Eq. 11-14, ou seja, as Eqs. 11-15 a 11-17. Entretanto, a Eq. 11-17 ($\tau = r_\perp F$) é a mais fácil de usar porque a distância perpendicular $r_\perp$ entre O e a linha de ação de $\vec{F}_g$ é um dos dados do problema (a distância D). Substituindo $r_\perp$ por D e o módulo de $\vec{F}_g$ por mg, podemos escrever a Eq. 11-17 na forma

$$\tau = DF_g = Dmg. \qquad \text{(Resposta)}$$

Usando a regra da mão direita para o produto vetorial $\vec{r} \times \vec{F}$ da Eq. 11-14, descobrimos que a orientação de $\vec{\tau}$ é o sentido negativo do eixo z, a mesma de $\vec{\ell}$.

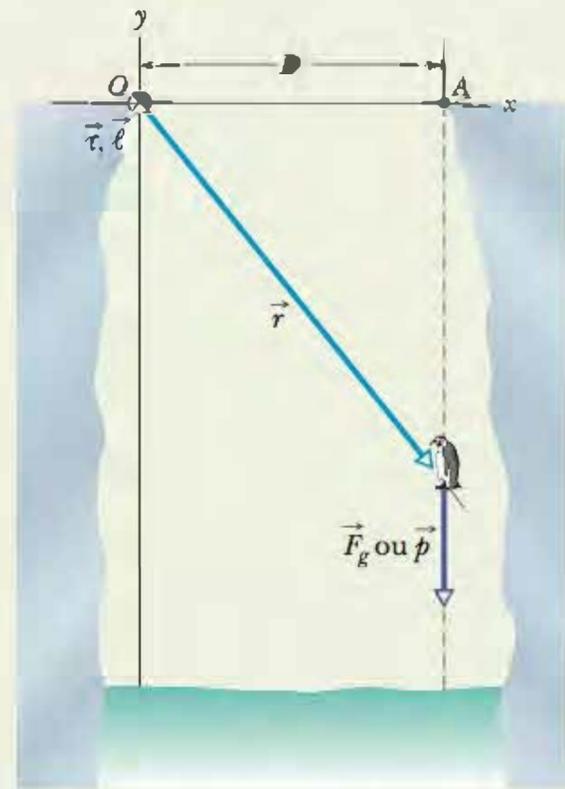



Figura 11-14 Um pinguim cai verticalmente de um ponto A. O torque $\vec{\tau}$ e o momento angular $\vec{\ell}$ do pinguim em relação à origem O apontam para dentro do plano do papel e passam pelo ponto O.

Os resultados que obtivemos nos itens (a) e (b) devem ser coerentes com a segunda lei de Newton para rotações, Eq. 11-23 ($\vec{\tau}_{res} = d\vec{\ell}/dt$). Para verificar se os módulos calculados estão corretos, escrevemos a Eq. 11-23 na forma de componentes em relação ao eixo z e usamos o resultado $\ell = Dmgt$. Temos:

$$\tau = \frac{d\ell}{dt} = \frac{d(Dmgt)}{dt} = Dmg,$$

que é o módulo que encontramos para $\vec{\tau}$. Para verificar se as orientações estão corretas, observamos que, de acordo com a Eq. 11-23, $\vec{\tau}$ e $d\vec{\ell}/dt$ devem ter a mesma orientação. Assim, $\vec{\tau}$ e $\vec{\ell}$ também devem ter a mesma orientação, o que corresponde exatamente ao resultado obtido.

11-9 O Momento Angular de um Sistema de Partículas

Voltamos agora nossa atenção para o momento angular de um sistema de partículas em relação a uma origem. O momento angular total $\vec{L}$ do sistema é a soma (vetorial) dos momentos angulares $\vec{\ell}$ das partículas do sistema:

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \cdots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i. \qquad (11\text{-}26)$$

Os momentos angulares das partículas podem variar com o tempo por causa de forças externas ou de interações entre as partículas. Podemos determinar a variação total de $\vec{L}$ derivando a Eq. 11-26 em relação ao tempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{\ell}_i}{dt}. \qquad (11\text{-}27)$$

De acordo com a Eq. 11-23, $d\vec{\ell}_i/dt$ é igual ao torque resultante $\vec{\tau}_{res}$ a que está submetida a partícula de ordem i. Assim, a Eq. 11-27 pode ser escrita na forma

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_{res,i}. \tag{11-28}$$

Isso significa que a taxa de variação do momento angular $\vec{L}$ do sistema é igual à soma vetorial dos torques a que estão submetidas as partículas do sistema. Esses torques podem ser torques *internos* (produzidos por forças associadas a outras partículas do sistema) e torques *externos* (produzidos por forças associadas a corpos externos ao sistema). Como as forças exercidas pelas partículas do sistema sempre aparecem na forma de pares de forças da terceira lei, a soma dos torques produzidos por essas forças é nula. Assim, os únicos torques que podem fazer variar o momento angular total $\vec{L}$ do sistema são os torques produzidos por forças externas ao sistema.

Chamando de $\vec{\tau}_{res}$ o torque externo resultante, ou seja, a soma vetorial dos torques externos que agem sobre todas as partículas do sistema, a Eq. 11-28 pode ser escrita na forma

$$\vec{\tau}_{res} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{(sistema de partícula).} \tag{11-29}$$

que é a segunda lei de Newton para rotações. Em palavras:

> O torque externo resultante $\vec{\tau}_{res}$ que age sobre um sistema de partículas é igual à taxa de variação com o tempo do momento angular total $\vec{L}$ do sistema.

A Eq. 11-29 é análoga à Eq. 9-27 ($\vec{F}_{res} = d\vec{P}/dt$), mas requer um cuidado adicional: os torques e o momento angular do sistema devem ser medidos em relação à mesma origem. Se o centro de massa do sistema não está acelerado em relação a um referencial inercial, essa origem pode ser qualquer ponto. Caso, porém, o centro de massa do sistema esteja acelerado, a origem deve ser o centro de massa. Considere, por exemplo, uma roda como o sistema de partículas. Se a roda está girando em torno de um eixo fixo em relação ao solo, a origem usada para aplicar a Eq. 11-29 pode ser qualquer ponto estacionário em relação ao solo. Entretanto, se a roda estiver girando em torno de um eixo acelerado (como acontece, por exemplo, quando a roda está descendo uma rampa), a origem deve ser o centro de massa da roda.

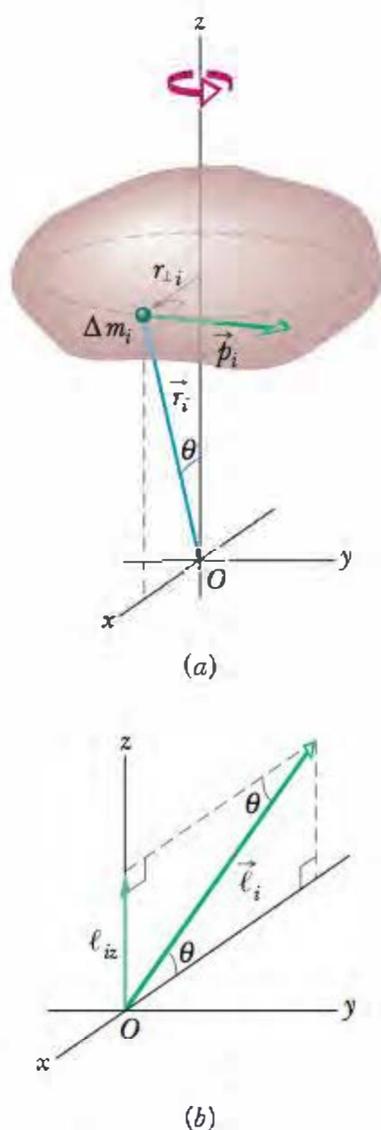



Figura 11-15 (*a*) Um corpo rígido gira em torno de um eixo z com velocidade angular ω. Um elemento de massa Δm_i situado no interior do corpo se move em torno do eixo z em um círculo de raio $r_{\perp i}$. O elemento de massa possui momento linear $\vec{p}_i$ e sua posição em relação à origem O é determinada pelo vetor posição $\vec{r}_i$. O elemento de massa é mostrado na figura no instante em que $r_{\perp i}$ está paralelo ao eixo x. (*b*) O momento angular $\vec{\ell}_i$ do elemento de massa do item (*a*) em relação a O. A componente z, ℓ_{iz}, também é mostrada na figura.

11-10 Momento Angular de um Corpo Rígido Girando em Torno de um Eixo Fixo

Vamos agora calcular o momento angular de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo. A Fig. 11-15*a* mostra um corpo desse tipo. O eixo fixo de rotação é o eixo z e o corpo gira em torno do eixo com uma velocidade angular constante ω. Estamos interessados em calcular o momento angular do corpo em relação a esse eixo.

Podemos calcular o momento angular somando as componentes z dos momentos angulares de todos os elementos de massa do corpo. Na Fig. 11-15*a*, um elemento de massa típico, de massa Δm_i, está se movendo em torno do eixo z em uma trajetória circular. A posição do elemento de massa em relação à origem O é dada pelo vetor posição $\vec{r}_i$. O raio da trajetória circular do elemento de massa é $r_{\perp i}$, a distância perpendicular entre o elemento e o eixo z.

O módulo do momento angular $\vec{\ell}_i$ desse elemento de massa em relação a O é dado pela Eq. 11-19:

$$\ell_i = (r_i)(p_i)(\text{sen } 90°) = (r_i)(\Delta m_i v_i),$$

onde p_i e v_i são o momento linear e a velocidade linear do elemento de massa e 90° é o ângulo entre $\vec{r}_i$ e $\vec{p}_i$. O vetor momento angular $\vec{\ell}_i$ do elemento de massa da Fig. 11-15a aparece na Fig. 11-15b; o vetor é perpendicular a $\vec{r}_i$ e $\vec{p}_i$.

Estamos interessados na componente de $\vec{\ell}_i$ na direção paralela ao eixo de rotação, em nosso caso o eixo z. Essa componente é dada por

$$\ell_{iz} = \ell_i \operatorname{sen}\theta = (r_i \operatorname{sen}\theta)(\Delta m_i v_i) = r_{\perp i} \Delta m_i v_i.$$

A componente z do momento angular do corpo rígido com um todo pode ser calculada somando as contribuições de todos os elementos de massa do corpo. Como $v = \omega r_\perp$, podemos escrever

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} \ell_{iz} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i v_i r_{\perp i} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i(\omega r_{\perp i})r_{\perp i}$$

$$= \omega\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_{\perp i}^2\right). \qquad (11\text{-}30)$$

Podemos colocar ω do lado de fora do somatório porque tem o mesmo valor em todos os pontos do corpo rígido.

O fator $\Sigma \Delta m_i r_{\perp i}^2$ na Eq. 11-30 é o momento de inércia I do corpo em relação ao eixo fixo (veja a Eq. 10-33). Assim, a Eq. 11-30 se reduz a

$$L = I\omega \qquad \text{(corpo rígido, eixo fixo)}. \qquad (11\text{-}31)$$

O índice z foi omitido na Eq. 11-31, mas o leitor deve ter em mente que o momento angular que aparece na equação é o momento angular em torno do eixo de rotação e que I é o momento de inércia em relação ao mesmo eixo.

A Tabela 11-1, que complementa a Tabela 10-3, amplia nossa lista de correspondências entre movimentos de translação e rotação.

TESTE 6

Na figura, um disco, um anel e uma esfera maciça são postos para girar como piões em torno de um eixo central fixo por meio de um barbante enrolado, que aplica a mesma força tangencial constante $\vec{F}$ aos três objetos. Os três objetos têm a mesma massa e o mesmo raio e estão inicialmente em repouso. Ordene os objetos de acordo (a) com o momento angular em relação ao eixo central e (b) com a velocidade angular, em ordem decrescente, após o barbante ter sido puxado por um certo intervalo de tempo t.

Disco $\vec{F}$ Anel $\vec{F}$ Esfera $\vec{F}$

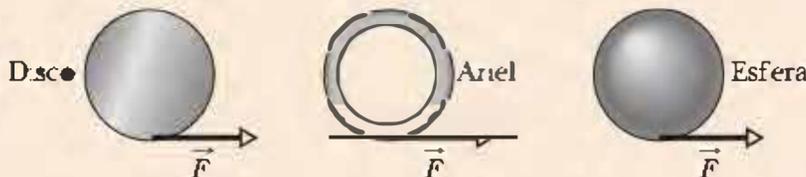



Tabela 11-1

Outras Correspondências entre os Movimentos de Translação e Rotação[a]

Translação		Rotação	
Força	$\vec{F}$	Torque	$\vec{\tau}\,(=\vec{r}\times\vec{F})$
Momento linear	$\vec{p}$	Momento angular	$\vec{\ell}\,(=\vec{r}\times\vec{p})$
Momento linear[b]	$\vec{P}\,(=\Sigma\vec{p}_i)$	Momento angular[b]	$\vec{L}\,(=\Sigma\vec{\ell}_i)$
Momento linear[b]	$\vec{P}=M\vec{v}_{CM}$	Momento angular[c]	$L=I\omega$
Segunda lei de Newton[b]	$\vec{F}_{res}=\dfrac{d\vec{P}}{dt}$	Segunda lei de Newton[b]	$\vec{\tau}_{res}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}$
Lei de conservação[d]	$\vec{P}=$ constante	Lei de conservação[d]	$\vec{L}=$ constante

[a]Veja também a Tabela 10-3.
[b]Para sistemas de partículas, incluindo corpos rígidos.
[c]Para um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo; L é a componente paralela ao eixo.
[d]Para um sistema fechado e isolado.

11-11 Conservação do Momento Angular

Até o momento, discutimos apenas duas leis de conservação, a lei de conservação da energia e a lei de conservação do momento linear. Vamos agora falar de uma terceira lei desse tipo, que envolve a conservação do momento angular. O ponto de partida é a Eq. 11-29 ($\vec{\tau}_{res} = d\vec{L}/dt$), que é a segunda lei de Newton para rotações. Se nenhum torque externo resultante age sobre o sistema, a equação se torna $d\vec{L}/dt = 0$, ou seja,

$$\vec{L} = \text{constante} \quad \text{(sistema isolado)}. \tag{11-32}$$

Este resultado, conhecido como **lei de conservação do momento angular**, também pode ser escrito na forma

$$\begin{pmatrix}\text{momento angular total}\\ \text{em um instante inicial } t_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{momento angular total}\\ \text{em um instante posterior } t_f\end{pmatrix},$$

ou

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \quad \text{(sistema isolado)}. \tag{11-33}$$

As Eqs. 11-32 e 11-33 significam o seguinte:

> Se o torque externo resultante que age sobre um sistema é nulo, o momento angular $\vec{L}$ do sistema permanece constante, sejam quais forem as mudanças que ocorrem dentro do sistema.

As Eqs. 11-32 e 11-33 são equações vetoriais; como tais, são equivalentes a três equações para as componentes, que correspondem à conservação do momento angular em três direções mutuamente perpendiculares. Dependendo dos torques externos que agem sobre um sistema, o momento angular pode ser conservado apenas em uma ou duas direções:

> Se a componente do torque *externo* resultante que age sobre um sistema ao longo de um eixo é nula, a componente do momento angular do sistema ao longo desse eixo permanece constante, sejam quais forem as mudanças que ocorrem dentro do sistema.

Podemos aplicar esta lei ao corpo isolado da Fig. 11-15, que está girando em torno do eixo z. Suponha que em um certo instante a massa do corpo é redistribuída de tal forma que o momento de inércia em relação ao eixo z muda de valor. De acordo com as Eqs. 11-32 e 11-33, o momento angular do corpo não pode mudar. Substituindo a Eq. 11-31 (para o momento angular ao longo do eixo de rotação) na Eq. 11-33, esta lei de conservação se torna

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f, \tag{11-34}$$

onde os índices se referem aos valores do momento de inércia I e da velocidade ω antes e depois da redistribuição de massa.

Como acontece com as duas outras leis de conservação discutidas anteriormente, as aplicações das Eqs. 11-32 e 11-33 vão além dos limites da mecânica newtoniana. As mesmas equações são válidas para partículas que se movem com uma velocidade próxima da velocidade da luz (caso em que deve ser usada a teoria da relatividade especial) e permanecem verdadeiras no mundo das partículas subatômicas (onde reina a física quântica). Nenhuma exceção à lei de conservação do momento angular jamais foi descoberta.

Discutiremos a seguir quatro exemplos que envolvem esta lei.

Figura 11-16 (*a*) O estudante possui um momento de inércia relativamente grande em relação ao eixo de rotação e uma velocidade angular relativamente pequena. (*b*) Diminuindo o momento de inércia, o estudante automaticamente aumenta a velocidade angular. O momento angular $\vec{L}$ do sistema permanece inalterado.

1. ***Aluno que gira*** A Fig. 11-16 mostra um estudante sentado em um banco que pode girar livremente em torno de um eixo vertical. O estudante, que foi posto em rotação com uma pequena velocidade angular inicial ω_i, segura dois halteres com

os braços abertos. O vetor momento angular $\vec{L}$ do estudante coincide com o eixo de rotação e aponta para cima.

O professor pede ao estudante para fechar os braços; esse movimento reduz o momento de inércia do valor inicial I_i para um valor menor I_f, pois a massa dos halteres fica mais próxima do eixo de rotação. A velocidade angular do estudante aumenta consideravelmente, de ω_i para ω_f. O estudante pode reduzir a velocidade angular estendendo novamente os braços para afastar os halteres do eixo de rotação.

Nenhum torque externo resultante age sobre o sistema formado pelo estudante, o banco e os halteres. Assim, o momento angular do sistema em relação ao eixo de rotação permanece constante, independentemente do modo como o estudante segura os halteres. Na Fig. 11-16*a*, a velocidade angular ω_i do estudante é relativamente baixa e o momento de inércia I_i é relativamente alto. De acordo com a Eq. 11-34, a velocidade angular na Fig. 11-16*b* deve ser maior para compensar a redução de I_f.

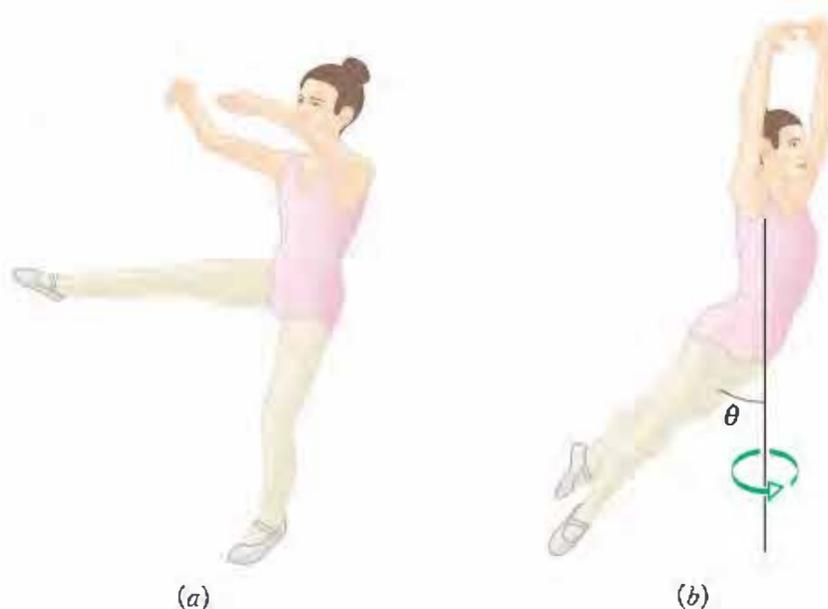
2. ***Salto de trampolim*** A Fig. 11-17 mostra uma atleta executando um salto duplo e meio mortal carpado. Como era de se esperar, o centro de massa descreve uma trajetória parabólica. A atleta deixa o trampolim com um momento angular $\vec{L}$ em relação a um eixo horizontal que passa pelo centro de massa, representado por um vetor perpendicular ao papel na Fig. 11-17. Quando a mergulhadora está no ar, não sofre nenhum torque externo e, portanto, o momento angular em torno do mesmo eixo não pode variar. Levando braços e pernas para a *posição carpada*, reduz consideravelmente o momento de inércia em torno desse eixo e assim, de acordo com a Eq. 11-34, aumenta consideravelmente a velocidade angular. Quando passa da posição carpada para a *posição esticada* no final do salto, o momento de inércia aumenta e a velocidade angular diminui o suficiente para a atleta mergulhar espirrando o mínimo possível de água. Mesmo em um salto mais complicado, que envolva também um movimento de parafuso, o momento angular da mergulhadora é conservado, em módulo *e* orientação, durante todo o salto.

Figura 11-17 O momento angular $\vec{L}$ da nadadora é constante durante o salto, sendo representado pela origem ⊗ de uma seta perpendicular ao plano do papel. Note também que o centro de massa da nadadora (representado pelos pontos) segue uma trajetória parabólica.

3. ***Salto em distância*** Quando uma atleta deixa o solo em uma prova de salto em distância, a força exercida pelo solo sobre o pé de impulsão imprime ao corpo uma rotação para a frente em torno de um eixo horizontal. Essa rotação, caso não seja controlada, impede que o atleta chegue ao solo com a postura correta: na descida, as pernas devem estar juntas e estendidas para a frente, para que os calcanhares toquem a areia o mais longe possível do ponto de partida. Depois que a atleta deixa o solo, o momento angular não pode mudar (é conservado), já que não existe nenhum torque externo. Entretanto, a atleta pode transferir a maior parte do momento angular para os braços, fazendo-os girar em um plano vertical (Fig. 11-18). Com isso, o corpo permanece na orientação correta para a parte final do salto.

4. ***Tour jeté*** Em um *tour jeté*, uma bailarina salta com um pequeno movimento de rotação, mantendo uma perna vertical e a outra perpendicular ao corpo (Fig. 11-19*a*). A velocidade angular é tão pequena que pode não ser percebida pela plateia. Enquanto a bailarina está subindo, movimenta para baixo a perna que estava levantada e levanta a outra perna, fazendo com que ambas assumam um ângulo θ com o corpo (Fig. 11-19*b*). O movimento é elegante, mas também serve para

Figura 11-18 No salto em distância, a rotação dos braços ajuda a manter o corpo na orientação correta para a parte final do salto.

Figura 11-19 (*a*) Parte inicial de um *tour jeté*: o momento de inércia é grande e a velocidade angular é pequena. (*b*) Parte intermediária: o momento de inércia é menor e a velocidade angular é maior.

aumentar a velocidade angular, já que o momento de inércia da bailarina é menor na nova posição. Como o corpo da bailarina não está sujeito a nenhum torque externo, o momento angular não pode variar. Assim, se o momento de inércia diminui, a velocidade angular deve aumentar. Quando o salto é bem executado, a impressão para a plateia é a de que a bailarina começa a girar de repente e executa uma volta de 180° antes que as orientações iniciais das pernas sejam invertidas em preparação para o pouso. Quando uma das pernas é novamente estendida, a rotação parece desaparecer magicamente.

TESTE 7

Um besouro-rinoceronte está na borda de um pequeno disco que gira como um carrossel. Se o besouro se desloca em direção ao centro do disco, as seguintes grandezas (todas em relação ao eixo central) aumentam, diminuem ou permanecem as mesmas: (a) momento de inércia, (b) momento angular e (c) velocidade angular?

Exemplo

Conservação do momento angular: rotação de uma roda e de um banco

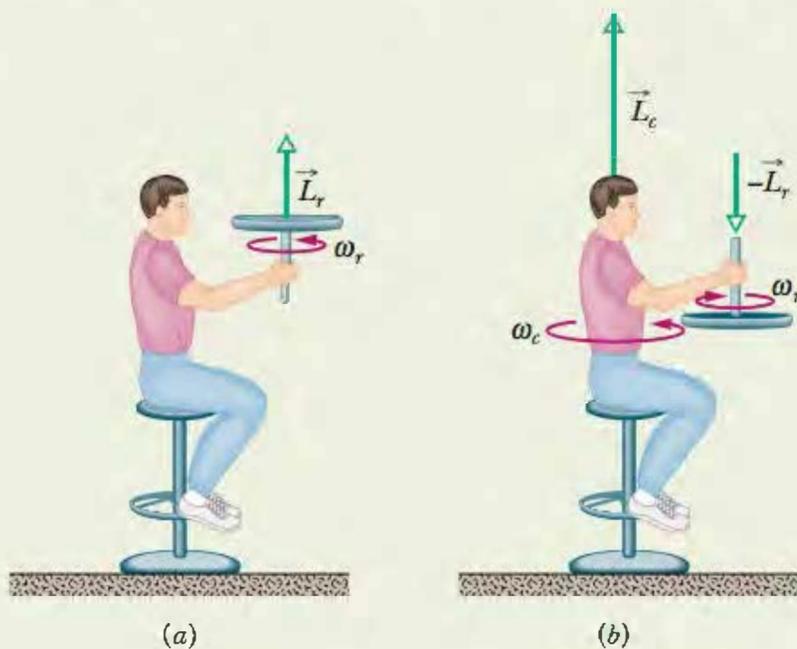
A Fig. 11-20*a* mostra um estudante, novamente sentado em um banco que pode girar livremente em torno de um eixo vertical. O estudante, inicialmente em repouso, segura uma roda de bicicleta cuja borda é feita de chumbo e cujo momento de inércia I_r em relação ao eixo central é 1,2 kg · m². (O chumbo serve para aumentar o valor do momento de inércia.) A roda gira com uma velocidade angular ω_r de 3,9 rev/s; vista de cima, a rotação é no sentido anti-horário. O eixo da roda é vertical e o momento angular $\vec{L}_r$ aponta verticalmente para cima. O estudante inverte a roda

O estudante agora possui um momento angular e a resultante desses dois vetores é igual ao vetor inicial.

Figura 11-20 (*a*) Um estudante segura uma roda de bicicleta que gira em torno de um eixo vertical. (*b*) O estudante inverte a roda e o banco começa a girar. (*c*) O momento angular total do sistema é o mesmo antes e depois da inversão.

que, vista de cima, passa a girar no sentido horário (Fig. 11-20*b*); o momento angular agora é $-\vec{L}_r$. A inversão faz com que o estudante, o banco e o centro da roda girem juntos, como um corpo rígido composto, em torno do eixo de rotação do banco, com um momento de inércia I_c = 6,8 kg · m². (O fato de a roda estar girando não afeta a distribuição de massa do corpo composto, ou seja, I_c possui o mesmo valor, independentemente de a roda estar girando ou não.) Com que velocidade angular ω_c e em que sentido o corpo composto gira após a inversão da roda?

IDEIAS-CHAVE

1. A velocidade angular ω_c pedida está relacionada ao momento angular final $\vec{L}_c$ do corpo composto em relação ao eixo de rotação do banco pela Eq. 11-31 ($L = I\omega$).
2. A velocidade angular inicial ω_r da roda está relacionada ao momento angular $\vec{L}_r$ da roda em relação ao centro pela mesma equação.
3. A soma dos vetores $\vec{L}_c$ e $\vec{L}_r$ fornece o momento angular total $\vec{L}_{tot}$ do sistema formado pelo estudante, o banco e a roda.
4. Quando a roda é invertida, nenhum torque externo resultante age sobre o sistema para mudar $\vec{L}_{tot}$ em relação a qualquer eixo vertical. (Os torques produzidos por forças entre o estudante e a roda quando o estudante inverte a roda são *internos* ao sistema.) Assim, o momento angular total do sistema é conservado em relação a qualquer eixo vertical.

Cálculos A conservação de $\vec{L}_{tot}$ está representada por vetores na Fig. 11-20*c*. Podemos também escrever essa conservação em termos das componentes verticais:

$$L_{c,f} + L_{r,f} = L_{c,i} + L_{r,i} \quad (11\text{-}35)$$

em que os índices *i* e *f* indicam o estado inicial (antes da inversão da roda) e o estado final (depois da inversão). Como a inversão da roda inverteu o momento angular associado à rotação da roda, substituímos $L_{r,f}$ por $-L_{r,i}$. Fazendo $L_{c,i} = 0$ (pois o estudante, o banco e o centro da roda estão inicialmente em repouso), a Eq. 11-35 se torna

$$L_{c,f} = 2L_{r,i}.$$

Usando a Eq. 11-31, substituímos $L_{c,f}$ por $I_c\omega_c$ e $L_{r,i}$ por $I_r\omega_r$ e explicitamos ω_c, obtendo

$$\omega_c = \frac{2I_r}{I_c}\omega_r$$

$$= \frac{(2)(1{,}2\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(3{,}9\ \text{rev/s})}{6{,}8\ \text{kg}\cdot\text{m}^2} = 1{,}4\ \text{rev/s}.$$

(Resposta)

Este resultado positivo mostra que o estudante gira no sentido anti-horário em torno do eixo do banco, quando visto de cima. Se quiser parar de rodar, o estudante terá apenas que inverter novamente a roda.

Exemplo

Conservação do momento angular: barata sobre um disco

Na Fig. 11-21, uma barata de massa *m* está sobre um disco de massa 6,00*m* e raio *R*. O disco gira como um carrossel em torno do eixo central, com velocidade angular ω = 1,50 rad/s. A barata está inicialmente a uma distância r = 0,800*R* do centro do disco, mas rasteja até a borda do disco. Trate a barata como se fosse uma partícula. Qual é a velocidade angular do inseto ao chegar à borda do disco?

ω_i R r Eixo de rotação

Figura 11-21 Uma barata está a uma distância *r* do centro de um disco que gira como um carrossel.

IDEIAS-CHAVE

(1) Ao se deslocar, a barata muda a distribuição de massa (e, portanto, o momento de inércia) do sistema barata-disco. (2) O momento angular do sistema não varia porque não está sujeito a nenhum torque externo. (As forças e torques associados ao movimento da barata são internos ao sistema.) (3) O módulo do momento angular de um corpo rígido ou de uma partícula é dado pela Eq. 11-31 ($L = I\omega$).

Cálculos Podemos determinar a velocidade angular final igualando o momento angular final L_f ao momento angular inicial L_i, já que ambos envolvem a velocidade angular e o momento de inércia. Para começar, vamos calcular o momento de inércia do sistema barata-disco antes e depois do deslocamento da barata.

De acordo com a Tabela 10-2*c*, o momento de inércia de um disco que gira em torno do eixo central é $\frac{1}{2}MR^2$. Como M = 6,00*m*, o momento de inércia do disco é

$$I_d = 3{,}00mR^2. \quad (11\text{-}36)$$

(Não conhecemos os valores de *m* e *R*, mas vamos prosseguir com a coragem tradicional dos físicos.)

De acordo com a Eq. 10-33, o momento de inércia da barata (supondo que se comporta como uma partícula) é mr^2. Substituindo os valores da distância inicial entre a barata e o centro do disco ($r = 0{,}800R$) e da distância final ($r = R$), descobrimos que o momento de inércia inicial da barata em relação ao eixo de rotação é

$$I_{bi} = 0{,}64mR^2 \qquad (11\text{-}37)$$

e que o momento de inércia final em relação ao mesmo eixo é

$$I_{bf} = mR^2. \qquad (11\text{-}38)$$

Assim, o momento de inércia inicial do sistema barata–disco é

$$I_i = I_d + I_{bi} = 3{,}64mR^2, \qquad (11\text{-}39)$$

e o momento de inércia final é

$$I_f = I_d + I_{bf} = 4{,}00mR^2. \qquad (11\text{-}40)$$

Em seguida, usamos a Eq. 11-31 ($L = I\omega$) para levar em conta o fato de que o momento angular final L_f do sistema é igual ao momento angular inicial L_i:

$$I_f\omega_f = I_i\omega_i$$

ou

$$4{,}00mR^2\omega_f = 3{,}64mR^2(1{,}50 \text{ rad/s}).$$

Depois de cancelar as incógnitas m e R, obtemos

$$\omega_f = 1{,}37 \text{ rad/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Observe que a velocidade angular diminuiu porque a distância entre parte da massa e o eixo de rotação aumentou.

11-12 Precessão de um Giroscópio

Um giroscópio simples é formado por uma roda fixada a um eixo e livre para girar em torno do eixo. Se uma das extremidades do eixo de um giroscópio *estacionário* é apoiada em um suporte, como na Fig. 11-22*a*, e o giroscópio é liberado, o giroscópio cai, girando para baixo em torno da extremidade do suporte. Como a queda envolve uma rotação, é governada pela segunda lei de Newton para rotações, que é dada pela Eq. 11-29:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \qquad (11\text{-}41)$$

De acordo com a Eq. 11-41, o torque que causa a rotação para baixo (a queda) faz variar o momento angular $\vec{L}$ do giroscópio a partir do valor inicial, que é zero. O torque $\vec{\tau}$ é produzido pela força gravitacional $M\vec{g}$ sobre o centro de massa do giroscópio, que tomamos como o centro da roda. O braço de alavanca em relação à extremidade do suporte, situada no ponto O da Fig. 11-22*a*, é $\vec{r}$. O módulo de $\vec{\tau}$ é

$$\tau = Mgr \text{ sen } 90° = Mgr \qquad (11\text{-}42)$$

(já que o ângulo entre $M\vec{g}$ e $\vec{r}$ é 90°) e o sentido é o que aparece na Fig. 11-22*a*.

Um giroscópio que gira rapidamente se comporta de outra forma. Suponha que o giroscópio seja liberado com o eixo ligeiramente inclinado para cima. Nesse caso, começa a cair, girando em torno de um eixo horizontal que passa por O, mas, em seguida, com a roda ainda girando em torno do eixo, passa a girar horizontalmente em torno de um eixo vertical que passa pelo ponto O, em um movimento chamado de **precessão**.

Por que o giroscópio em rotação permanece suspenso em vez de cair, como o giroscópio estacionário? Isso acontece porque, quando o giroscópio em rotação é liberado, o torque produzido pela força gravitacional, $M\vec{g}$, faz variar, não um momento angular inicialmente nulo, mas um momento angular já existente, graças à rotação da roda.

Para entender por que esse momento angular inicial leva à precessão, considere o momento angular $\vec{L}$ do giroscópio devido à rotação da roda. Para simplificar a situação, suponha que a rotação é tão rápida que o momento angular devido à precessão é desprezível em relação a $\vec{L}$. Suponha também que o eixo do giroscópio se encontra na horizontal quando a precessão começa, como na Fig. 11-22*b*. O módulo de $\vec{L}$ é dado pela Eq. 11-31:

$$L = I\omega, \qquad (11\text{-}43)$$

onde I é o momento de inércia do giroscópio em torno do eixo e ω é a velocidade angular da roda. O vetor $\vec{L}$ aponta ao longo do suporte, como na Fig. 11-22*b*. Como $\vec{L}$ é paralelo a $\vec{r}$, o torque $\vec{\tau}$ é perpendicular a $\vec{L}$.

De acordo com a Eq. 11-41, o torque $\vec{\tau}$ causa uma variação incremental $d\vec{L}$ do momento angular do giroscópio em um intervalo de tempo incremental dt, ou seja,

$$d\vec{L} = \vec{\tau}\,dt. \tag{11-44}$$

Entretanto, no caso de um giroscópio que *gira rapidamente*, o módulo de $\vec{L}$ é fixado pela Eq. 11-43. Assim, o torque pode mudar a orientação de $\vec{L}$, mas não o módulo.

De acordo com a Eq. 11-44, a orientação de $d\vec{L}$ é a mesma de $\vec{\tau}$, perpendicular a $\vec{L}$. A única maneira pela qual $\vec{L}$ pode variar na direção de $\vec{\tau}$ sem que o módulo L seja alterado é girar em torno do eixo z, como na Fig. 11-22*c*. Assim, $\vec{L}$ conserva o módulo, a extremidade do vetor $\vec{L}$ descreve uma trajetória circular e $\vec{\tau}$ é sempre tangente a essa trajetória. Como $\vec{L}$ tem que apontar na direção do eixo da roda, o eixo tem que girar em torno do eixo z na direção de $\vec{\tau}$. Essa é a origem da precessão. Como o giroscópio em rotação obedece à segunda lei de Newton para rotações em resposta a qualquer mudança do momento angular inicial, realiza uma precessão em vez de simplesmente tombar.

Podemos calcular a **velocidade de precessão** Ω usando primeiro as Eqs. 11-44 e 11-42 para obter o módulo de $d\vec{L}$:

$$dL = \tau\,dt = Mgr\,dt. \tag{11-45}$$

Quando $\vec{L}$ varia de um valor incremental durante um tempo incremental dt, o eixo e $\vec{L}$ precessam em torno do eixo z de um ângulo incremental $d\phi$. (Na Fig. 11-22*c*, o ângulo $d\phi$ está exagerado para maior clareza.) Com a ajuda das Eqs. 11-43 e 11-45, descobrimos que $d\phi$ é dado por

$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{Mgr\,dt}{I\omega}.$$

Dividindo essa expressão por dt e fazendo a velocidade de precessão Ω igual a $d\phi/dt$, obtemos:

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega} \quad \text{(velocidade de precessão).} \tag{11-46}$$

Este resultado é válido contanto que a velocidade angular ω seja elevada. Note que Ω diminui quando ω aumenta. Observe também que não haveria precessão se a força gravitacional $M\vec{g}$ não agisse sobre o giroscópio; entretanto, como I é uma função linear de M, as massas no numerador e denominador da Eq. 11-46 se cancelam, ou seja, Ω não depende da massa do corpo.

A Eq. 11-46 também é válida quando o eixo do giroscópio faz um ângulo diferente de zero com a horizontal e, portanto, pode ser aplicada a um pião de brinquedo.

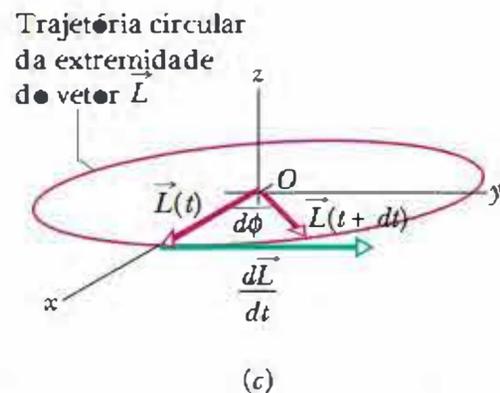
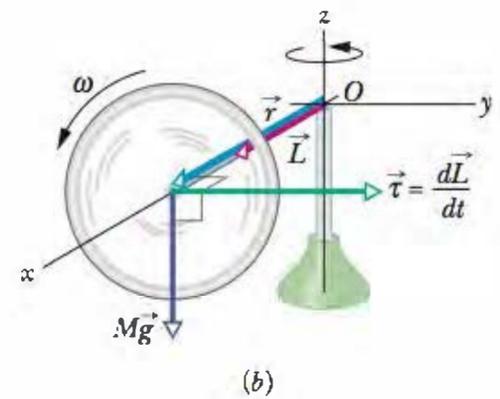
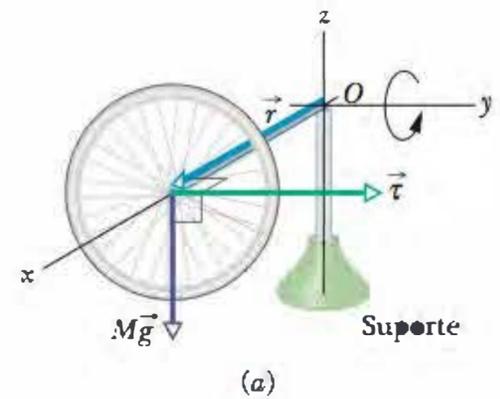



Figura 11-22 (*a*) Um giroscópio parado gira em um plano xz devido ao torque $\vec{\tau}$ produzido pela força gravitacional. (*b*) Um giroscópio que gira rapidamente com momento angular $\vec{L}$ executa um movimento de precessão em torno do eixo z. O movimento de precessão acontece no plano xy. (*c*) A variação $d\vec{L}/dt$ do momento angular leva a uma rotação de $\vec{L}$ em torno de O.

REVISÃO E RESUMO

Corpos em Rolamento No caso de uma roda de raio R rolando suavemente,

$$v_{CM} = \omega R, \tag{11-2}$$

em que v_{CM} é a velocidade linear do centro de massa da roda e ω é a velocidade angular da roda em torno do centro. A roda pode também ser vista como se estivesse girando instantaneamente em torno do ponto P do "piso" que está em contato com a roda. A velocidade angular da roda em torno desse ponto é igual à velocidade angular da roda em torno do centro. Uma roda que rola possui uma energia cinética dada por

$$K = \tfrac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \tfrac{1}{2}Mv_{CM}^2, \tag{11-5}$$

em que I_{CM} é o momento de inércia da roda em relação ao centro de

massa e M é a massa da roda. Se a roda está sendo acelerada, mas ainda rola suavemente, a aceleração do centro de massa $\vec{a}_{CM}$ está relacionada à aceleração angular α em relação ao centro de rotação através da equação

$$a_{CM} = \alpha R. \qquad (11\text{-}6)$$

Se a roda desce uma rampa de ângulo θ rolando suavemente, a aceleração ao longo de um eixo x paralelo à rampa é dada por

$$a_{CM,x} = -\frac{g \operatorname{sen}\theta}{1 + I_{CM}/MR^2}. \qquad (11\text{-}10)$$

O Torque como um Vetor Em três dimensões, o *torque* $\vec{\tau}$ é uma grandeza vetorial definida em relação a um ponto fixo (em geral, a origem) através da equação

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}, \qquad (11\text{-}14)$$

onde $\vec{F}$ é a força aplicada à partícula e $\vec{r}$ é o vetor posição da partícula em relação ao ponto fixo. O módulo de $\vec{\tau}$ é dado por

$$\tau = rF \operatorname{sen}\phi = rF_\perp = r_\perp F, \qquad (11\text{-}15, 11\text{-}16, 11\text{-}17)$$

onde ϕ é o ângulo entre $\vec{F}$ e $\vec{r}$, $F_\perp$ é a componente de $\vec{F}$ perpendicular a $\vec{r}$ e $r_\perp$ é o braço de alavanca de $\vec{F}$. A orientação de $\vec{\tau}$ é dada pela regra da mão direita.

Momento Angular de uma Partícula O *momento angular* $\vec{\ell}$ de uma partícula com momento linear $\vec{p}$, massa m e velocidade linear $\vec{v}$ é uma grandeza vetorial definida em relação a um ponto fixo (em geral a origem) através da equação

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}). \qquad (11\text{-}18)$$

O módulo de $\vec{\ell}$ é dado por

$$\ell = rmv \operatorname{sen}\phi \qquad (11\text{-}19)$$
$$= rp_\perp = rmv_\perp \qquad (11\text{-}20)$$
$$= r_\perp p = r_\perp mv, \qquad (11\text{-}21)$$

onde ϕ é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{p}$, $p_\perp$ e $v_\perp$ são as componentes de $\vec{p}$ e $\vec{v}$ perpendiculares a $\vec{r}$ e $r_\perp$ é a distância perpendicular entre o ponto fixo e a extensão de $\vec{p}$. A orientação de $\vec{\ell}$ é dada pela regra da mão direita.

Segunda Lei de Newton para Rotações A segunda lei de Newton para a rotação de uma partícula pode ser escrita na forma

$$\vec{\tau}_{res} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}, \qquad (11\text{-}23)$$

onde $\vec{\tau}_{res}$ é o torque resultante que age sobre a partícula e $\vec{\ell}$ é o momento angular da partícula.

Momento Angular de um Sistema de Partículas O momento angular $\vec{L}$ de um sistema de partículas é a soma vetorial dos momentos angulares das partículas:

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \cdots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i. \qquad (11\text{-}26)$$

A taxa de variação com o tempo do momento angular é igual ao torque externo resultante que age sobre o sistema (a soma vetorial dos torques produzidos pelas interações das partículas do sistema com partículas externas ao sistema):

$$\vec{\tau}_{res} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{(sistema de partículas).} \qquad (11\text{-}29)$$

Momento Angular de um Corpo Rígido Para um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo, a componente do momento angular paralela ao eixo de rotação é

$$L = I\omega \quad \text{(corpo rígido, eixo fixo).} \qquad (11\text{-}31)$$

Conservação do Momento Angular O momento angular $\vec{L}$ de um sistema permanece constante se o torque externo resultante que age sobre o sistema é nulo:

$$\vec{L} = \text{constante} \quad \text{(sistema isolado)} \qquad (11\text{-}32)$$

ou

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \quad \text{(sistema isolado).} \qquad (11\text{-}33)$$

Esta é a **lei de conservação do momento angular**.

Precessão de um Giroscópio Um giroscópio pode realizar, em torno de um eixo vertical que passa pelo suporte, um movimento de precessão com velocidade angular

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega}, \qquad (11\text{-}46)$$

onde M é a massa do giroscópio, r é o braço de alavanca, I é o momento de inércia e ω é a velocidade angular do giroscópio.

PERGUNTAS

1 A Fig. 11-23 mostra três partículas de mesma massa e mesma velocidade escalar constante que se movem nas orientações indicadas pelos vetores velocidade. Os pontos a, b, c e d formam um quadrado, com o ponto e no centro. Ordene os pontos de acordo com o módulo do momento angular resultante em relação aos pontos do sistema de três partículas, em ordem decrescente.

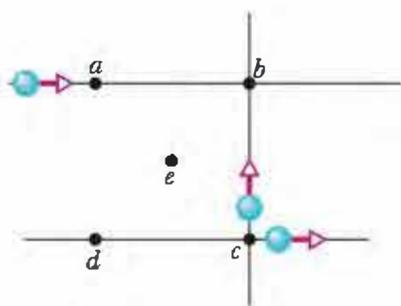



Figura 11-23 Pergunta 1.

2 A Fig. 11-24 mostra duas partículas, A e B, nas coordenadas (1 m, 1 m, 0) e (1 m, 0, 1 m). Sobre cada partícula agem três forças numeradas de mesmo módulo, cada uma paralela a um dos eixos. (a) Qual das forças produz um torque em relação à origem paralelo a y? (b) Ordene as forças de acordo com o módulo do torque em relação à origem que aplicam às partículas, em ordem decrescente.

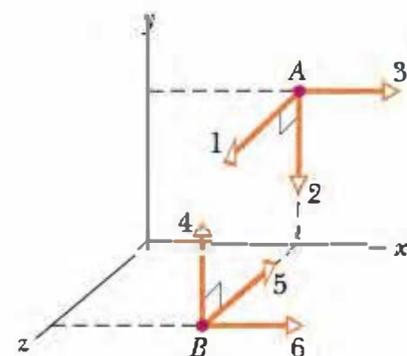



Figura 11-24 Pergunta 2.

3 O que acontece ao ioiô inicialmente estacionário da Fig. 11-25 se é puxado, com o auxílio da corda, (a) pela força $\vec{F}_2$ (cuja linha de ação passa pelo ponto de contato do ioiô com a mesa, como mostra a figura), (b) pela força $\vec{F}_1$ (cuja a linha de ação passa acima do ponto de contato) e (c) pela força $\vec{F}_3$ (cuja linha de ação passa à direita do ponto de contato)?

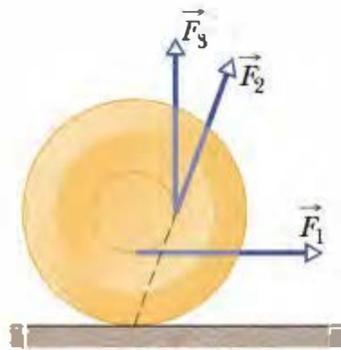



Figura 11-25 Pergunta 3.

4 O vetor posição $\vec{r}$ de uma partícula em relação a um certo ponto tem um módulo de 3 m e a força $\vec{F}$ aplicada à partícula tem um módulo de 4 N. Qual é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$ se o módulo do torque associado é igual (a) a zero e (b) a 12 N · m?

5 Na Fig. 11-26, três forças de mesmo módulo são aplicadas a uma partícula localizada na origem ($\vec{F}_1$ é aplicada perpendicularmente ao plano do papel). Ordene as forças de acordo com o módulos do torque que produzem (a) em relação ao ponto P_1, (b) em relação ao ponto P_2 e (c) em relação ao ponto P_3, em ordem decrescente.

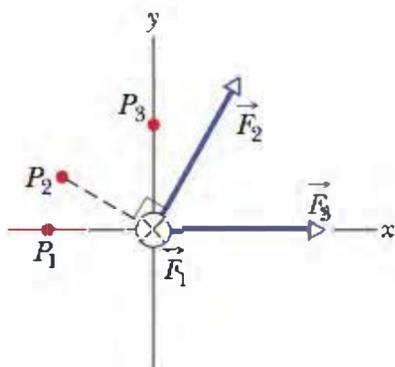



Figura 11-26 Pergunta 5.

6 O momento angular $\ell(t)$ de uma partícula em quatro situações é (1) $\ell = 3t + 4$; (2) $\ell = -6t^2$; (3) $\ell = 2$; (4) $\ell = 4/t$. Em que situação o torque resultante que age sobre a partícula é (a) zero, (b) positivo e constante, (c) negativo e com o módulo crescente para $t > 0$ e (d) negativo e com o módulo decrescente para $t > 0$?

7 Um besouro-rinoceronte está na borda de um disco horizontal que gira como um carrossel no sentido anti-horário. Se o besouro caminha ao longo da borda no sentido da rotação, o módulo das grandezas a seguir (medidas em relação ao eixo de rotação) aumenta, diminui ou permanece o mesmo (com o disco ainda girando no sentido anti-horário): (a) momento angular do sistema besouro-disco, (b) momento angular e velocidade angular do besouro e (c) o momento angular e velocidade angular do disco? (d) Quais são as respostas se o besouro caminha no sentido oposto ao da rotação?

8 A Fig. 11-27 mostra uma vista superior de uma placa retangular que pode girar como um carrossel em torno do centro O. Também são mostradas sete trajetórias ao longo das quais bolinhas de goma de mascar podem ser jogadas (todas com a mesma velocidade escalar e mesma massa) para grudar na placa estacionária. (a) Ordene as trajetórias, em ordem decrescente, de acordo com a velocidade angular da placa (e da goma de mascar) após a goma grudar. (b) Para que trajetórias o momento angular da placa (e da goma) em relação ao ponto O é negativo do ponto de vista da Fig. 11-27?

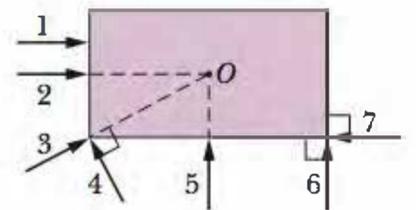



Figura 11-27 Pergunta 8.

9 A Fig. 11-28 mostra o módulo do momento angular L de uma roda em função do tempo t. Ordene os quatro intervalos de tempo, indicados por letras, de acordo com o módulo do torque que age sobre a roda, em ordem decrescente.

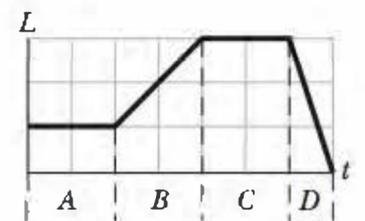



Figura 11-28 Pergunta 9.

10 A Fig. 11-29 mostra uma partícula se movendo com velocidade constante $\vec{v}$ e cinco pontos com suas coordenadas xy. Ordene os pontos de acordo com o módulo do momento angular da partícula em relação a eles, em ordem decrescente.

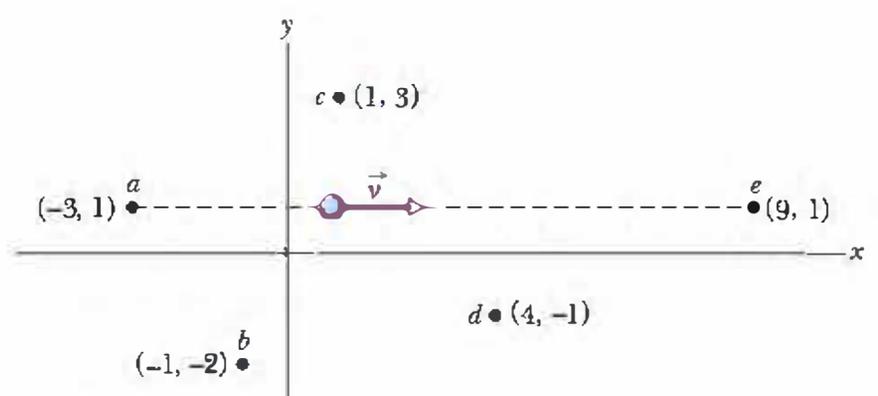



Figura 11-29 Pergunta 10.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física* de Jearl Walker, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

Seção 11-2 O Rolamento como uma Combinação de Translação e Rotação

•1 Um carro se move a 80,0 km/h em uma estrada plana no sentido positivo de um eixo x. Os pneus têm um diâmetro de 66 cm. Em relação a uma mulher que viaja no carro e em termos dos vetores unitários, qual é a velocidade $\vec{v}$ (a) no centro, (b) no alto e (c) na base de cada pneu e o módulo a da aceleração (d) no centro, (e) no alto e (f) na base de cada pneu? Em relação a uma pessoa parada no acostamento da estrada e em termos dos vetores unitários, qual é a velocidade $\vec{v}$ (g) no centro, (h) no alto e (i) na base de cada pneu e

o módulo da aceleração a (j) no centro, (k) no alto e (l) na base de cada pneu?

•2 Um automóvel que se move a 80 km/h possui pneus com 75,0 cm de diâmetro. (a) Qual é a velocidade angular dos pneus em relação aos respectivos eixos? (b) Se o carro é freado com aceleração constante e as rodas descrevem em 30 voltas completas (sem deslizamento), qual é o módulo da aceleração angular das rodas? (c) Que distância o carro percorre durante a frenagem?

Seção 11-4 As Forças do Rolamento

•3 Um aro de 140 kg rola em um piso horizontal de tal forma que o centro de massa tem uma velocidade de 0,150 m/s. Qual é o trabalho necessário para fazê-lo parar?

•4 Uma esfera maciça homogênea rola para baixo em um plano inclinado. (a) Qual deve ser o ângulo de inclinação do plano para que a aceleração linear do centro da esfera tenha um módulo de $0{,}10g$? (b) Se um bloco sem atrito deslizasse para baixo no mesmo plano inclinado, o módulo da aceleração seria maior, menor ou igual a $0{,}10g$? Por quê?

•5 Um carro de 1000 kg tem quatro rodas de 10 kg. Quando o carro está em movimento, que fração da energia cinética total se deve à rotação das rodas em torno dos respectivos eixos? Suponha que as rodas têm o mesmo momento de inércia que discos homogêneos de mesma massa e tamanho. Por que não é preciso conhecer o raio das rodas?

••6 A Fig. 11-30 mostra a velocidade escalar v em função do tempo t para um objeto de 0,500 kg e 6,00 cm de raio que rola suavemente para baixo em uma rampa de 30°. A escala do eixo das velocidades é definida por $v_s = 4{,}0$ m/s. Qual é o momento de inércia do objeto?

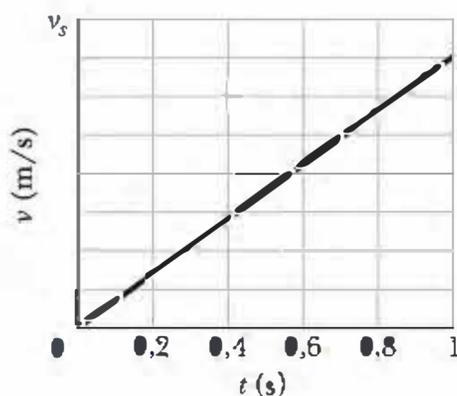



Figura 11-30 Problema 6.

••7 Na Figura 11-31, um cilindro maciço com 10 cm de raio e uma massa de 12 kg parte do repouso e rola para baixo uma distância $L = 6{,}0$ m, sem deslizar, em um telhado com uma inclinação $\theta = 30°$. (a) Qual é a velocidade angular do cilindro em relação ao eixo central ao deixar o telhado? (b) A borda do telhado está a uma altura $H = 5{,}0$ m. A que distância horizontal da borda do telhado o cilindro atinge o chão?

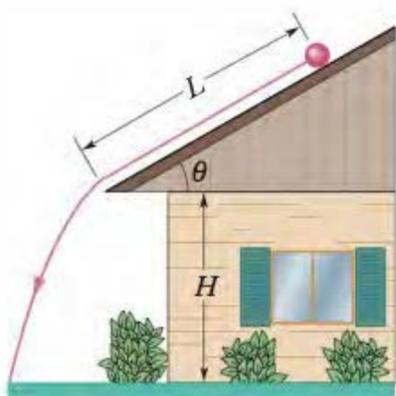



Figura 11-31 Problema 7.

••8 A Fig. 11-32 mostra a energia potencial $U(x)$ de uma bola maciça que pode rolar ao longo de um eixo x. A escala do eixo U é definida por $U_s = 100$ J. A bola é homogênea, rola suavemente e possui uma massa de 0,400 kg. Ela é liberada em $x = 7{,}0$ m quando se move no sentido negativo do eixo x com uma energia mecânica de 75 J. (a) Se a bola pode chegar ao ponto $x = 0$ m, qual é sua velocidade nesse ponto, e se não pode, qual é o ponto de retorno? Suponha que a bola esteja se movendo no sentido positivo do eixo x ao ser liberada em $x = 7{,}0$ m com 75 J. (b) Se a bola pode chegar ao ponto $x = 13$ m, qual é sua velocidade nesse ponto e se não pode, qual é o ponto de retorno?

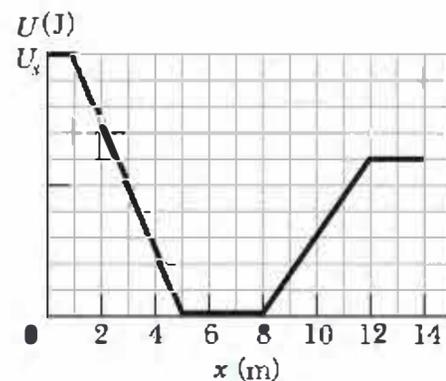



Figura 11-32 Problema 8.

••9 Na Fig. 11-33, uma bola maciça rola suavemente a partir do repouso (começando na altura $H = 6{,}0$ m) até deixar a parte horizontal no fim da pista, a uma altura $h = 2{,}0$ m. A que distância horizontal do ponto A a bola toca o chão?

Figura 11-33 Problema 9.

••10 Uma esfera oca, com 0,15 m de raio e momento de inércia $I = 0{,}040$ kg · m² em relação a uma reta que passa pelo centro de massa, rola sem deslizar, subindo uma superfície com uma inclinação de 30° em relação à horizontal. Em uma certa posição inicial, a energia cinética total da esfera é 20 J. (a) Quanto desta energia cinética inicial se deve à rotação? (b) Qual é a velocidade do centro de massa da esfera na posição inicial? Após a esfera ter se deslocado 1,0 m ao longo da superfície inclinada a partir da posição inicial, qual é (c) a energia cinética total e (d) a velocidade do centro de massa?

••11 Na Fig. 11-34, uma força horizontal constante $\vec{F}$ de módulo 10 N é aplicada a uma roda de massa 10 kg e raio 0,30 m. A roda rola suavemente na superfície horizontal e o módulo da aceleração do centro de massa é 0,60 m/s². (a) Em termos dos vetores unitários, qual é a força de atrito que age sobre a roda? (b) Qual é o momento de inércia da roda em relação ao eixo de rotação, que passa pelo centro de massa?

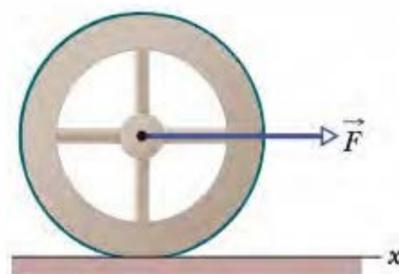



Figura 11-34 Problema 11.

••12 Na Fig. 11-35, uma bola maciça de latão de massa 0,280 g rola suavemente ao longo do trilho quando é liberada a partir do repouso no trecho retilíneo. A parte circular do trilho tem um raio $R = 14{,}0$ cm e a bola tem um raio $r \ll R$. (a) Quanto vale h se a bola está na iminência de perder contato com o trilho quando chega ao ponto mais alto da parte curva do trilho? Se a bola é liberada a uma altura $h = 6{,}00R$, qual é (b) o módulo e (c) a orientação da componente horizontal da força que age sobre a bola no ponto Q?

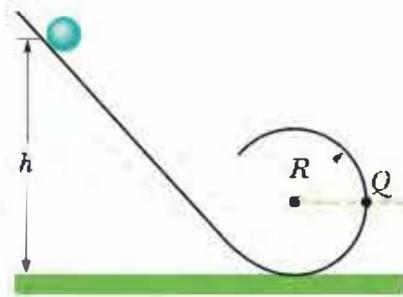



Figura 11-35 Problema 12.

•••13 *Bola não homogênea.* Na Fig. 11-36, uma bola de massa M e raio R rola suavemente, a partir do repouso, descendo uma rampa e passando por uma pista circular com 0,48 m de raio. A altura inicial da bola é $h = 0{,}36$ m. Na parte mais baixa da curva, o módulo da força normal que a pista exerce sobre a bola é $2{,}00Mg$. A bola é formada por uma casca esférica externa homogênea (com uma certa massa específica) e uma esfera central, também homogênea (com uma massa específica diferente). O momento de inércia da bola é dado pela expressão geral $I = \beta MR^2$, mas β não é igual a 0,4, como no caso de uma bola homogênea. Determine o valor de β.

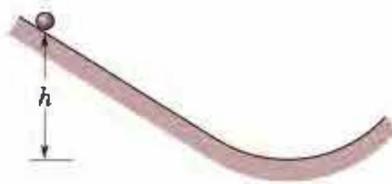



Figura 11-36 Problema 13.

•••14 Na Fig. 11-37, uma bola pequena, maciça, homogênea é lançada do ponto P, rola suavemente em uma superfície horizontal, sobe uma rampa e chega a um platô. Em seguida, deixa o platô horizontalmente para pousar em outra superfície mais abaixo, a uma distância horizontal d da extremidade do platô. As alturas verticais são $h_1 = 5{,}00$ cm e $h_2 = 1{,}60$ cm. Com que velocidade a bola deve ser lançada no ponto P para pousar em $d = 6{,}00$ cm?

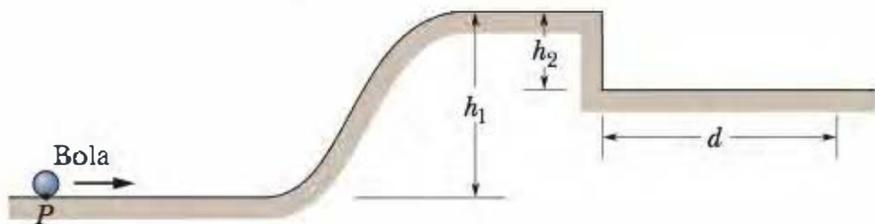



Figura 11-37 Problema 14.

•••15 Um jogador de boliche arremessa uma bola de raio $R = 11$ cm ao longo de uma pista. A bola (Fig. 11-38) desliza na pista com velocidade inicial $v_{CM} = 8{,}5$ m/s e velocidade angular inicial $\omega_0 = 0$. O coeficiente de atrito cinético entre a bola e a pista é 0,21. A força de atrito cinético $\vec{f}_k$ que age sobre a bola produz uma aceleração linear e uma aceleração angular. Quando a velocidade v_{CM} diminui o suficiente e a velocidade angular ω aumenta o suficiente, a bola para de deslizar e passa a rolar suavemente. (a) Qual é valor de v_{CM} em termos de ω nesse instante? Durante o deslizamento, qual é (b) a aceleração linear e (c) a aceleração angular da bola? (d) Por quanto tempo a bola desliza? (e) Que distância a bola desliza? (f) Qual é a velocidade linear da bola quando começa a rolar suavemente?

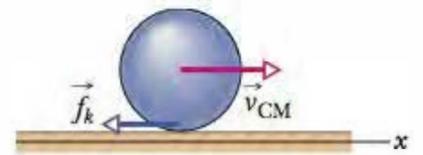



Figura 11-38 Problema 15.

•••16 *Objeto cilíndrico não homogêneo.* Na Fig. 11-39, um objeto cilíndrico de massa M e raio R rola suavemente descendo uma rampa, a partir do repouso, e passa para um trecho horizontal da pista. Em seguida, rola para fora da pista, pousando a uma distância horizontal $d = 0{,}506$ m do final da pista. A altura inicial do objeto é $H = 0{,}90$ m; a extremidade da pista está a uma altura $h = 0{,}10$ m. O objeto é composto por uma camada cilíndrica externa homogênea (com uma certa massa específica) e um cilindro central, também homogêneo (com uma massa específica diferente). O momento de inércia do objeto é dado pela expressão geral $I = \beta MR^2$, mas β não é igual a 0,5, como no caso de um cilindro homogêneo. Determine o valor de β.

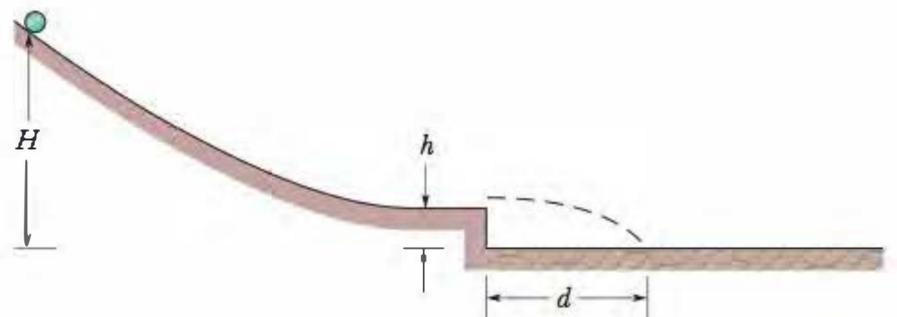



Figura 11-39 Problema 16.

Seção 11-5 O Ioiô

•17 Um ioiô possui um momento de inércia de 950 g · cm² e uma massa de 120 g. O raio do eixo é 3,2 mm e a corda tem 120 cm de comprimento. O ioiô rola para baixo, a partir do repouso, até a extremidade da corda. (a) Qual é o módulo da aceleração linear do ioiô? (b) Quanto tempo o ioiô leva para chegar à extremidade da corda? Ao chegar à extremidade da corda, qual é (c) a velocidade linear, (d) a energia cinética de translação, (e) a energia cinética de rotação e (f) a velocidade angular?

•18 Em 1980, sobre a baía de San Francisco, um grande ioiô foi solto de um guindaste. O ioiô de 116 kg era formado por dois discos homogêneos com 32 cm de raio, ligados por um eixo com 3,2 cm de raio. Qual foi o módulo da aceleração do ioiô (a) durante a descida e (b) durante a subida? (c) Qual foi a tensão da corda? (d) A tensão estava próxima do limite de resistência da corda, 52 kN? Suponha que você construa uma versão ampliada do ioiô (com a mesma forma e usando os mesmos materiais, porém maior). (e) O módulo da aceleração do seu ioiô durante a queda será maior, menor ou igual ao do ioiô de San Francisco? (f) E a tensão da corda?

Seção 11-6 Revisão do Torque

•19 Em termos dos vetores unitários, qual é o torque resultante em relação à origem a que está submetida uma pulga localizada nas coordenadas (0; −4,0 m; 5,0 m) quando as forças $\vec{F}_1 = (3{,}0\ \text{N})\hat{k}$ e $\vec{F}_2 = (-2{,}0\ \text{N})\hat{j}$ agem sobre a pulga?

•20 Uma ameixa está localizada nas coordenadas (−2,0 m; 0; 4,0 m). Em termos dos vetores unitários, qual é o torque em relação à origem a que está submetida a ameixa se esse torque se deve a uma força $\vec{F}$ cuja única componente é (a) $F_x = 6{,}0$ N, (b) $F_x = -6{,}0$ N, (c) $F_z = 6{,}0$ N, (d) $F_z = -6{,}0$ N?

•21 Em termos dos vetores unitários, qual é o torque em relação à origem a que está submetida uma partícula localizada nas coordenadas (0; −4,0 m; 3,0 m) se esse torque se deve (a) a uma força $\vec{F}_1$ de componentes $F_{1x} = 2{,}0$ N, $F_{1y} = F_{1z} = 0$ e (b) a uma força $\vec{F}_2$ de componentes $F_{2x} = 0$, $F_{2y} = 2{,}0$ N, $F_{2z} = 4{,}0$ N?

••22 Uma partícula se move em um sistema de coordenadas *xyz* sob a ação de uma força. Quando o vetor posição da partícula é $\vec{r} = (2{,}00\text{ m})\hat{i} + (3{,}00\text{ m})\hat{j} + (2{,}00\text{ m})\hat{k}$, a força é $\vec{F} = F_x\hat{i} + (7{,}00\text{ N})\hat{j} - (6{,}00\text{ N})\hat{k}$ e o torque correspondente em relação à origem é $\vec{\tau} = (4{,}00\text{ N}\cdot\text{m})\hat{i} + (2{,}00\text{ N}\cdot\text{m})\hat{j} - (1{,}00\text{ N}\cdot\text{m})\hat{k}$. Determine F_x.

••23 A força $\vec{F} = (2{,}0\text{ N})\hat{i} - (3{,}0\text{ N})\hat{k}$ age sobre uma pedra cujo vetor posição é $\vec{r} = (0{,}50\text{ m})\hat{j} - (2{,}0\text{ m})\hat{k}$ em relação à origem. Em termos dos vetores unitários, qual é o torque resultante a que a pedra está submetida (a) em relação à origem e (b) em relação ao ponto (2,0 m; 0; −3,0 m)?

••24 Em termos dos vetores unitários, qual é o torque em relação à origem a que está submetido um vidro de pimenta localizado nas coordenadas (3,0 m; −2,0 m; 4,0 m) devido (a) à força $\vec{F}_1 = (3{,}0\text{ N})\hat{i} - (4{,}0\text{ N})\hat{j} + (5{,}0\text{ N})\hat{k}$, (b) à força $\vec{F}_2 = (-3{,}0\text{ N})\hat{i} - (4{,}0\text{ N})\hat{j} - (5{,}0\text{ N})\hat{k}$ e (c) à soma vetorial de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$? (d) Repita o item (c) para o torque em relação ao ponto de coordenadas (3,0 m; 2,0 m; 4,0 m).

••25 A força $\vec{F} = (-8{,}0\text{ N})\hat{i} + (6{,}0\text{ N})\hat{j}$ age sobre uma partícula cujo vetor posição é $\vec{r} = (3{,}0\text{ m})\hat{i} + (4{,}0\text{ m})\hat{j}$. Qual é (a) o torque em relação à origem a que está submetida a partícula, em termos dos vetores unitários; (b) e o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$?

Seção 11-7 Momento Angular

•26 No instante da Fig. 11-40, uma partícula *P* de 2,0 kg possui um vetor posição $\vec{r}$ de módulo 3,0 m e ângulo $\theta_1 = 45°$ e uma velocidade $\vec{v}$ de módulo 4,0 m/s e ângulo $\theta_2 = 30°$. A força $\vec{F}$, de módulo 2,0 N e ângulo $\theta_3 = 30°$, age sobre *P*. Os três vetores estão no plano *xy*. Quais são, em relação à origem, (a) o módulo e (b) a orientação do momento angular de *P* e (c) o módulo e (d) a orientação do torque que age sobre *P*?

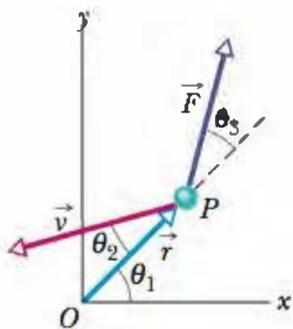



Figura 11-40 Problema 26.

•27 Em um certo instante, a força $\vec{F} = 4{,}0\hat{j}$ N age sobre um objeto de 0,25 kg cujo vetor posição é $\vec{r} = (2{,}0\hat{i} - 2{,}0\hat{k})$m e cujo vetor velocidade é $\vec{v} = (-5{,}0\hat{i} + 5{,}0\hat{k})$m/s. Em relação à origem e em termos dos vetores unitários, qual é (a) o momento angular do objeto e (b) o torque que age sobre o objeto?

•28 Um objeto de 2,0 kg, que se comporta como uma partícula, se move em um plano com componentes de velocidade $v_x = 30$ m/s e $v_y = 60$ m/s ao passar por um ponto de coordenadas (3,0; −4,0) m. Nesse instante, em termos dos vetores unitários, qual é o momento angular do objeto em relação (a) à origem e (b) ao ponto (−2,0; −2,0) m?

•29 No instante da Fig. 11-41, duas partículas se movem em um plano *xy*. A partícula P_1 possui uma massa de 6,5 kg e uma velocidade $v_1 = 2{,}2$ m/s e está a uma distância $d_1 = 1{,}5$ m do ponto *O*. A partícula P_2 possui uma massa de 3,1 kg e uma velocidade $v_2 = 3{,}6$ m/s e está a uma distância $d_2 = 2{,}8$ m do ponto *O*. Qual é (a) o módulo e (b) a orientação do momento angular resultante das duas partículas em relação ao ponto *O*?

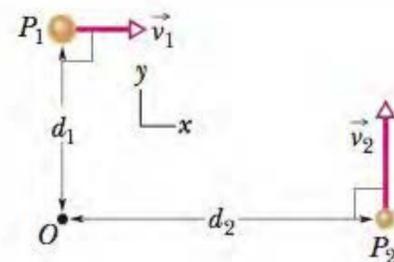



Figura 11-41 Problema 29.

••30 No instante em que o deslocamento de um objeto de 2,00 kg em relação à origem é $\vec{d} = (2{,}00\text{ m})\hat{i} + (4{,}00\text{ m})\hat{j} - (3{,}00\text{ m})\hat{k}$, a velocidade é $\vec{v} = -(6{,}00\text{ m/s})\hat{i} + (3{,}00\text{ m/s})\hat{j} + (3{,}00\text{ m/s})\hat{k}$ e o objeto está sujeito a uma força $\vec{F} = (6{,}00\text{ N})\hat{i} - (8{,}00\text{ N})\hat{j} + (4{,}00\text{ N})\hat{k}$. Determine (a) a aceleração do objeto, (b) o momento angular do objeto em relação à origem, (c) o torque em relação à origem a que está submetido o objeto e (d) o ângulo entre a velocidade do objeto e a força que age sobre ele.

••31 Na Fig. 11-42, uma bola de 0,400 kg é lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 40,0 m/s. Qual é o momento angular da bola em relação a *P*, um ponto a uma distância horizontal de 2,00 m do ponto de lançamento, quando a bola está (a) na altura máxima e (b) na metade do caminho de volta ao chão? Qual é o torque em relação a *P* a que a bola é submetida devido à força gravitacional quando está (a) na altura máxima e (b) na metade do caminho de volta ao chão?

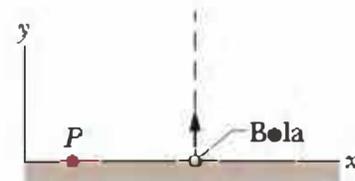



Figura 11-42 Problema 31.

Seção 11-8 Segunda Lei de Newton para Rotações

•32 Uma partícula sofre a ação de dois torques em relação à origem: $\vec{\tau}_1$ tem um módulo de 2,0 N · m e aponta no sentido positivo do eixo *x*; $\vec{\tau}_2$ tem um módulo de 4,0 N · m e aponta no sentido negativo do eixo *y*. Determine $d\vec{\ell}/dt$, onde $\vec{\ell}$ é o momento angular da partícula em relação à origem, em termos dos vetores unitários.

•33 No instante $t = 0$, uma partícula de 3,0 kg com uma velocidade de $\vec{v} = (5{,}0\text{ m/s})\hat{i} - (6{,}0\text{ m/s})\hat{j}$ está passando pelo ponto $x = 3{,}0$ m, $y = 8{,}0$ m. A partícula é puxada por uma força de 7,0 N no sentido negativo do eixo *x*. Quais são, em relação à origem, (a) o momento angular da partícula, (b) o torque que age sobre a partícula e (c) a taxa com a qual o momento angular está variando?

•34 Uma partícula se move em um plano *xy*, em torno da origem, no sentido horário, do ponto de vista do lado positivo do eixo *z*. Em termos dos vetores unitários, qual é o torque que age sobre a partícula se o módulo do momento angular da partícula em relação à origem é (a) 4,0 kg · m²/s, (b) $4{,}0t^2$ kg · m²/s, (c) $4{,}0\sqrt{t}$ kg · m²/s e (d) $4{,}0/t^2$ kg · m²/s?

••35 No instante *t*, o vetor $\vec{r} = 4{,}0t^2\hat{i} - (2{,}0t + 6{,}0t^2)\hat{j}$ fornece a posição de uma partícula de 3,0 kg em relação à origem de um sistema de coordenadas *xy* ($\vec{r}$ está em metros e *t* em segundos). (a)

Escreva uma expressão para o torque em relação à origem que age sobre a partícula. (b) O módulo do momento angular da partícula em relação à origem está aumentando, diminuindo ou permanece o mesmo?

Seção 11-10 Momento Angular de um Corpo Rígido Girando em Torno de um Eixo Fixo

•**36** A Fig. 11-43 mostra três discos homogêneos acoplados por correias. Uma correia passa pelas bordas dos discos *A* e *C*; a outra passa por um cubo do disco *A* e pela borda do disco *B*. As correias se movem suavemente, sem deslizar nas bordas e no cubo. O disco *A* tem raio *R* e seu cubo tem raio $0{,}5000R$; o disco *B* tem raio $0{,}2500R$; o disco *C* tem raio $2{,}000R$. Os discos *B* e *C* têm a mesma massa específica (massa por unidade de volume) e mesma espessura. Qual é a razão entre o módulo do momento angular do disco *C* e o módulo do momento angular do disco *B*?

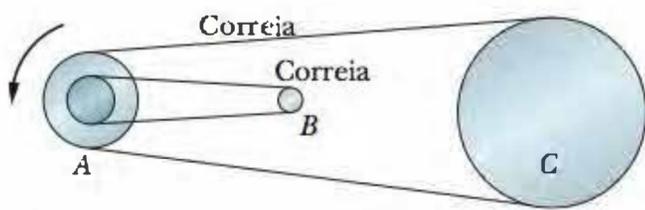



Figura 11-43 Problema 36.

•**37** Na Fig. 11-44, três partículas de massa $m = 23$ g estão presas a três barras de comprimento $d = 12$ cm e massa desprezível. O conjunto gira em torno do ponto *O* com velocidade angular $\omega = 0{,}85$ rad/s. Quais são, em relação ao ponto *O*, (a) o momento de inércia do conjunto, (b) o módulo do momento angular da partícula do meio e (c) o módulo do momento angular do conjunto?

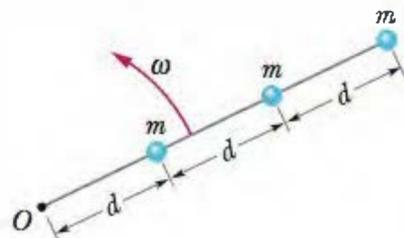



Figura 11-44 Problema 37.

•**38** Um disco de polimento, com momento de inércia $1{,}2 \times 10^{-3}$ kg · m², está preso a uma broca elétrica cujo motor produz um torque de módulo 16 N · m em relação ao eixo central do disco. Com o torque aplicado durante 33 ms, qual é o módulo (a) do momento angular e (b) da velocidade angular do disco em relação a esse eixo?

•**39** O momento angular de um volante com um momento de inércia de 0,140 kg · m² em relação ao eixo central diminui de 3,00 para 0,800 kg · m²/s em 1,50 s. (a) Qual é o módulo do torque médio em relação ao eixo central que age sobre o volante durante esse período? (b) Supondo uma aceleração angular constante, de que ângulo o volante gira? (c) Qual é o trabalho realizado sobre o volante? (d) Qual é a potência média do volante?

••**40** Um disco com um momento de inércia de 7,00 kg · m² gira como um carrossel sob o efeito de um torque variável dado por $\tau = (5{,}00 + 2{,}00t)$ N · m. No instante $t = 1{,}00$ s, o momento angular do disco é 5,00 kg · m²/s. Qual é o momento angular do disco no instante $t = 3{,}00$ s?

••**41** A Fig. 11-45 mostra uma estrutura rígida formada por um aro de raio *R* e massa *m* e um quadrado feito de quatro barras finas de comprimento *R* e massa *m*. A estrutura rígida gira com velocidade constante em torno de um eixo vertical, com um período de rotação de 2,5 s. Supondo que $R = 0{,}50$ m e $m = 2{,}0$ kg, calcule (a) o momento de inércia da estrutura em relação ao eixo de rotação e (b) o momento angular da estrutura em relação ao eixo.

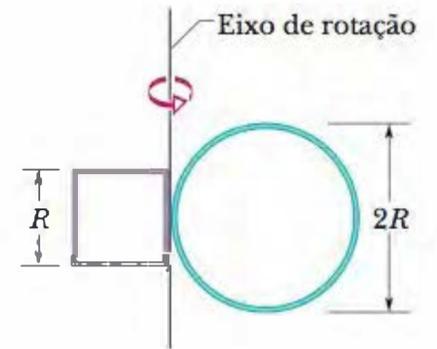



Figura 11-45 Problema 41.

••**42** A Fig. 11-46 mostra a variação com o tempo do torque τ que age sobre um disco inicialmente em repouso que pode girar como um carrossel em torno do centro. A escala do eixo τ é definida por $\tau_s = 4{,}0$ N · m. Qual é o momento angular do disco em relação ao eixo de rotação no instante (a) $t = 7{,}0$ s e (b) $t = 20$ s?

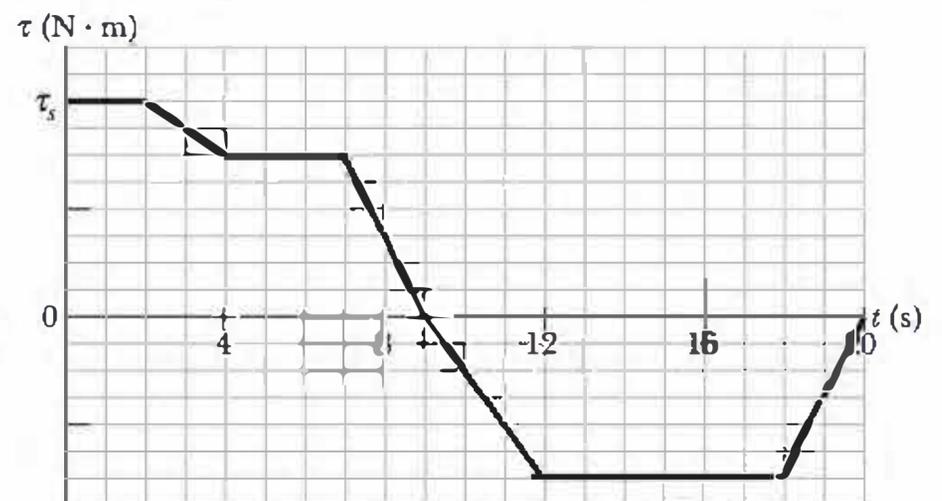



Figura 11-46 Problema 42.

Seção 11-11 Conservação do Momento Angular

•**43** Na Fig. 11-47, duas patinadoras com 50 kg de massa, que se movem com uma velocidade escalar de 1,4 m/s, se aproximam em trajetórias paralelas separadas por 3,0 m. Uma das patinadoras carrega uma vara comprida, de massa desprezível, segurando-a em uma extremidade, e a outra se agarra à outra extremidade ao passar pela vara, o que faz com que as patinadoras passem a descrever uma circunferência em torno do centro da vara. Suponha que o atrito entre as patinadoras e o gelo é desprezível. Qual é (a) o raio da circunferência, (b) a velocidade angular das patinadoras e (c) a energia cinética do sistema das duas patinadoras? Em seguida, as patinadoras puxam a vara até ficarem separadas por uma distância de 1,0 m. Nesse instante, qual é (d) a velocidade angular das patinadoras e (e) a energia cinética do sistema? (f) De onde vem a energia cinética adicional?

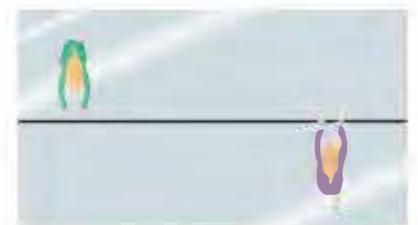



Figura 11-47 Problema 43.

•**44** Uma barata de massa 0,17 kg corre no sentido anti-horário na borda de um disco circular de raio 15 cm e momento de inércia $5{,}0 \times 10^{-3}$ kg · m², montado em um eixo vertical com atrito desprezível. A velocidade da barata (em relação ao chão) é 2,0 m/s e

o disco gira no sentido horário com uma velocidade angular ω_0 = 2,8 rad/s. A barata encontra uma migalha de pão na borda e, obviamente, para. (a) Qual é a velocidade angular do disco depois que a barata para? A energia mecânica é conservada quando a barata para?

•45 Um homem está em pé em uma plataforma que gira (sem atrito) com uma velocidade angular de 1,2 rev/s; seus braços estão abertos e ele segura um tijolo em cada mão. O momento de inércia do sistema formado por homem, os tijolos e a plataforma em relação ao eixo vertical central da plataforma é 6,0 kg · m². Se, ao mover os braços, o homem reduz o momento de inércia do sistema para 2,0 kg · m², determine (a) a nova velocidade angular da plataforma e (b) a razão entre a nova energia cinética do sistema e a energia cinética inicial. (c) De onde vem a energia cinética adicional?

•46 O momento de inércia de uma estrela que sofre uma contração enquanto gira em torno de si mesma cai para $\frac{1}{3}$ do valor inicial. Qual é a razão entre a nova energia cinética de rotação e a energia antiga?

•47 Uma pista é montada em uma grande roda que pode girar livremente, com atrito desprezível, em torno de um eixo vertical (Fig. 11-48). Um trem de brinquedo de massa m é colocado na pista e, com o sistema inicialmente em repouso, a alimentação elétrica do brinquedo é ligada. O trem adquire uma velocidade de 0,15 m/s em relação à pista. Qual é a velocidade angular da roda se a massa é 1,1m e o raio é 0,43 m? (Trate a roda como um aro e despreze a massa dos raios e do cubo da roda.)

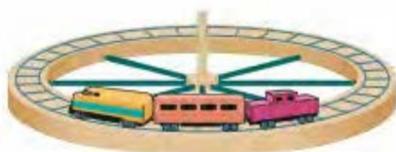



Figura 11-48 Problema 47.

•48 Uma barata está no centro de um disco circular que gira livremente como um carrossel, sem torques externos. A barata caminha em direção à borda do disco, cujo raio é R. A Fig. 11-49 mostra a velocidade angular ω do sistema barata–disco durante a caminhada. A escala do eixo ω é definida por ω_a = 5,0 rad/s e ω_b = 6,0 rad/s. Qual é a razão entre o momento de inércia do inseto e o momento de inércia do disco, ambos calculados em relação ao eixo de rotação, quando a barata chega à borda do disco?

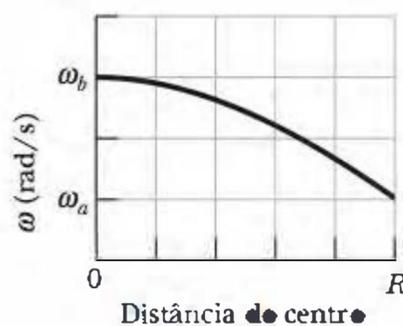



Figura 11-49 Problema 48.

•49 Dois discos estão montados (como um carrossel) no mesmo eixo, com rolamentos de baixo atrito, e podem ser acoplados e girar como se fossem um só disco. O primeiro disco, com um momento de inércia de 3,30 kg · m² em relação ao eixo central, é posto para girar no sentido anti-horário a 450 rev/min. O segundo disco, com um momento de inércia de 6,60 kg · m² em relação ao eixo central, é posto para girar no sentido anti-horário a 900 rev/min. Em seguida, os discos são acoplados. (a) Qual é a velocidade angular dos discos após o acoplamento? Se, em vez disso, o segundo disco é posto para girar a 900 rev/min no sentido horário, qual é (b) a velocidade angular e (c) o sentido de rotação dos discos após o acoplamento?

•50 O rotor de um motor elétrico tem um momento de inércia I_m = 2,0 × 10^{-3} kg · m² em relação ao eixo central. O motor é usado para mudar a orientação da sonda espacial no qual está montado. O eixo do motor coincide com o eixo central da sonda; a sonda possui um momento de inércia I_p = 12 kg · m² em relação a esse eixo. Calcule o número de revoluções do rotor necessárias para fazer a sonda girar 30° em torno do eixo central.

•51 Uma roda está girando livremente com uma velocidade angular de 800 rev/min em torno de um eixo cujo momento de inércia é desprezível. Uma segunda roda, inicialmente em repouso e com um momento de inércia duas vezes maior que a primeira, é acoplada à mesma haste. (a) Qual é a velocidade angular da combinação resultante do eixo e duas rodas? (b) Que fração da energia cinética de rotação inicial é perdida?

••52 Uma barata de massa m está na borda de um disco homogêneo de massa 4,00m que pode girar livremente em torno do centro como um carrossel. Inicialmente, a barata e o disco giram juntos com uma velocidade angular de 0,260 rad/s. A barata caminha até metade da distância ao centro do disco. (a) Qual é, nesse instante, a velocidade angular do sistema barata–disco? (b) Qual é a razão K/K_0 entre a nova energia cinética do sistema e a energia cinética antiga? (c) Por que a energia cinética varia?

••53 Uma barra fina homogênea com 0,500 m de comprimento e 4,00 kg de massa pode girar em um plano horizontal em torno de um eixo vertical que passa pelo centro da barra. A barra está em repouso quando uma bala de 3,0 g é disparada, no plano de rotação, em direção a uma das extremidades. Vista de cima, a trajetória da bala faz um ângulo θ = 60,0° com a barra (Fig. 11-50). Se a bala se aloja na barra e a velocidade angular da barra é 10 rad/s imediatamente após a colisão, qual é a velocidade da bala imediatamente antes do impacto?

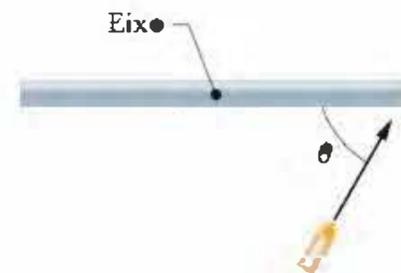



Figura 11-50 Problema 53.

••54 A Fig. 11-51 mostra uma vista de cima de um anel que pode girar em torno do centro como um carrossel. O raio externo R_2 é 0,800 m, o raio interno R_1 é R_2/2,00, a massa M é 8,00 kg e a massa da cruz no centro é desprezível. Inicialmente, o disco gira com uma velocidade angular de 8,00 rad/s, com um gato de massa $m = M/4{,}00$ na borda externa, a uma distância R_2 do centro. De quanto o gato vai aumentar a energia cinética do sistema gato-disco se rastejar até a borda interna, de raio R_1?

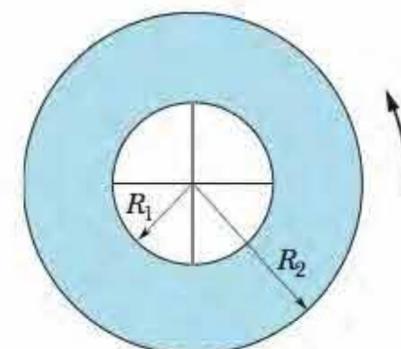



Figura 11-51 Problema 54

••55 Um disco de vinil horizontal de massa 0,10 kg e raio 0,10 m gira livremente em torno de um eixo vertical que passa pelo centro

com uma velocidade angular de 4,7 rad/s. O momento de inércia do disco em relação ao eixo de rotação é $5,0 \times 10^{-4}$ kg · m². Um pedaço de massa de modelar de massa 0,020 kg cai verticalmente e gruda na borda do disco. Qual é a velocidade angular do disco imediatamente após a massa cair?

••56 No salto em distância, o atleta deixa o solo com um momento angular que tende a girar o corpo para a frente. Essa rotação, caso não seja controlada, impede que o atleta chegue ao solo com a postura correta. O atleta evita que ela ocorra girando os braços estendidos para "absorver" o momento angular (Figura 11-18). Em 0,700 s, um dos braços descreve 0,500 rev e o outro descreve 1,000 rev. Trate cada braço como uma barra fina de massa 4,0 kg e comprimento 0,60 m, girando em torno de uma das extremidades. Qual é o módulo do momento angular total dos braços do atleta em relação a um eixo de rotação comum, passando pelos ombros, no referencial do atleta?

••57 Um disco homogêneo de massa $10m$ e raio $3,0r$ pode girar livremente como um carrossel em torno do centro fixo. Um disco homogêneo menor de massa m e raio r está sobre o disco maior, concêntrico com ele. Inicialmente, os dois discos giram juntos com uma velocidade angular de 20 rad/s. Em seguida, uma pequena perturbação faz com que o disco menor deslize para fora em relação ao disco maior até que sua borda fique presa na borda do disco maior. Depois disso, os dois discos passam novamente a girar juntos (sem que haja novos deslizamentos). (a) Qual é a velocidade angular final do sistema em relação ao centro do disco maior? (b) Qual é a razão K/K_0 entre a nova energia cinética do sistema e a energia cinética inicial?

••58 Uma plataforma horizontal com a forma de um disco circular gira sem atrito em torno de um eixo vertical que passa pelo centro do disco. A plataforma tem uma massa de 150 kg, um raio de 2,0 m e um momento de inércia de 300 kg · m² em relação ao eixo de rotação. Uma estudante de 60 kg caminha lentamente, a partir da borda da plataforma, em direção ao centro. Se a velocidade angular do sistema é 1,5 rad/s quando a estudante está na borda, qual é a velocidade angular quando está a 0,50 m de distância do centro?

••59 A Fig. 11-52 é uma vista de cima de uma barra fina homogênea, de comprimento 0,800 m e massa M, girando horizontalmente a 20,0 rad/s, no sentido anti-horário, em torno de um eixo que passa pelo centro. Uma partícula de massa $M/3,00$, inicialmente presa a uma extremidade da barra, é liberada e assume uma trajetória perpendicular à posição da barra no instante em que a partícula foi liberada. Se a velocidade v_p da partícula é 6,00 m/s maior que a velocidade da barra imediatamente após a liberação, qual é o valor de v_p?

Eixo de rotação

Figura 11-52 Problema 59.

••60 Na Fig. 11-53, uma bala de 1,0 g é disparada contra um bloco de 0,50 kg preso à extremidade de uma barra não homogênea de 0,50 kg com 0,60 m de comprimento. O sistema bloco–barra–bala passa a girar no plano do papel, em torno de um eixo fixo que passa por A. O momento de inércia da barra em relação a esse eixo é 0,060 kg · m². Trate o bloco como uma partícula. (a) Qual é o momento de inércia do sistema bloco–barra–bala em relação ao eixo que passa pelo ponto A? (b) Se a velocidade angular do sistema em relação ao eixo que passa por A imediatamente após o impacto é 4,5 rad/s, qual é a velocidade da bala imediatamente antes do impacto?

A
Barra
Bloco
Bala

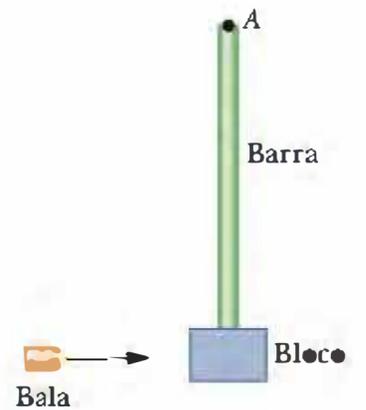



Figura 11-53 Problema 60.

••61 A barra homogênea (de 0,60 m de comprimento e 1,0 kg de massa) da Fig. 11-54 gira no plano do papel em torno de um eixo que passa por uma das extremidades, com um momento de inércia de 0,12 kg · m². Quando a barra passa pela posição mais baixa, colide com uma bola de massa de modelar de 0,20 kg, que fica grudada na extremidade da barra. Se a velocidade angular da barra imediatamente antes da colisão é 2,4 rad/s, qual é a velocidade angular do sistema barra–massa de modelar imediatamente após a colisão?

Eixo de rotação
Barra

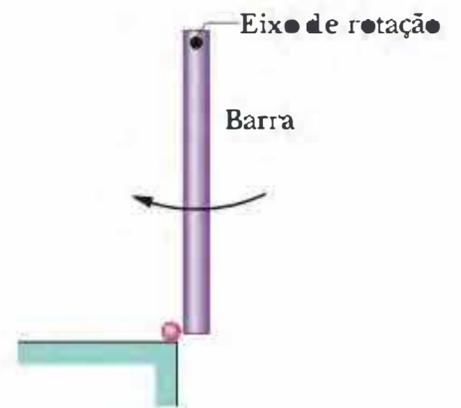



Figura 11-54 Problema 61.

•••62 Um trapezista pretende dar quatro cambalhotas em um intervalo de tempo $\Delta t = 1,87$ s antes de chegar ao companheiro de número. No primeiro e no último quarto de volta, mantém o corpo esticado como na Fig. 11-55, com um momento de inércia $I_1 = 19,9$ kg · m² em relação ao centro de massa (o ponto da figura). No resto do salto, mantém o corpo na posição grupada, com um momento de inércia $I_2 = 3,93$ kg · m². Qual deve ser a velocidade angular ω_2 do trapezista quando está na posição grupada?

Posição grupada
ω_2
I_2
Trajetória parabólica do CM
ω_1
I_1
Início
ω_1
I_1
Fim

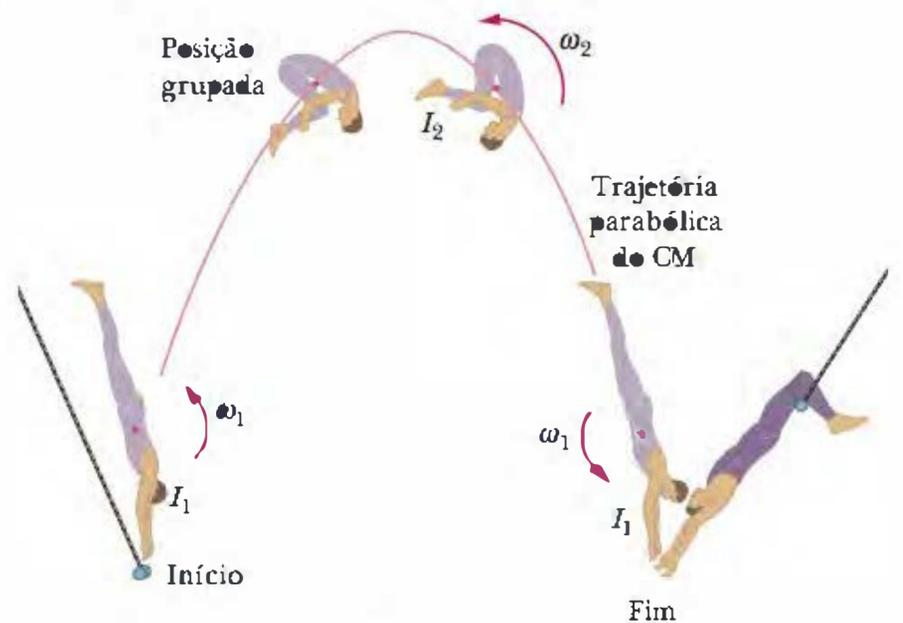



Figura 11-55 Problema 62.

•••63 Na Fig. 11-56, uma criança de 30 kg está em pé na borda de um carrossel estacionário de raio 2,0 m. O momento de inércia do carrossel em relação ao eixo de rotação é 150 kg · m². A criança

agarra uma bola de massa 1,0 kg lançada por um colega. Imediatamente antes de ser agarrada, a bola tem uma velocidade $\vec{v}$ de módulo 12 m/s que faz um ângulo $\phi = 37°$ com uma reta tangente à borda do carrossel, como mostra a figura. Qual é a velocidade angular do carrossel imediatamente após a criança agarrar a bola?

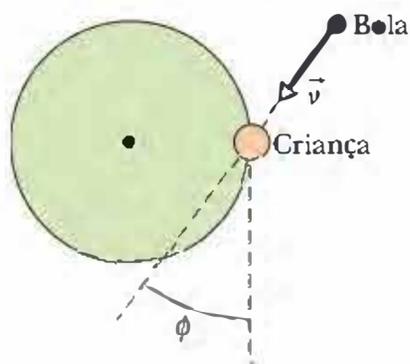



Figura 11-56 Problema 63.

•••64 Uma bailarina começa um *tour jeté* (Fig. 11-19*a*) com uma velocidade angular ω_i e um momento angular formado por duas partes: $I_{perna} = 1{,}44\ kg \cdot m^2$ da perna estendida, que faz um ângulo $\theta = 90{,}0°$ com o corpo, e $I_{tronco} = 0{,}660\ kg \cdot m^2$ do resto do corpo (principalmente o tronco). Quando está quase atingindo a altura máxima, as duas pernas fazem um ângulo $\theta = 30°$ com o corpo e a velocidade angular é ω_f (Fig. 11-19*b*). Supondo que I_{tronco} permanece o mesmo, qual é a valor da razão ω_f/ω_i?

•••65 Duas bolas de 2,00 kg estão presas às extremidades de uma barra fina de 50,0 cm de comprimento e massa desprezível. A barra está livre para girar sem atrito em um plano vertical em torno de um eixo horizontal que passa pelo centro. Com a barra inicialmente na horizontal (Fig. 11-57), um pedaço de massa de modelar de 50,0 g cai em uma das bolas, atingindo-a com uma velocidade de 3,00 m/s e aderindo a ela. (a) Qual é a velocidade angular do sistema imediatamente após o choque com a massa de modelar? (b) Qual é a razão entre a energia cinética do sistema após o choque e a energia cinética do pedaço de massa de modelar imediatamente antes do choque? (c) De que ângulo o sistema gira antes de parar momentaneamente?

Figura 11-57 Problema 65.

•••66 Na Fig. 11-58, um pequeno bloco de 50 g desliza para baixo em uma superfície curva sem atrito a partir de uma altura h = 20 cm e depois adere a uma barra homogênea de massa 100 g e comprimento 40 cm. A barra gira de um ângulo θ em torno do ponto O antes de parar momentaneamente. Determine θ.

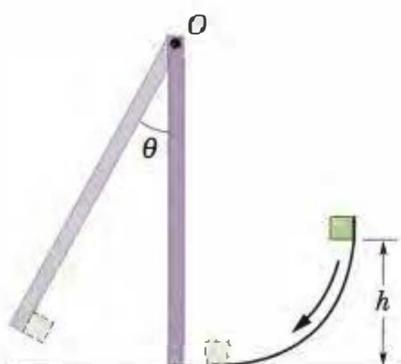



Figura 11-58 Problema 66.

•••67 A Fig. 11-59 é uma vista de cima de uma barra fina homogênea de comprimento 0,600 m e massa M girando horizontalmente a 80,0 rad/s no sentido anti-horário em torno de um eixo que passa pelo centro. Uma partícula de massa M/3,00, que se move horizontalmente com uma velocidade de 40,0 m/s, choca-se com a barra e fica presa. A trajetória da partícula é perpendicular à barra no momento do choque, que ocorre a uma distância d do centro da barra. (a) Para que valor de d a barra e a partícula permanecem em repouso após o choque? (b) Em que sentido a barra e a partícula giram após o choque se d é maior que o valor calculado no item (a)?

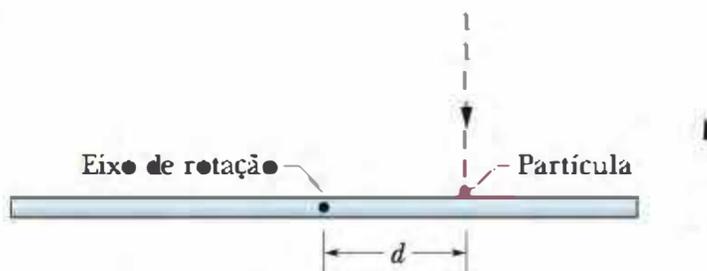



Figura 11-59 Problema 67.

Seção 11-12 Precessão de um Giroscópio

••68 Um pião gira a 30 rev/s em torno de um eixo que faz um ângulo de 30° com a vertical. A massa do pião é 0,50 kg, o momento de inércia em relação ao eixo central é $5{,}0 \times 10^{-4}\ kg \cdot m^2$ e o centro de massa está a 4,0 cm do ponto de apoio. Se a rotação é no sentido horário quando o pião é visto de cima, qual é (a) velocidade angular da precessão e (b) o sentido da precessão quando o pião é visto de cima?

••69 Um certo giroscópio é formado por um disco homogêneo com 50 cm de raio montado no centro de um eixo de 11 cm de comprimento e massa desprezível. O eixo está na posição horizontal, apoiado em uma das extremidades. Se o disco está girando em torno do eixo a 1000 rev/min, qual é a velocidade angular de precessão?

Problemas Adicionais

70 Uma bola maciça homogênea rola suavemente em um piso horizontal e depois começa a subir uma rampa com uma inclinação de 15,0°. A bola para momentaneamente após ter rolado 1,50 m ao longo da rampa. Qual era a velocidade inicial?

71 Na Fig. 11-60, uma força horizontal constante $\vec{F}$ de módulo 12 N é aplicada a um cilindro maciço homogêneo através de uma linha de pescar enrolada no cilindro. A massa do cilindro é 10 kg, o raio é 0,10 m e o cilindro rola suavemente em uma superfície horizontal. (a) Qual é o módulo da aceleração do centro de massa do cilindro? (b) Qual é o módulo da aceleração angular do cilindro em relação ao centro de massa? (c) Em termos dos vetores unitários, qual é a força de atrito que age sobre o cilindro?

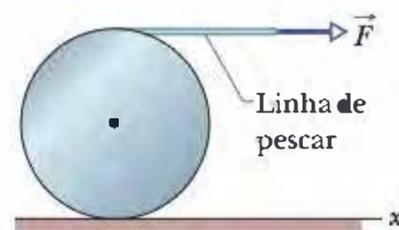



Figura 11-60 Problema 71.

72 Um cano de paredes finas rola no chão. Qual é a razão entre a energia cinética de translação do cano e a energia cinética de rotação em relação ao eixo central paralelo à sua maior dimensão?

73 Um carro de brinquedo de 3,0 kg g se move ao longo de um eixo x com uma velocidade dada por $\vec{v} = -2{,}0t^3\hat{i}$ m/s, com t em segundos. Para $t > 0$, qual é (a) o momento angular $\vec{L}$ do carro e (b) o torque τ sobre o carro, ambos calculados em relação à origem? Qual é o valor (c) de $\vec{L}$ e (d) de $\vec{\tau}$ em relação ao ponto (2,0 m; 5,0 m; 0)? Quais é o valor (e) de $\vec{L}$ e (f) de $\vec{\tau}$ em relação ao ponto (2,0 m; −5,0 m; 0)?

74 Uma roda gira no sentido horário em torno do eixo central com um momento angular de 600 kg · m²/s. No instante $t = 0$, um torque de módulo 50 N · m é aplicado à roda para inverter a rotação. Em que instante t a velocidade angular da roda se anula?

75 Um parquinho possui um pequeno carrossel com 1,20 m de raio e uma massa de 180 kg. O raio de giração do carrossel (veja o Problema 79 do Capítulo 10) é 91,0 cm. Uma criança com 44,0 kg de massa corre com uma velocidade de 3,00 m/s em uma trajetória tangente à borda do carrossel, inicialmente em repouso, e pula no carrossel. Despreze o atrito entre os rolamentos e o eixo do carrossel. Calcule (a) o momento de inércia do carrossel em relação ao eixo de rotação, (b) o módulo do momento angular da criança em relação ao eixo de rotação do carrossel e (c) a velocidade angular do carrossel e da criança após a criança saltar no carrossel.

76 Um bloco homogêneo de granito em forma de livro possui faces de 20 cm por 15 cm e uma espessura de 1,2 cm. A massa específica (massa por unidade de volume) do granito é 2,64 g/cm³. O bloco gira em tomo de um eixo perpendicular às faces, situado à meia distância entre o centro e um dos cantos. O momento angular em torno desse eixo é 0,104 kg · m²/s. Qual é a energia cinética de rotação do bloco em torno desse eixo?

77 Duas partículas de massa $2{,}90 \times 10^{-4}$ kg e velocidade 5,46 m/s se movem em sentidos opostos ao longo de retas paralelas separadas por uma distância de 4,20 cm. (a) Qual é o módulo L do momento angular do sistema das duas partículas em relação ao ponto médio da distância entre as duas retas? (b) O valor de L muda se o ponto em relação ao qual é calculado não está à meia distância entre as retas? Se o sentido de movimento de uma das partículas é invertido, qual é (c) a resposta do item (a) e (d) a resposta do item (b)?

78 Uma roda de 0,250 m de raio, que está se movendo inicialmente a 43,0 m/s, rola 225 m até parar. Calcule o módulo (a) da aceleração linear e (b) da aceleração angular da roda. (c) Se o momento de inércia da roda em torno do eixo central é 0,155 kg · m², calcule o módulo do torque em relação ao eixo central devido ao atrito sobre a roda.

79 As rodas A e B na Fig. 11-61 são conectadas por uma correia que não desliza. O raio de B é 3,00 vezes maior que o de A. Qual é a razão I_A/I_B entre os momentos de inércia das duas rodas se elas têm (a) o mesmo momento angular em relação aos respectivos eixos centrais e (b) a mesma energia cinética de rotação?

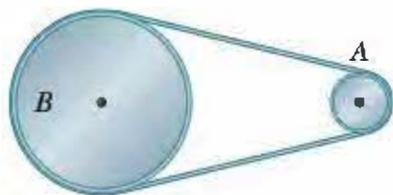



Figura 11-61 Problema 79.

80 Uma partícula de 2,50 kg que se move horizontalmente em um piso com velocidade $(-3{,}00\ \text{m/s})\hat{j}$ sofre uma colisão perfeitamente inelástica com uma partícula de 4,00 kg que se move horizontalmente no mesmo piso com velocidade $(4{,}50\ \text{m/s})\hat{i}$. A colisão ocorre nas coordenadas (−0,500 m, −0,100 m). Após a colisão e em termos dos vetores unitários, qual é o momento angular do sistema das duas partículas em relação à origem?

81 Uma roda homogênea de massa 10,0 kg e raio 0,400 m está montada rigidamente em um eixo que passa pelo centro (Fig. 11-62). O raio do eixo é 0,200 m e o momento de inércia do conjunto roda–eixo em relação ao eixo é 0,600 kg · m². A roda está inicialmente em repouso no alto de uma superfície que faz um ângulo $\theta = 30{,}0°$ com a horizontal; o eixo está apoiado na superfície, enquanto a roda penetra em um sulco aberto na superfície, sem tocá-la. Depois de liberado, o eixo rola para baixo, suavemente e sem deslizamento, ao longo da superfície. Depois que o conjunto roda-eixo desce 2,00 m ao longo da superfície, qual é (a) a energia cinética de rotação e (b) a energia cinética de translação do conjunto?

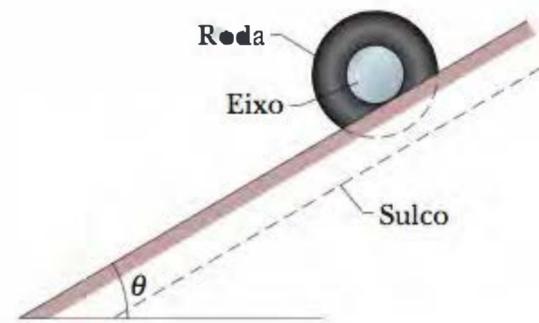



Figura 11-62 Problema 81.

82 Uma barra homogênea gira em um plano horizontal em torno de um eixo vertical que passa por uma das extremidades. A barra tem 6,00 m de comprimento, pesa 10,0 N e gira a 240 rev/min. Calcule (a) o momento de inércia da barra em relação ao eixo de rotação e (b) o módulo do momento angular em torno desse eixo.

83 Uma esfera maciça com 36,0 N de peso sobe rolando um plano inclinado com um ângulo de 30,0°. Na base do plano inclinado, o centro de massa da esfera possui uma velocidade de translação de 4,90 m/s. (a) Qual é a energia cinética da esfera na base do plano? (b) Que distância a esfera sobe ao longo do plano? (c) A resposta do item (b) depende da massa da esfera?

84 Suponha que o ioiô no Problema 17, em vez de rolar a partir do repouso, é arremessado para baixo com uma velocidade inicial de 1,3 m/s. (a) Quanto tempo o ioiô leva para chegar à extremidade da corda? Nesse instante, qual é o valor (b) da energia cinética total, (c) da velocidade linear, (d) da energia cinética de translação, (e) da velocidade angular e (f) da energia cinética de rotação?

85 Uma menina de massa M está em pé na borda de um carrossel sem atrito de raio R e momento de inércia I que está parado. A menina joga uma pedra de massa m horizontalmente em uma direção tangente à borda do carrossel. A velocidade da pedra em relação ao chão é v. Depois disso, qual é (a) a velocidade angular do carrossel e (b) a velocidade linear da garota?

86 No instante $t = 0$, o vetor posição de uma partícula de 2,0 kg em relação à origem é $\vec{r} = (4{,}0\ \text{m})\hat{i} - (2{,}0\ \text{m})\hat{j}$. A velocidade da partícula é dada por $\vec{v} = (-6{,}0t^2\ \text{m/s})\hat{i}$ para $t \geq 0$ em segundos. Qual é (a) o momento angular $\vec{L}$ da partícula e (b) o torque $\vec{\tau}$ a que a partícula está submetida, ambos em relação à origem, em termos dos vetores unitários e para $t > 0$? Qual é (c) o valor de $\vec{L}$ e (d) o valor de $\vec{\tau}$ em relação ao ponto (−2,0 m; −3,0 m; 0) para $t > 0$?

87 Se as calotas polares de gelo da Terra derretessem totalmente e a água voltasse para os oceanos, estes ficariam cerca de 30 m mais profundos. Que efeito isso teria sobre a rotação da Terra? Faça uma estimativa de qual seria a variação da duração do dia.

88 Um avião de 1200 kg está voando em uma linha reta a 80 m/s, 1,3 km acima do solo. Qual é o módulo do momento angular do avião em relação a um ponto no solo verticalmente abaixo do local onde se encontra?

89 Com eixo e raios de massa desprezível e um aro fino, uma certa roda de bicicleta tem um raio de 0,350 m, pesa 37,0 N e pode girar em torno do eixo com atrito desprezível. Um homem segura a roda acima da cabeça com uma das mãos, com o eixo na posição vertical, enquanto está sentado em um banco que pode girar sem atrito; a roda gira no sentido horário, quando vista de cima, com uma velocidade angular de 57,7 rad/s, e o banco está inicialmente em repouso. O momento de inércia do sistema *roda* + *homem* + *banco* em relação ao eixo de rotação comum é 2,10 kg · m^2. O homem usa a mão livre para interromper bruscamente a rotação da roda (em relação ao banco). Determine (a) a velocidade angular resultante e (b) o sentido de rotação do sistema.

90 Para uma pessoa de 84 kg que se encontra no equador, qual é o módulo do seu momento angular em relação ao centro da Terra devido à rotação da Terra?

91 Uma pequena esfera maciça com 0,25 cm de raio e uma massa de 0,56 g rola sem deslizar no interior de um grande hemisfério fixo com 15 cm de raio e um eixo de simetria vertical. A esfera parte do repouso no alto do hemisfério. (a) Qual é a energia cinética da esfera ao chegar ao ponto mais baixo do hemisfério? (b) Que fração da energia cinética da esfera no ponto mais baixo do hemisfério está associada à rotação em torno de um eixo que passa pelo centro de massa? (c) Qual é o módulo da força normal que a esfera exerce sobre o hemisfério no instante em que chega ao ponto mais baixo?

92 Um automóvel com 1700 kg de massa acelera do repouso até 40 km/h em 10 s. Supondo que as rodas são discos homogêneos de 32 kg, determine, no final do intervalo de 10 s, (a) a energia cinética de rotação de cada roda em torno do respectivo eixo, (b) a energia cinética de cada roda e (c) a energia cinética total do automóvel.

93 Um corpo de raio R e massa m rola suavemente com velocidade v em uma superfície horizontal e depois sobe uma colina até uma altura máxima h. (a) Se $h = 3v^2/4g$, qual é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo de rotação que passa pelo centro de massa? (b) Que corpo pode ser esse?

APÊNDICE A

O Sistema Internacional de Unidades (SI)*

Tabela 1

As Unidades Fundamentais do SI

Grandeza	Nome	Símbolo	Definição
comprimento	metro	m	"... a distância percorrida pela luz no vácuo em 1/299.792.458 de segundo." (1983)
massa	quilograma	kg	"... este protótipo [um certo cilindro de platina-irídio] será considerado daqui em diante como a unidade de massa." (1889)
tempo	segundo	s	"... a duração de 9.192.631.770 períodos da radiação correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio-133." (1967)
corrente elétrica	ampère	A	"... a corrente constante, que, se mantida em dois condutores paralelos retos de comprimento infinito, de seção transversal circular desprezível e separados por um distância de 1 m no vácuo, produziria entre estes condutores uma força igual a 2×10^{-7} newton por metro de comprimento." (1946)
temperatura termodinâmica	kelvin	K	"... a fração 1/273,16 da temperatura termodinâmica do ponto triplo da água." (1967)
quantidade de matéria	mol	mol	"... a quantidade de matéria de um sistema que contém um número de entidades elementares igual ao número de átomos que existem em 0,012 quilograma de carbono-12." (1971)
intensidade luminosa	candela	cd	"... a intensidade luminosa, em uma dada direção, de uma fonte que emite radiação monocromática de frequência 540×10^{2} hertz e que irradia nesta direção com uma intensidade de 1/683 watt por esferorradiano." (1979)

*Adaptado de "The International System of Units (SI)", Publicação Especial 330 do National Bureau of Standards, edição de 2008. As definições aqui descritas foram adotadas pela Conferência Nacional de Pesos e Medidas, um órgão internacional, nas datas indicadas. A candela não é usada neste livro.

Tabela 2

Algumas Unidades Secundárias do SI

Grandeza	Nome da Unidade	Símbolo	
área	metro quadrado	m^2	
volume	metro cúbico	m^3	
frequência	hertz	Hz	s^{-1}
massa específica	quilograma por metro cúbico	kg/m^3	
velocidade escalar, velocidade	metro por segundo	m/s	
velocidade angular	radiano por segundo	rad/s	
aceleração	metro por segundo ao quadrado	m/s^2	
aceleração angular	radiano por segundo ao quadrado	rad/s^2	
força	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
pressão	pascal	Pa	N/m^2
trabalho, energia, quantidade de calor	joule	J	$N \cdot m$
potência	watt	W	J/s
quantidade de carga elétrica	coulomb	C	$A \cdot s$
diferença de potencial, força eletromotriz	volt	V	W/A
intensidade de campo elétrico	volt por metro (ou newton por coulomb)	V/m	N/C
resistência elétrica	ohm	Ω	V/A
capacitância	farad	F	$A \cdot s/V$
fluxo magnético	weber	Wb	$V \cdot s$
indutância	henry	H	$V \cdot s/A$
densidade de fluxo magnético	tesla	T	Wb/m^2
intensidade de campo magnético	ampère por metro	A/m	
entropia	joule por kelvin	J/K	
calor específico	joule por quilograma-kelvin	$J/(kg \cdot K)$	
condutividade térmica	watt por metro-kelvin	$W/(m \cdot K)$	
intensidade radiante	watt por esferorradiano	W/sr	

Tabela 3

As Unidades Suplementares do SI

Grandeza	Nomeda Unidade	Símbolo
ângulo plano	radiano	rad
ângulo sólido	esferorradiano	sr

Algumas Constantes Fundamentais da Física*

Constante	Símbolo	Valor Prático	Melhor Valor (2006)	
			Valor[a]	Incerteza[b]
Velocidade da luz no vácuo	c	$3{,}00 \times 10^{8}$ m/s	2,997 924 58	exata
Carga elementar	e	$1{,}60 \times 10^{-19}$ C	1,602 176 487	0,025
Constante gravitacional	G	$6{,}67 \times 10^{-11}$ $m^3/s^2 \cdot kg$	6,67428	100
Constante universal dos gases	R	8,31 J/mol · K	8,314 472	1,7
Constante de Avogadro	N_A	$6{,}02 \times 10^{23}$ mol^{-1}	6,022 141 79	0,050
Constante de Boltzmann	k	$1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K	1,3806504	1,7
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5{,}67 \times 10^{-8}$ $W/m^2 \cdot K^4$	5,670400	7,0
Volume molar de um gás ideal nas CNTP[c]	V_m	$2{,}27 \times 10^{-2}$ m^3/mol	2,271 098 1	1,7
Constante elétrica	ϵ_0	$8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m	8,854 187 817 62	exata
Constante magnética	μ_0	$1{,}26 \times 10^{-6}$ H/m	1,256 637 061 43	exata
Constante de Planck	h	$6{,}63 \times 10^{-34}$ J · s	6,626 068 96	0,050
Massa do elétron[d]	m_e	$9{,}11 \times 10^{-31}$ kg	9,109 382 15	0,050
		$5{,}49 \times 10^{-4}$ u	5,485 799 094 3	$4{,}2 \times 10^{-4}$
Massa do próton[d]	m_p	$1{,}67 \times 10^{-27}$ kg	1,672 621 637	0,050
		1,0073 u	1,007 276 466 77	$1{,}0 \times 10^{-4}$
Razão entre a massa do próton e a massa do elétron	m_p/m_e	1840	1836,152 672 47	$4{,}3 \times 10^{-4}$
Razão entre a massa e a carga do elétron	e/m_e	$1{,}76 \times 10^{11}$ C/kg	1,758 820 150	0,025
Massa do nêutron[d]	m_n	$1{,}68 \times 10^{-27}$ kg	1,674 927 211	0,050
		1,0087 u	1,008 664 915 97	$4{,}3 \times 10^{-4}$
Massa do átomo de hidrogênio[d]	$m_{^1H}$	1,0078 u	1,007 825 031 6	0,0005
Massa do átomo de deutério[d]	$m_{^2H}$	2,0136 u	2,013 553 212 724	$3{,}9 \times 10^{-5}$
Massa do átomo de hélio[d]	$m_{^4He}$	4,0026 u	4,002 603 2	0,067
Massa do múon	m_μ	$1{,}88 \times 10^{-28}$ kg	1,883 531 30	0,056
Momento magnético do elétron	μ_e	$9{,}28 \times 10^{-24}$ J/T	9,284 763 77	0,025
Momento magnético do próton	μ_p	$1{,}41 \times 10^{-26}$ J/T	1,410 606 662	0,026
Magnéton de Bohr	μ_B	$9{,}27 \times 10^{-24}$ J/T	9,274 009 15	0,025
Magnéton nuclear	μ_N	$5{,}05 \times 10^{-27}$ J/T	5,050 783 24	0,025
Raio de Bohr	a	$5{,}29 \times 10^{-11}$ m	5,291 772 085 9	$6{,}8 \times 10^{-4}$
Constante de Rydberg	R	$1{,}10 \times 10^{7}$ m^{-1}	1,097 373 156 852 7	$6{,}6 \times 10^{-6}$
Comprimento de onda de Compton do elétron	λ_C	$2{,}43 \times 10^{-12}$ m	2,426 310 217 5	0,0014

[a]Os valores desta coluna têm a mesma unidade e potência de 10 que o valor prático.
[b]Partes por milhão.
[c]CNTP significa condições normais de temperatura e pressão: 0°C e 1,0 atm (0,1 MPa).
[d]As massas dadas em u estão em unidades unificadas de massa atômica: 1 u 5 × 1,660 538 782 × 10^{-27} kg.

*Os valores desta tabela foram selecionados entre os valores recomendados pelo CODATA em 2006 (www.physics.nist.gov).

Alguns Dados Astronômicos

Algumas Distâncias da Terra

À Lua*	$3{,}82 \times 10^{8}$ m	Ao centro da nossa galáxia	$2{,}2 \times 10^{20}$ m
Ao Sol*	$1{,}50 \times 10^{11}$ m	À galáxia de Andrômeda	$2{,}1 \times 10^{22}$ m
À estrela mais próxima (Proxima Centauri)	$4{,}04 \times 10^{16}$ m	Ao limite do universo observável	$\sim 10^{26}$ m

*Distância média.

O Sol, a Terra e a Lua

Propriedade	Unidade	Sol	Terra	Lua
Massa	kg	$1{,}99 \times 10^{30}$	$5{,}98 \times 10^{24}$	$7{,}36 \times 10^{22}$
Raio médio	m	$6{,}96 \times 10^{8}$	$6{,}37 \times 10^{6}$	$1{,}74 \times 10^{6}$
Massa específica média	kg/m³	1410	5520	3340
Aceleração de queda livre na superfície	m/s²	274	9,81	1,67
Velocidade de escape	km/s	618	11,2	2,38
Período de rotação[a]	—	37 dias nos polos[b] 26 dias no equador[b]	23 h 56 min	27,3 d
Potência de radiação[c]	W	$3{,}90 \times 10^{26}$		

[a]Medido em relação às estrelas distantes.
[b]O Sol, uma bola de gás, não gira como um corpo rígido.
[c]Perto dos limites da atmosfera terrestre, a energia solar é recebida a uma taxa de 1340 W/m², supondo uma incidência normal.

Algumas Propriedades dos Planetas

	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Netuno	Plutão*
Distância média do Sol, 10^6 km	57,9	108	150	228	778	1430	2870	4500	5900
Período de revolução, anos	0,241	0,615	1,00	1,88	11,9	29,5	84,0	165	248
Período de rotação[a], dias	58,7	−243[b]	0,997	1,03	0,409	0,426	−0,451[b]	0,658	6,39
Velocidade orbital, km/s	47,9	35,0	29,8	24,1	13,1	9,64	6,81	5,43	4,74
Inclinação do eixo em relação à órbita	<28°	≈3°	23,4°	25,0°	3,08°	26,7°	97,9°	29,6°	57,5°
Inclinação da órbita em relação à órbita da Terra	7,00°	3,39°		1,85°	1,30°	2,49°	0,77°	1,77°	17,2°
Excentricidade da órbita	0,206	0,0068	0,0167	0,0934	0,0485	0,0556	0,0472	0,0086	0,250
Diâmetro equatorial, km	4880	12 100	12 800	6790	143 000	120 000	51 800	49 500	2300
Massa (Terra = 1)	0,0558	0,815	1,000	0,107	318	95,1	14,5	17,2	0,002
Densidade (água = 1)	5,60	5,20	5,52	3,95	1,31	0,704	1,21	1,67	2,03
Valor de g na superfície[c], m/s²	3,78	8,60	9,78	3,72	22,9	9,05	7,77	11,0	0,5
Velocidade de escape[c], km/s	4,3	10,3	11,2	5,0	59,5	35,6	21,2	23,6	1,3
Satélites conhecidos	0	0	1	2	63 + anéis	60 + anéis	27 + anéis	13 + anéis	3

[a]Medido em relação às estrelas distantes.
[b]Vênus e Urano giram no sentido contrário ao do movimento orbital.
[c]Aceleração gravitacional medida no equador do planeta.

*Desde 2008, por decisão da União Astronômica Internacional, Plutão não é mais um planeta e sim um plutoide, uma nova classe de astro que, até o momento, tem apenas dois representantes: Plutão e Eris. (N.T.)

Fatores de Conversão

Os fatores de conversão podem ser lidos diretamente destas tabelas. Assim, por exemplo, 1 grau = $2{,}778 \times 10^{-3}$ revoluções e, portanto, $16{,}7° = 16{,}7 \times 2{,}778 \times 10^{-3}$ revolução. As unidades do SI estão em letras maiúsculas. Adaptado parcialmente de G. Shortley and D. Williams, *Elements of Physics*, 1971, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Ângulo Plano

	°	′	″	RADIANOS	rev
1 grau =	1	60	3600	$1{,}745 \times 10^{-2}$	$2{,}778 \times 10^{-3}$
1 minuto =	$1{,}667 \times 10^{-2}$	1	60	$2{,}909 \times 10^{-4}$	$4{,}630 \times 10^{-5}$
1 segundo =	$2{,}778 \times 10^{-4}$	$1{,}667 \times 10^{-2}$	1	$4{,}848 \times 10^{-6}$	$7{,}716 \times 10^{-7}$
1 RADIANO =	57,30	3438	$2{,}063 \times 10^{5}$	1	0,1592
1 revolução =	360	$2{,}16 \times 10^{4}$	$1{,}296 \times 10^{6}$	6,283	1

Ângulo Sólido

1 esfera = 4π esferorradianos = 12,57 esferorradianos

Comprimento

	cm	METROS	km	polegadas	pés	milhas
1 centímetro =	1	10^{-2}	10^{-5}	0,3937	$3{,}281 \times 10^{-2}$	$6{,}214 \times 10^{-6}$
1 METRO =	100	1	10^{-3}	39,37	3,281	$6{,}214 \times 10^{-4}$
1 quilômetro =	10^{5}	1000	1	$3{,}937 \times 10^{4}$	3281	0,6214
1 polegada =	2,540	$2{,}540 \times 10^{-2}$	$2{,}540 \times 10^{-5}$	1	$8{,}333 \times 10^{-2}$	$1{,}578 \times 10^{-5}$
1 pé =	30,48	0,3048	$3{,}048 \times 10^{-4}$	12	1	$1{,}894 \times 10^{-4}$
1 milha =	$1{,}609 \times 10^{5}$	1609	1,609	$6{,}336 \times 10^{4}$	5280	1

1 angström = 10^{-10} m
1 milha marítima = 1852 m = 1,151 milha = 6076 pés
1 fermi = 10^{-15} m
1 ano-luz = $9{,}461 \times 10^{12}$ km
1 parsec = $3{,}084 \times 10^{13}$ km
1 braça = 6 pés
1 raio de Bohr = $5{,}292 \times 10^{-11}$ m
1 jarda = 3 pés
1 vara = 16,5 pés
1 mil = 10^{-3} polegadas
1 nm = 10^{-9} m

Área

	METROS²	cm²	pés²	polegadas²
1 METRO QUADRADO =	1	10^{4}	10,76	1550
1 centímetro quadrado =	10^{-4}	1	$1{,}076 \times 10^{-3}$	0,1550
1 pé quadrado =	$9{,}290 \times 10^{-2}$	929,0	1	144
1 polegada quadrada =	$6{,}452 \times 10^{-4}$	6,452	$6{,}944 \times 10^{-3}$	1

1 milha quadrada = $2{,}788 \times 10^{7}$ pés² = 640 acres
1 barn = 10^{-28} m²
1 acre = 43.560 pés²
1 hectare = 10^{4} m² = 2,471 acres

Volume

	METROS³	cm³	L	pés³	polegadas³
1 METRO CÚBICO =	1	10^6	1000	35,31	$6,102 \times 10^4$
1 centímetro cúbico =	10^{-6}	1	$1,000 \times 10^{-3}$	$3,531 \times 10^{-5}$	$6,102 \times 10^{-2}$
1 litro =	$1,000 \times 10^{-3}$	1000	1	$3,531 \times 10^{-2}$	61,02
1 pé cúbico =	$2,832 \times 10^{-2}$	$2,832 \times 10^4$	28,32	1	1728
1 polegada cúbica =	$1,639 \times 10^{-5}$	16,39	$1,639 \times 10^{-2}$	$5,787 \times 10^{-4}$	1

1 galão americano = 4 quartos de galão americano = 8 quartilhos americanos = 128 onças fluidas americanas = 231 polegadas³
1 galão imperial britânico = 277,4 polegadas³ = 1,201 galão americano

Massa

As grandezas nas áreas sombreadas não são unidades de massa, mas são frequentemente usadas como tal. Assim, por exemplo, quando escrevemos 1 kg "=" 2,205 lb, isso significa que um quilograma é a *massa* que *pesa* 2,205 libras em um local onde g tem o valor padrão de 9,80665 m/s².

	g	QUILOGRAMAS	slugs	u	onças	libras	toneladas
1 grama =	1	0,001	$6,852 \times 10^{-5}$	$6,022 \times 10^{23}$	$3,527 \times 10^{-2}$	$2,205 \times 10^{-3}$	$1,102 \times 10^{-6}$
1 QUILOGRAMA =	1000	1	$6,852 \times 10^{-2}$	$6,022 \times 10^{26}$	35,27	2,205	$1,102 \times 10^{-3}$
1 slug =	$1,459 \times 10^4$	14,59	1	$8,786 \times 10^{27}$	514,8	32,17	$1,609 \times 10^{-2}$
1 unidade de massa atômica =	$1,661 \times 10^{-24}$	$1,661 \times 10^{-27}$	$1,138 \times 10^{-28}$	1	$5,857 \times 10^{-26}$	$3,662 \times 10^{-27}$	$1,830 \times 10^{-30}$
1 onça =	28,35	$2,835 \times 10^{-2}$	$1,943 \times 10^{-3}$	$1,718 \times 10^{25}$	1	$6,250 \times 10^{-2}$	$3,125 \times 10^{-5}$
1 libra =	453,6	0,4536	$3,108 \times 10^{-2}$	$2,732 \times 10^{26}$	16	1	0,0005
1 tonelada =	$9,072 \times 10^5$	907,2	62,16	$5,463 \times 10^{29}$	$3,2 \times 10^4$	2000	1

1 tonelada métrica = 1000 kg

Massa Específica

As grandezas nas áreas sombreadas são pesos específicos e, como tal, dimensionalmente diferentes das massas específicas. Veja a nota na tabela de massas.

	slugs/pé³	QUILOGRAMAS/METRO³	g/cm³	lb/pé³	lb/polegada³
1 slug por pé³ =	1	515,4	0,5154	32,17	$1,862 \times 10^{-2}$
1 QUILOGRAMA por METRO³ =	$1,940 \times 10^{-3}$	1	0,001	$6,243 \times 10^{-2}$	$3,613 \times 10^{-5}$
1 grama por centímetro³ =	1,940	1000	1	62,43	$3,613 \times 10^{-2}$
1 libra por pé³ =	$3,108 \times 10^{-2}$	16,02	$16,02 \times 10^{-2}$	1	$5,787 \times 10^{-4}$
1 libra por polegada³ =	53,71	$2,768 \times 10^4$	27,68	1728	1

Tempo

	anos	d	h	min	SEGUNDOS
1 ano =	1	365,25	$8,766 \times 10^3$	$5,259 \times 10^5$	$3,156 \times 10^7$
1 dia =	$2,738 \times 10^{-3}$	1	24	1440	$8,640 \times 10^4$
1 hora =	$1,141 \times 10^{-4}$	$4,167 \times 10^{-2}$	1	60	3600
1 minuto =	$1,901 \times 10^{-6}$	$6,944 \times 10^{-4}$	$1,667 \times 10^{-2}$	1	60
1 SEGUNDO =	$3,169 \times 10^{-8}$	$1,157 \times 10^{-5}$	$2,778 \times 10^{-4}$	$1,667 \times 10^{-2}$	1

Velocidade

	pés/s	km/h	METROS/SEGUNDO	milhas/h	cm/s
1 pé por segundo =	1	1,097	0,3048	0,6818	30,48
1 quilômetro por hora =	0,9113	1	0,2778	0,6214	27,78
1 METRO por SEGUNDO =	3,281	3,6	1	2,237	100
1 milha por hora =	1,467	1,609	0,4470	1	44,70
1 centímetro por segundo =	$3{,}281 \times 10^{-2}$	$3{,}6 \times 10^{-2}$	0,01	$2{,}237 \times 10^{-2}$	1

1 nó = 1 milha marítima/h = 1,688 pés/s   1 milha/min = 88,00 pés/s = 60,00 milhas/h

Força

As unidades de força nas áreas sombreadas são atualmente pouco usadas. 1 grama-força (= 1 gf) é a força da gravidade que atua sobre um objeto cuja massa é 1 grama em um local onde g possui o valor padrão de 9,80665 m/s^2.

	dinas	NEWTONS	libras	poundals	gf	kgf
1 dina =	1	10^{-5}	$2{,}248 \times 10^{-6}$	$7{,}233 \times 10^{-5}$	$1{,}020 \times 10^{-3}$	$1{,}020 \times 10^{-6}$
1 NEWTON =	10^{5}	1	0,2248	7,233	102,0	0,1020
1 libra =	$4{,}448 \times 10^{5}$	4,448	1	32,17	453,6	0,4536
1 poundal =	$1{,}383 \times 10^{4}$	0,1383	$3{,}108 \times 10^{-2}$	1	14,10	$1{,}410 \times 10^{2}$
1 grama-força =	980,7	$9{,}807 \times 10^{-3}$	$2{,}205 \times 10^{-3}$	$7{,}093 \times 10^{-2}$	1	0,001
1 quilograma-força =	$9{,}807 \times 10^{5}$	9,807	2,205	70,93	1000	1

1 tonelada = 2000 lb

Pressão

	atm	dinas/cm^2	polegadas de água	cmHg	PASCALS	libras/polegada^2	libras/pé^2
1 atmosfera =	1	$1{,}013 \times 10^{6}$	406,8	76	$1{,}013 \times 10^{5}$	14,70	2116
1 dina por centímetro^2 =	$9{,}869 \times 10^{-7}$	1	$4{,}015 \times 10^{-4}$	$7{,}501 \times 10^{-5}$	0,1	$1{,}405 \times 10^{-5}$	$2{,}089 \times 10^{-3}$
1 polegada de água[a] a 4°C =	$2{,}458 \times 10^{-3}$	2491	1	0,1868	249,1	$3{,}613 \times 10^{-2}$	5,202
1 centímetro de mercúrio[a] a 0°C =	$1{,}316 \times 10^{-2}$	$1{,}333 \times 10^{4}$	5,353	1	1333	0,1934	27,85
1 PASCAL =	$9{,}869 \times 10^{-6}$	10	$4{,}015 \times 10^{-3}$	$7{,}501 \times 10^{-4}$	1	$1{,}450 \times 10^{-4}$	$2{,}089 \times 10^{-2}$
1 libra por polegada^2 =	$6{,}805 \times 10^{-2}$	$6{,}895 \times 10^{4}$	27,68	5,171	$6{,}895 \times 10^{3}$	1	144
1 libra por pé^2 =	$4{,}725 \times 10^{-4}$	478,8	0,1922	$3{,}591 \times 10^{-2}$	47,88	$6{,}944 \times 10^{-3}$	1

[a]Onde a aceleração da gravidade possui o valor padrão de 9,80665 m/s^2.

1 bar = 10^6 dina/cm^2 = 0,1 MPa   1 milibar = 10^3 dinas/cm^2 = 10^2 Pa   1 torr = 1 mmHg

Energia, Trabalho e Calor

As grandezas nas áreas sombreadas não são unidades de energia, mas foram incluídas por conveniência. Elas se originam da fórmula relativística de equivalência entre massa e energia $E = mc^2$ e representam a energia equivalente a um quilograma ou uma unidade unificada de massa atômica (u) (as duas últimas linhas) e a massa equivalente a uma unidade de energia (as duas colunas da extremidade direita).

	Btu	erg	pés-libras	hp · h	JOULES	cal	kW · h	eV	MeV	kg	u
1 Btu =	1	$1{,}055 \times 10^{10}$	777,9	$3{,}929 \times 10^{-4}$	1055	252,0	$2{,}930 \times 10^{-4}$	$6{,}585 \times 10^{21}$	$6{,}585 \times 10^{15}$	$1{,}174 \times 10^{-14}$	$7{,}070 \times 10^{12}$
1 erg =	$9{,}481 \times 10^{-11}$	1	$7{,}376 \times 10^{-8}$	$3{,}725 \times 10^{-14}$	10^{-7}	$2{,}389 \times 10^{-8}$	$2{,}778 \times 10^{-14}$	$6{,}242 \times 10^{11}$	$6{,}242 \times 10^{5}$	$1{,}113 \times 10^{-24}$	670,2
1 pé-libra =	$1{,}285 \times 10^{-3}$	$1{,}356 \times 10^{7}$	1	$5{,}051 \times 10^{-7}$	1,356	0,3238	$3{,}766 \times 10^{-7}$	$8{,}464 \times 10^{18}$	$8{,}464 \times 10^{12}$	$1{,}509 \times 10^{-17}$	$9{,}037 \times 10^{9}$
1 horsepower-hora =	2545	$2{,}685 \times 10^{13}$	$1{,}980 \times 10^{6}$	1	$2{,}685 \times 10^{6}$	$6{,}413 \times 10^{5}$	0,7457	$1{,}676 \times 10^{25}$	$1{,}676 \times 10^{19}$	$2{,}988 \times 10^{-11}$	$1{,}799 \times 10^{16}$
1 JOULE =	$9{,}481 \times 10^{-4}$	10^{7}	0,7376	$3{,}725 \times 10^{-7}$	1	0,2389	$2{,}778 \times 10^{-7}$	$6{,}242 \times 10^{18}$	$6{,}242 \times 10^{12}$	$1{,}113 \times 10^{-17}$	$6{,}702 \times 10^{9}$
1 caloria =	$3{,}968 \times 10^{-3}$	$4{,}1868 \times 10^{7}$	3,088	$1{,}560 \times 10^{-6}$	4,1868	1	$1{,}163 \times 10^{-6}$	$2{,}613 \times 10^{19}$	$2{,}613 \times 10^{13}$	$4{,}660 \times 10^{-17}$	$2{,}806 \times 10^{10}$
1 quilowatt-hora =	3413	$3{,}600 \times 10^{13}$	$2{,}655 \times 10^{6}$	1,341	$3{,}600 \times 10^{6}$	$8{,}600 \times 10^{5}$	1	$2{,}247 \times 10^{25}$	$2{,}247 \times 10^{19}$	$4{,}007 \times 10^{-11}$	$2{,}413 \times 10^{16}$
1 elétron-volt =	$1{,}519 \times 10^{-22}$	$1{,}602 \times 10^{-12}$	$1{,}182 \times 10^{-19}$	$5{,}967 \times 10^{-26}$	$1{,}602 \times 10^{-19}$	$3{,}827 \times 10^{-20}$	$4{,}450 \times 10^{-26}$	1	10^{-6}	$1{,}783 \times 10^{-36}$	$1{,}074 \times 10^{-9}$
1 milhão de elétron-volts =	$1{,}519 \times 10^{-16}$	$1{,}602 \times 10^{-6}$	$1{,}182 \times 10^{-13}$	$5{,}967 \times 10^{-20}$	$1{,}602 \times 10^{-13}$	$3{,}827 \times 10^{-14}$	$4{,}450 \times 10^{-20}$	10^{6}	1	$1{,}783 \times 10^{-30}$	$1{,}074 \times 10^{-3}$
1 quilograma =	$8{,}521 \times 10^{13}$	$8{,}987 \times 10^{23}$	$6{,}629 \times 10^{16}$	$3{,}348 \times 10^{10}$	$8{,}987 \times 10^{16}$	$2{,}146 \times 10^{16}$	$2{,}497 \times 10^{10}$	$5{,}610 \times 10^{35}$	$5{,}610 \times 10^{29}$	1	$6{,}022 \times 10^{26}$
1 unidade unificada de massa atômica =	$1{,}415 \times 10^{-13}$	$1{,}492 \times 10^{-3}$	$1{,}101 \times 10^{-10}$	$5{,}559 \times 10^{-17}$	$1{,}492 \times 10^{-10}$	$3{,}564 \times 10^{-11}$	$4{,}146 \times 10^{-17}$	$9{,}320 \times 10^{8}$	932,0	$1{,}661 \times 10^{-27}$	1

Potência

	Btu/h	pés-libras/s	hp	cal/s	kW	WATTS
1 Btu por hora =	1	0,2161	$3{,}929 \times 10^{-4}$	$6{,}998 \times 10^{-2}$	$2{,}930 \times 10^{-4}$	0,2930
1 pé-libra por segundo =	4,628	1	$1{,}818 \times 10^{-3}$	0,3239	$1{,}356 \times 10^{-3}$	1,356
1 horsepower =	2545	550	1	178,1	0,7457	745,7
1 caloria por segundo =	14,29	3,088	$5{,}615 \times 10^{-3}$	1	$4{,}186 \times 10^{-3}$	4,186
1 quilowatt =	3413	737,6	1,341	238,9	1	1000
1 WATT =	3,413	0,7376	$1{,}341 \times 10^{-3}$	0,2389	0,001	1

Campo Magnético

	gauss	TESLAS	miligauss
1 gauss =	1	10^{-4}	1000
1 TESLA =	10^{4}	1	10^{7}
1 miligauss =	0,001	10^{-7}	1

1 tesla = 1 weber/metro²

Fluxo Magnético

	maxwell	WEBERS
1 maxwell =	1	10^{-8}
1 WEBER =	10^{8}	1

Fórmulas Matemáticas

Geometria

Círculo de raio r: circunferência $= 2\pi r$; área $= \pi r^2$.

Esfera de raio r: área $= 4\pi r^2$; volume $= \frac{4}{3}\pi r^3$.

Cilindro circular reto de raio r e altura h: área $= 2\pi r^2 + 2\pi rh$; volume $= \pi r^2 h$.

Triângulo de base a e altura h: área $= \frac{1}{2}ah$.

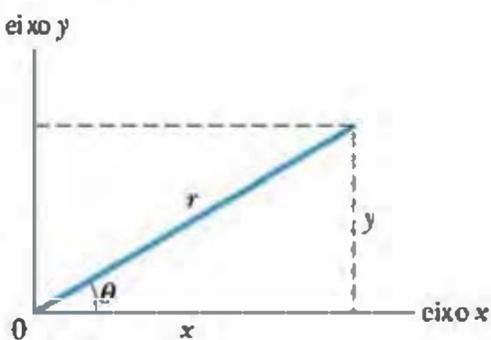
Fórmula de Báskara

Se $ax^2 + bx + c = 0$, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

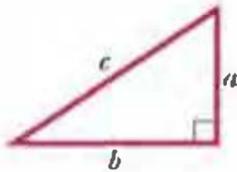
Funções Trigonométricas do Ângulo θ

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r}$ $\quad \cos\theta = \dfrac{x}{r}$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ $\quad \cot\theta = \dfrac{x}{y}$

$\sec\theta = \dfrac{r}{x}$ $\quad \csc\theta = \dfrac{r}{y}$

Teorema de Pitágoras

Neste triângulo retângulo,

$a^2 + b^2 = c^2$

Triângulos

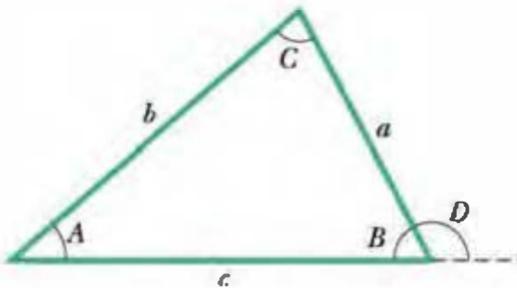
Ângulos: A, B, C

Lados opostos: a, b, c

$A + B + C = 180°$

$\dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{c}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

Ângulo externo $D = A + C$

Sinais e Símbolos Matemáticos

$=$ igual a

$\approx$ aproximadamente igual a

$\sim$ da ordem de grandeza de

$\neq$ diferente de

$\equiv$ idêntico a, definido como

$>$ maior que ($\gg$ muito maior que)

$<$ menor que ($\ll$ muito menor que)

$\geq$ maior ou igual a (não menor que)

$\leq$ menor ou igual a (não maior que)

$\pm$ mais ou menos

$\propto$ proporcional a

Σ somatório de

$x_{méd}$ valor médio de x

Identidades Trigonométricas

$\operatorname{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$

$\cos(90° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$

$\operatorname{sen}\theta/\cos\theta = \tan\theta$

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$

$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

$\operatorname{sen}\alpha \pm \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

Teorema Binomial

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots \qquad (x^2 < 1)$$

Expansão Exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Expansão Logarítmica

$$\ln(1 + x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots \qquad (|x| < 1)$$

Expansões Trigonométricas (θ em radianos)

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \cdots$$

Regra de Cramer

Um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, x e y,

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{e} \quad a_2x + b_2y = c_2,$$

tem como soluções

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Produtos de Vetores

Sejam $\hat{i}, \hat{j}$ e $\hat{k}$ vetores unitários nas direções x, y e z, respectivamente. Nesse caso,

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1, \quad \hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0,$$

$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0,$$

$$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$$

Qualquer vetor $\vec{a}$ de componentes a_x, a_y e a_z ao longo dos eixos x, y e z pode ser escrito na forma

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}.$$

Sejam $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores arbitrários de módulos a, b e c. Nesse caso,

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b}) + (\vec{a}\times\vec{c})$$

$$(s\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(s\vec{b}) = s(\vec{a}\times\vec{b}) \quad (\text{onde } s \text{ é um escalar}).$$

Seja θ o menor dos dois ângulos entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Nesse caso,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = ab\cos\theta$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$= (a_yb_z - b_ya_z)\hat{i} + (a_zb_x - b_za_x)\hat{j} + (a_xb_y - b_xa_y)\hat{k}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\operatorname{sen}\theta$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

Derivadas e Integrais

Nas fórmulas a seguir, as letras u e v representam duas funções de x e a e m são constantes. A cada integral indefinida deve-se somar uma constante de integração arbitrária. O *Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press Inc.) contém uma tabela mais completa.

1. $\dfrac{dx}{dx} = 1$
2. $\dfrac{d}{dx}(au) = a\dfrac{du}{dx}$
3. $\dfrac{d}{dx}(u + v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$
4. $\dfrac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$
5. $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$
6. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$
7. $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$
8. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$
9. $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$
10. $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
11. $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
12. $\dfrac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x$
13. $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\cot x \csc x$
14. $\dfrac{d}{dx}e^u = e^u\dfrac{du}{dx}$
15. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u\dfrac{du}{dx}$
16. $\dfrac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{sen} u\dfrac{du}{dx}$

1. $\displaystyle\int dx = x$
2. $\displaystyle\int au\,dx = a\int u\,dx$
3. $\displaystyle\int (u + v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$
4. $\displaystyle\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\quad (m \neq -1)$
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln |x|$
6. $\displaystyle\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx$
7. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x$
8. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$
9. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$
10. $\displaystyle\int \tan x\,dx = \ln |\sec x|$
11. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$
12. $\displaystyle\int e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$
13. $\displaystyle\int xe^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a^2}(ax + 1)\,e^{-ax}$
14. $\displaystyle\int x^2e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a^3}(a^2x^2 + 2ax + 2)e^{-ax}$
15. $\displaystyle\int_0^\infty x^ne^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$
16. $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$
18. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$
19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{1/2}}$
20. $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n+1}\,e^{-ax^2}\,dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}\quad (a > 0)$
21. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x + d} = x - d\ln(x + d)$

APÊNDICE F

Propriedades dos Elementos

Todas as propriedades físicas são dadas para uma pressão de 1 atm a menos que seja indicado em contrário.

Elemento	Símbolo	Número Atômico, *Z*	Massa Molar, g/mol	Massa Específica, g/cm³ a 20°C	Ponto de Fusão, °C	Ponto de Ebulição, °C	Calor Específico, J/(g · °C) a 25°C
Actínio	Ac	89	(227)	10,06	1323	(3473)	0,092
Alumínio	Al	13	26,9815	2,699	660	2450	0,900
Amerício	Am	95	(243)	13,67	1541	—	—
Antimônio	Sb	51	121,75	6,691	630,5	1380	0,205
Argônio	Ar	18	39,948	$1{,}6626 \times 10^{-3}$	−189,4	−185,8	0,523
Arsênio	As	33	74,9216	5,78	817 (28 atm)	613	0,331
Astatínio	At	85	(210)	—	(302)	—	—
Bário	Ba	56	137,34	3,594	729	1640	0,205
Berílio	Be	4	9,0122	1,848	1287	2770	1,83
Berquélio	Bk	97	(247)	14,79	—	—	—
Bismuto	Bi	83	208,980	9,747	271,37	1560	0,122
Bóhrio	Bh	107	262,12	—	—	—	—
Boro	B	5	10,811	2,34	2030	—	1,11
Bromo	Br	35	79,909	3,12 (líquido)	−7,2	58	0,293
Cádmio	Cd	48	112,40	8,65	321,03	765	0,226
Cálcio	Ca	20	40,08	1,55	838	1440	0,624
Califórnio	Cf	98	(251)	—	—	—	—
Carbono	C	6	12,01115	2,26	3727	4830	0,691
Cério	Ce	58	140,12	6,768	804	3470	0,188
Césio	Cs	55	132,905	1,873	28,40	690	0,243
Chumbo	Pb	82	207,19	1,35	327,45	1725	0,129
Cloro	Cl	17	35,453	$3{,}214 \times 10^{-3}$ (0°C)	−101	−34,7	0,486
Cobalto	Co	27	58,9332	8,85	1495	2900	0,423
Cobre	Cu	29	63,54	8,96	1083,40	2595	0,385
Copernício	Cp	112	(285)	—	—	—	—
Criptônio	Kr	36	83,80	$3{,}488 \times 10^{-3}$	−157,37	−152	0,247
Cromo	Cr	24	51,996	7,19	1857	2665	0,448
Cúrio	Cm	96	(247)	13,3	—	—	—
Darmstádtio	Ds	110	(271)	—	—	—	—
Disprósio	Dy	66	162,50	8,55	1409	2330	0,172
Dúbnio	Db	105	262,114	—	—	—	—
Einstêinio	Es	99	(254)	—	—	—	—
Enxofre	S	16	32,064	2,07	119,0	444,6	0,707
Érbio	Er	68	167,26	9,15	1522	2630	0,167
Escândio	Sc	21	44,956	2,99	1539	2730	0,569
Estanho	Sn	50	118,69	7,2984	231,868	2270	0,226
Estrôncio	Sr	38	87,62	2,54	768	1380	0,737
Európio	Eu	63	151,96	5,243	817	1490	0,163
Férmio	Fm	100	(237)	—	—	—	—

Elemento	Símbolo	Número Atômico, Z	Massa Molar, g/mol	Massa Específica, g/cm^3 a 20°C	Ponto de Fusão, °C	Ponto de Ebulição, °C	Calor Especifico, J/(g · °C) a 25°C
Ferro	Fe	26	55,847	7,874	1536,5	3000	0,447
Flúor	F	9	18,9984	$1{,}696 \times 10^{-3}$ (0°C)	2219,6	188,2	0,753
Fósforo	P	15	30,9738	1,83	44,25	280	0,741
Frâncio	Fe	87	(223)	—	(27)	—	—
Gadolínio	Gd	64	157,25	7,90	1312	2730	0,234
Gálio	Ga	31	69,72	5,907	29,75	2237	0,377
Germânio	Ge	32	72,59	5,323	937,25	2830	0,322
Háfnio	Hf	72	178,49	13,31	2227	5400	0,144
Hássio	Hs	108	(265)	—	—	—	—
Hélio	He	2	4,0026	$0{,}1664 \times 10^{-3}$	−269,7	−268,9	5,23
Hidrogênio	H	1	1,00797	$0{,}8375 \times 10^{-3}$	−259,19	−252,7	14,4
Hólmio	Ho	67	164,930	8,79	1470	2330	0,165
Índio	In	49	114,82	7,31	156,634	2000	0,233
Iodo	I	53	126,9044	4,93	113,7	183	0,218
Irídio	Ir	77	192,2	22,5	2447	(5300)	0,130
Itérbio	Yb	70	173,04	6,965	824	0,155	0,155
Ítrio	Y	39	88,905	4,469	1526	3030	0,297
Lantânio	La	57	138,91	6,189	920	3470	0,195
Laurêncio	Lr	103	(2597)	—	—	—	—
Lítio	Li	3	6,939	0,534	180,55	1300	3,58
Lutécio	Lu	7	174,97	9,849	1663	1930	0.155
Magnésio	Mg	12	24,312	1,738	650	1107	1,03
Manganês	Mn	25	54,9380	7,44	1244	2150	0,481
Meitnério	Mt	109	(266)	—	—	—	—
Mendelévio	Md	101	(256)	—	—	—	—
Mercúrio	Hg	80	200,59	13,55	−38,87	357	0,138
Molibdênio	Mo	42	95,94	10,22	2617	5560	0,251
Neodímio	Nd	60	144,24	7,007	1016	3180	0,188
Neônio	Ne	10	20,183	$0{,}8387 \times 10^{-3}$	−248,597	−246,0	1,03
Netúnio	Np	93	(237)	20,25	637	—	1,26
Nióbio	NB	41	92,906	8,57	2468	4927	0,264
Níquel	NI	28	58,71	8,902	1453	2730	0,444
Nitrogênio	Os	76	190,2	22,59	3027	5500	0,130
Nobélio	●	8	15,9994	$1{,}3318 \times 10^{-3}$	−218,80	−183,0	0,913
Ósmio	Pd	46	106,4	12,02	1552	3980	0,243
Ouro	Au	79	196,967	19,32	1064,43	2970	0,131
Oxigênio	O	8	15,9994	$1{,}3318 \times 10^{-3}$	−218,80	−183,0	0,913
Paládio	Pd	46	106,4	12,02	1552	3980	0,243
Platina	Pt	78	195,09	21,45	1769	4530	0,134
Plutônio	Pu	94	(244)	19,8	640	3235	0,130
Polônio	Po	84	(210)	9,32	254	—	—
Potássio	K	19	39,102	0,862	63,20	760	0,758
Praseodímio	Pr	59	140,907	6,773	931	3020	0,197
Prata	Ag	47	107,870	10,49	960,8	2210	0,234
Promécio	Pm	61	(145)	7,22	(1027)	—	—
Protactínio	Pa	91	(231)	15,37 (estimada)	(1230)	—	—
Rádio	Ra	88	(226)	5,0	700	—	—

Elemento	Símbolo	Número Atômico, Z	Massa Molar, g/mol	Massa Específica, g/cm^3 a 20°C	Ponto de Fusão, °C	Ponto de Ebulição, °C	Calor Específico, J/(g · °C) a 25°C
Radônio	Rn	86	(222)	$9{,}96 \times 10^{-3}$ (0°C)	(−71)	−61,8	0,092
Rênio	Re	75	186,2	21,02	3180	5900	0,134
Ródio	Rh	45	102,905	12,41	1963	4500	0.243
Roentgênio	Rg	111	(280)	—	—	—	—
Rubídio	Rb	37	85,47	1,532	39,49	688	0.364
Rutênio	Ru	44	101.107	12.37	2250	4900	0.239
Rutherfórdio	Rf	104	261,11	—	—	—	—
Samário	Sm	62	150,35	7,52	1072	1630	0,197
Seabórgio	Sg	106	263,118	—	—	—	—
Selênio	Se	34	78,96	4,79	221	685	0,318
Silício	Si	14	28,086	2,33	1412	2680	0,712
Sódio	Na	11	2,9898	0,9712	97,85	892	1,23
Tálio	Tl	81	204,37	11,85	304	1457	0,130
Tântalo	Ta	73	180,948	180,948	16,6	5425	0,138
Tecnécio	Tc	43	(99)	(99)	11,46	—	0,209
Telúrio	Te	52	127,60	127,60	6,24	990	0,201
Térbio	Tb	65	158,924	158,924	8,229	2530	0,180
Titânio	Ti	22	47,90	4,54	1670	320	0,523
Tório	Th	90	(232)	11,72	1755	(3850)	0,117
Túlio	Tm	69	168,934	9,32	1545	1720	0.159
Tungstênio	W	74	183,85	19,3	3380	5930	0,134
Ununbéxio	Uuh	116	(293)	—	—	—	—
Ununóctio	Uuo	118	(294)	—	—	—	—
Ununpêntio	Uup	115	(288)	—	—	—	—
Ununquádio	Unq	114	(289)	—	—	—	—
Ununséptio	Uus	117	—	—	—	—	—
Ununtrio	Uut	113	(284)	—	—	—	—
Urânio	U	92	(238)	18,95	1132	3818	0,117
Vanádio	V	23	50,942	6,11	1902	3400	0.490
Xenônio	Xe	54	131,30	$5{,}495 \times 10^{-3}$	−111,79	−108	0,159
Zinco	Zn	30	65,37	7,133	419,58	906	0,389
Zircônio	Zr	40	91,22	6,506	1852	3580	0.276

Os números entre parênteses na coluna das massas molares são os números de massa dos isótopos de vida mais longa dos elementos radioativos. Os pontos de fusão e pontos de ebulição entre parênteses são pouco confiáveis.

Os dados para os gases são válidos apenas quando estes se encontram no estado molecular mais comum, como H_2, He, O_2, Ne etc. Os calores específicos dos gases são os valores à pressão constante.

Fonte: Adaptada de J. Emsley, *The Elements*, 3ª edição, 1998. Clarendon Press, Oxford. Veja também www.webelements.com para valores atualizados e, possivelmente, novos elementos.

Tabela Periódica dos Elementos

Metais
Metaloides
Não metais

Metais de transição

PERÍODOS HORIZONTAIS	Metais alcalinos IA	IIA	IIIB	IVB	VB	VIB	VIIB	VIIIB			IB	IIB	IIIA	IVA	VA	VIA	VIIA	Gases nobres 0
1	1 H																	2 He
2	3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
3	11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
4	19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
5	37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
6	55 Cs	56 Ba	57-71 *	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
7	87 Fr	88 Ra	89-103 †	104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt	110 Ds	111 Rg	112 Cp	113	114	115	116	117	118

Metais de transição

Série dos lantanídeos *	57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu
Série dos actinídeos †	89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr

Os elementos 113 a 118 foram descobertos mas, até 2010, ainda não haviam recebido nomes. Veja www.webelements.com para informações atualizadas e possíveis novos elementos.

RESPOSTAS

dos Testes e das Perguntas e Problemas Ímpares

CAPÍTULO 1

PR 1. (a) $4{,}00 \times 10^4$ km; (b) $5{,}10 \times 10^8$ km^2; (c) $1{,}08 \times 10^{12}$ km^3 **3.** (a) 10^9 μm; (b) 10^{-4}; (c) $9{,}1 \times 10^5$ μm **5.** (a) 160 varas; (b) 40 cadeias **7.** $1{,}1 \times 10^3$ acres-pés **9.** $1{,}9 \times 10^{22}$ cm^3 **11.** (a) 1,43; (b) 0,864 **13.** (a) 495 s; (b) 141 s; (c) 198 s; (d) -245 s **15.** $1{,}21 \times 10^{12}$ μs **17.** C, D, A, B, E; o critério importante é a constância dos resultados e não o seu valor **19.** $5{,}2 \times 10^6$ m **21.** $9{,}0 \times 10^{49}$ átomos **23.** (a) 1×10^3 kg; (b) 158 kg/s **25.** $1{,}9 \times 10^5$ kg **27.** (a) $1{,}18 \times 10^{-29}$ m^3; (b) 0,282 nm **29.** 1750 kg **31.** 1,43 kg/min **33.** (a) 293 alqueires americanos; (b) $3{,}81 \times 10^3$ alqueires americanos **35.** (a) 22 pecks; (b) 5,5 imperial bushels; (c) 200 L **37.** 8×10^2 km **39.** (a) 18,8 galões; (b) 22,5 galões **41.** 0,3 cord **43.** 3,8 mg/s **45.** (a) sim; (b) 8,6 segundos do universo **47.** 0,12 UA/min **49.** (a) 3,88; (b) 7,65; (c) 156 ken^3; (d) $1{,}19 \times 10^3$ m^3 **51.** (a) 3,9 m, 4,8 m; (b) $3{,}9 \times 10^3$ mm, $4{,}8 \times 10^3$ mm; (c) 2,2 m^3, 4,2 m^3 **53.** (a) $4{,}9 \times 10^{-6}$ parsecs; (b) $1{,}6 \times 10^{-5}$ anos-luz

CAPÍTULO 2

T 1. b e c **2.** (verifique a derivada dx/dt) (a) 1 e 4; (b) 2 e 3 **3.** (a) positivo; (b) negativo; (c) negativo; (d) positivo **4.** 1 e 4 ($a = d^2x/dt^2$ deve ser constante) **5.** (a) positivo (deslocamento para cima ao longo do eixo y); (b) negativo (deslocamento para baixo ao longo do eixo y); (c) $a = -g = -9{,}8$ m/s^2

P 1. (a) negativo; (b) positivo; (c) sim; (d) positiva; (e) constante **3.** (a) todas iguais; (b) 4, 1 e 2 empatados e depois 3 **5.** (a) positivo; (b) negativo; (c) 3 e 5; (d) 2 e 6 empatados, depois 3 e 5 empatados, e depois 1 e 4 empatados (zero) **7.** (a) D; (b) E **9.** (a) 3,2,1; (b) 1,2,3; (c) todas iguais; (d) 1,2,3

PR 1. 13 m **3.** (a) +40 km/h; (b) 40 km/h **5.** (a) 0; (b) -2 m; (c) 0; (d) 12 m; (e) +12 m; (f) +7 m/s **7.** 60 km **9.** 1,4 m **11.** 128 km/h **13.** (a) 73 km/h; (b) 68 km/h; (c) 70 km/h; (d) 0 **15.** (a) -6 m/s; (b) no sentido negativo; (c) 6 m/s; (d) diminuindo; (e) 2 s; (f) não **17.** (a) 28,5 cm/s; (b) 18,0 cm/s; (c) 40,5 cm/s; (d) 28,1 cm/s; (e) 30,3 cm/s **19.** -20 m/s^2 **21.** (a) 1,10 m/s; (b) 6,11 mm/s; (c) 1,47 m/s; (d) 6,11 mm/s^2 **23.** $1{,}62 \times 10^{15}$ m/s^2 **25.** (a) 30 s; (b) 300 m **27.** (a) +1,6 m/s; (b) +18 m/s **29.** (a) 10,6 m; (b) 41,5 s **31.** (a) $3{,}1 \times 10^6$ s; (b) $4{,}6 \times 10^{13}$ m **33.** (a) 3,56 m/s^2, (b) 8,43 m/s **35.** 0,90 m/s^2 **37.** (a) 4,0 m/s^2; (b) positivo **39.** (a) $-2{,}5$ m/s^2; (b) 1; (d) 0; (e) 2 **41.** 40 m **43.** 0,994 m/s^2 **45.** (a) 31 m/s; (b) 6,4 s **47.** (a) 29,4 m; (b) 2,45 s **49.** (a) 5,4 s; (b) 41 m/s **51.** (a) 20 m; (b) 59 m **53.** 4,0 m/s **55.** (a) 857 m/s^2; (b) para cima **57.** (a) $1{,}26 \times 10^3$ m/s^2; (b) para cima **59.** (a) 89 cm; (b) 22 cm **61.** 20,4 m **63.** 2,34 m **65.** (a) 2,25 m/s; (b) 3,90 m/s **67.** 0,56 m/s **69.** 100 m **71.** (a) 2,00 s; (b) 12 cm; (c) $-9{,}00$ cm/s^2; (d) para a direita; (e) para a esquerda; (f) 3,46 s **73.** (a) 82 m; (b) 19 m/s **75.** (a) 0,74 s; (b) 6,2 m/s^2 **77.** (a) 3,1 m/s^2; (b) 45 m; (c) 13 s **79.** 17 m/s **81.** +47 m/s **83.** (a) 1,23 cm; (b) por 4; (c) por 9; (d) por 16; (e) por 25 **85.** 25 km/h **87.** 1,2 h **89.** $4H$ **91.** (a) 3,2 s; (b) 1,3 s **93.** (a) 8,85 m/s; (b) 1,00 m **95.** (a) 2,0 m/s^2; (b) 12 m/s; (c) 45 m **97.** (a) 48,5 m/s; (b) 4,95 s; (c) 34,3 m/s; (d) 3,50 s **99.** 22,0 m/s **101.** (a) $v = (v_0^2 + 2gh)^{0,5}$; (b) $t = [(v_0^2 + 2gh)^{0,5} - v_0]/g$; (c) igual a (a); (d) $t = [(v_0^2 + 2gh)^{0,5} + v_0]/g$, maior que (b).

CAPÍTULO 3

T 1. (a) 7 m ($\vec{a}$ e $\vec{b}$ no mesmo sentido); (b) 1 m ($\vec{a}$ e $\vec{b}$ em sentidos opostos) **2.** c, d, f (a origem da segunda componente deve coincidir com a extremidade da primeira; $\vec{a}$ deve ligar a origem da primeira componente com a extremidade da segunda) **3.** (a) +, +; (b) +, $-$; (c) +, + (o vetor deve ser traçado da origem de $\vec{d}_1$ à extremidade de $\vec{d}_2$) **4.** (a) 90°; (b) 0° (os vetores são paralelos); (c) 180° (os vetores são antiparalelos) **5.** (a) 0° ou 180°; (b) 90°

P 1. sim, se os vetores forem paralelos **3.** A sequência $\vec{d}_2, \vec{d}_1$ ou a sequência $\vec{d}_2, \vec{d}_2, \vec{d}_3$. **5.** todos, menos (e) **7.** (a) sim; (b) sim; (c) não **9.** (a) $+x$ para (1), $+z$ para (2), $+z$ para (3); (b) $-x$ para (1), $-z$ para (2), $-z$ para (3)

PR 1. (a) $-2{,}5$ m; (b) $-6{,}9$ m **3.** (a) 47,2 m; (b) 122° **5.** (a) 156 km; (b) 39,8° a oeste do norte **7.** (a) 6,42 m; (b) não; (c) sim; (d) sim; (e) uma possível resposta: $(4{,}30\ \text{m})\hat{\imath} + (3{,}70\ \text{m})\hat{\jmath} + (3{,}00\ \text{m})\hat{k}$; (f) 7,96 m **9.** (a) $(3{,}0\ \text{m})\hat{\imath} - (2{,}0\ \text{m})\hat{\jmath} + (5{,}0\ \text{m})\hat{k}$; (b) $(5{,}0\ \text{m})\hat{\imath} - (4{,}0\ \text{m})\hat{\jmath} - (3{,}0\ \text{m})\hat{k}$; (c) $(-5{,}0\ \text{m})\hat{\imath} + (4{,}0\ \text{m})\hat{\jmath} + (3{,}0\ \text{m})\hat{k}$ **11.** (a) $(-9{,}0\ \text{m})\hat{\imath} + (10\ \text{m})\hat{\jmath}$; (b) 13 m; (c) 132° **13.** 4.74 km **15.** (a) 1,59 m; (b) 12,1 m; (c) 12,2 m; (d) 82,5° **17.** (a) 38 m; (b) $-37{,}5$°; (c) 130 m; (d) 1,2°; (e) 62 m; (f) 130° **19.** (a) 5,39 m; (b) 21,8° à esquerda **21.** (a) $-70{,}0$ cm; (b) 80,0 cm; (c) 141 cm; (d) -172° **23.** 3,2 **25.** 2,6 km **27.** (a) $8\hat{\imath} + 16\hat{\jmath}$; (b) $2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$ **29.** (a) 7,5 cm; (b) 90°; (c) 8,6 cm; (d) 48° **31.** (a) $a\hat{\imath} + a\hat{\jmath} + a\hat{k}$; (b) $-a\hat{\imath} + a\hat{\jmath} + a\hat{k}$; (c) $a\hat{\imath} - a\hat{\jmath} + a\hat{k}$; (d) $-a\hat{\imath} - a\hat{\jmath} + a\hat{k}$; (e) 54,7°; (f) $3^{0,5}a$ **33.** (a) 12; (b) $+z$; (c) 12; (d) $-z$; (e) 12; (f) $+z$ **35.** (a) $-18{,}8$ unidades; (b) 26,9 unidades, na direção $+z$ **37.** (a) -21; (b) -9; (c) $5\hat{\imath} - 11\hat{\jmath} - 9\hat{k}$ **39.** 70,5° **41.** 22° **43.** (a) 3,00 m; (b) 0; (c) 3,46 m; (d) 2,00 m; (e) $-5{,}00$ m; (f) 8,66 m; (g) $-6{,}67$; (h) 4,33 **45.** (a) $-83{,}4$; (b) $(1{,}14 \times 10^3)\hat{k}$; (c) $1{,}14 \times 10^3$, θ não é definido, $\phi = 0$°; (d) 90,0°; (e) $-5{,}14\hat{\imath} + 6{,}13\hat{\jmath} + 3{,}00\hat{k}$; (f) 8,54, $\theta = 130$°, $\phi = 69{,}4$° **47.** (a) 140°; (b) 90,0°; (c) 99,1° **49.** (a) 103 km; (b) 60,9° ao norte do oeste **51.** (a) 27,8 m; (b) 13,4 m **53.** (a) 30; (b) 52 **55.** (a) $-2{,}83$ m; (b) $-2{,}83$ m; (c) 5,00 m; (d) 0; (e) 3,00 m; (f) 5,20 m; (g) 5,17 m; (h) 2,37 m; (i) 5,69 m; (j) 25° ao norte do leste; (k) 5,69 m; (l) 25° ao sul do oeste **57.** 4,1 **59.** (a) $(9{,}19\ \text{m})\hat{\imath}' + (7{,}71\ \text{m})\hat{\jmath}'$; (b) $(14{,}0\ \text{m})\hat{\imath}' + (3{,}41\ \text{m})\hat{\jmath}'$ **61.** (a) $11\hat{\imath} + 5{,}0\hat{\jmath} - 7{,}0\hat{k}$; (b) 120°; (c) $-4{,}9$; (d) 7,3 **63.** (a) 3,0 m^2; (b) 52 m^3; (c) $(11\ \text{m}^2)\hat{\imath} + (9{,}0\ \text{m}^2)\hat{\jmath} + (3{,}0\ \text{m}^2)\hat{k}$ **65.** (a) $(-40\hat{\imath} - 20\hat{\jmath} + 25\hat{k})$ m; (b) 45 m

CAPÍTULO 4

T 1. (trace $\vec{v}$ tangente à trajetória, com a origem na trajetória) (a) primeiro; (b) terceiro **2.** (calcule a derivada segunda em relação ao tempo) (1) e (3) a_x e a_y são constantes e, portanto, $\vec{a}$ é constante; (2) e (4) a_y é constante, mas a_x não é constante e, portanto, $\vec{a}$ não é constante **3.** sim **4.** (a) v_x é constante; (b) v_y é inicialmente positiva, diminui até zero e depois se torna cada vez mais negativa; (c) $a_x = 0$ sempre; (d) $a_y = -g$ sempre **5.** (a) $-(4\ \text{m/s})\hat{\imath}$; (b) $-(8\ \text{m/s}^2)\hat{\jmath}$

P 1. a e b empatados, b **3.** diminui **5.** a, b, c **7.** (a) 0; (b) 350 km/h; (c) 350 km/h; (d) igual (a componente vertical do movimento seria a mesma) **9.** (a) todas iguais; (b) todas iguais; (c) 3,2,1; (d) 3,2,1 **11.** 2, 1 e 4 empatados, 3 **13.** (a) sim; (b) não; (c) sim

PR 1. (a) 6,2 m **3.** $(-2{,}0\ \text{m})\hat{\imath} + (6{,}0\ \text{m})\hat{\jmath} - (10\ \text{m})\hat{k}$ **5.** (a) 7,59 km/h; (b) 22,5° a leste do norte **7.** $(-0{,}70\ \text{m/s})\hat{\imath} + (1{,}4\ \text{m/s})\hat{\jmath} - (0{,}40\ \text{m/s})\hat{k}$ **9.** (a) 0,83 cm/s; (b) 0°; (c) 0,11 m/s; (d) -63° **11.** (a) $(6{,}00\ \text{m})\hat{\imath} - (106\ \text{m})\hat{\jmath}$; (b) $(19{,}0\ \text{m/s})\hat{\imath} - (224\ \text{m/s})\hat{\jmath}$; (c) $(24{,}0\ \text{m/s}^2)\hat{\imath} - (336\ \text{m/s}^2)\hat{\jmath}$; (d) $-85{,}2$° **13.** (a) $(8\ \text{m/s}^2)t\hat{\jmath} + (1\ \text{m/s})\hat{k}$; (b) $(8\ \text{m/s}^2)\hat{\jmath}$ **15.** (a) $(-1{,}50\ \text{m/s})\hat{\jmath}$; (b) $(4{,}50\ \text{m})\hat{\imath} - (2{,}25\ \text{m})\hat{\jmath}$ **17.** $(32\ \text{m/s})\hat{\imath}$ **19.**

(a) $(72,0\ m)\hat{i} + (90,7\ m)\hat{j}$; (b) 49,5° **21.** (a) 18 cm; (b) 1,9 m **23.** (a) 3,03 s; (b) 758 m; (c) 29,7 m/s **25.** 43,1 m/s (155 km/h) **27.** (a) 10,0 s; (b) 897 m **29.** 78,5° **31.** 3,35 m **33.** (a) 202 m/s; (b) 806 m; (c) 161 m/s; (d) −171 m/s **35.** 4,84 cm **37.** (a) 1,60 m; (b) 6,86 m; (c) 2,86 m **39.** (a) 32,3 m; (b) 21,9 m/s; (c) 40,4°; (d) abaixo **41.** 55,5° **43.** (a) 11 m; (b) 23 m; (c) 17 m/s; (d) 63° **45.** (a) na rampa; (b) 5,82 m; (c) 31,0° **47.** (a) sim; (b) 2,56 m **49.** (a) 31°; (b) 63° **51.** (a) 2,3°; (b) 1,4 m; (c) 18° **53.** (a) 75,0 m; (b) 31,9 m/s; (c) 66,9°; (d) 25,5 m **53.** no terceiro **57.** (a) 7,32 m; (b) para oeste; (c) para o norte **59.** (a) 12 s; (b) 4,1 m/s²; (c) para baixo; (d) 4,1 m/s²; (e) para cima **61.** (a) $1,3 \times 10^5$ m/s; (b) $7,9 \times 10^5$ m/s²; (c) aumentam **63.** 2,92 m **65.** $(3,00\ m/s^2)\hat{i} + (6,00\ m/s^2)\hat{j}$ **67.** 160 m/s2 **69.** (a) 13 m/s²; (b) para leste; (c) 13 m/s²; (d) para leste **71.** 1,67 **73.** (a) $(80\ km/h)\hat{i} - (60\ km/h)\hat{j}$; (b) 0°; (c) não **75.** 32 m/s **77.** 60° **79.** (a) 38 nós; (b) 1,5° a leste do norte; (c) 4,2 h; (d) 1,5° a oeste do sul **81.** (a) $(-32\ km/h)\hat{i} - (46\ km/h)\hat{j}$; (b) $[(2,5\ km) - (32\ km/h)t]\hat{i} + [(4,0\ km) - (46\ km/h)t]\hat{j}$; (c) 0,084 h; (d) 2×10^2 m **83.** (a) −30°; (b) 69 min; (c) 80 min; (d) 80 min; (e) 0°; (f) 60 min **85.** (a) 2,7 km; (b) 76° no sentido horário **87.** (a) 44 m; (b) 13 m; (c) 8,9 m **89.** (a) 45 m; (b) 22 m/s **91.** (a) $2,6 \times 10^2$ m/s; (b) 45 s; (c) aumentaria **93.** (a) 63 km; (b) 18° ao sul do leste; (c) 0,70 km/h; (d) 18° ao sul do leste; (e) 1,6 km/h; (f) 1,2 km/h; (g) 33° ao norte do leste **95.** (a) 1,5; (b) (36 m, 54 m) **97.** (a) 62 ms; (b) $4,8 \times 10^2$ m/s **99.** 2,64 m **101.** (a) 2,5 m; (b) 0,82 m; (c) 9,8 m/s²; (d) 9,8 m/s² **103.** (a) 6,79 km/h; (b) 6,96° **105.** (a) 16 m/s; (b) 23°; (c) acima; (d) 27 m/s; (e) 57°; (f) abaixo **107.** (a) 4,2 m, 45°; (b) 5,5 m, 68°; (c) 6,0 m, 90°; (d) 4,2 m, 135°; (e) 0,85 m/s, 135°; (f) 0,94 m/s, 90°; (g) 0,94 m/s, 180°; (h) 0,30 m/s², 180°; (i) 0,30 m/s², 270° **109.** (a) $5,4 \times 10^{-13}$ m; (b) diminui **111.** (a) 0,034 m/s²; (b) 84 min **113.** (a) 8,43 m; (b) −129° **115.** (a) 2,00 ns; (b) 2,00 mm; (c) $1,00 \times 10^7$ m/s; (d) $2,00 \times 10^6$ m/s **117.** (a) 24 m/s; (b) 65° **119.** 93° em relação à direção do movimento do carro

CAPÍTULO 5

T **1.** *c*, *d* e *e* **2.** (a) e (b) 2 N, para a esquerda (a aceleração é zero nas duas situações) **3.** (a) igual; (b) maior (a aceleração é para cima e, portanto, a força resultante é para cima) **4.** (a) igual; (b) maior; (c) menor **5.** (a) aumentam; (b) sim; (c) permanecem os mesmos; (d) sim

P **1.** (a) 2,3,4; (b) 1,3,4; (c) 1, $+y$; 2, $+x$; 3, quarto quadrante; 4, terceiro quadrante **3.** aumentar **5.** (a) 2 e 4; (b) 2 e 4 **7.** (a) M; (b) M; (c) M; (d) $2M$; (e) $3M$ **9.** (a) 20 kg; (b) 18 kg; (c) 10 kg; (d) todas iguais; (e) 3,2,1 **11.** (a) aumenta a partir do valor inicial mg; (b) diminui de mg até zero (e depois o bloco perde o contato com o piso)

PR **1.** 2,9 m/s² **3.** (a) 1,88 N; (b) 0,684 N; (c) $(1,88\ N)\hat{i} + (0,684\ N)\hat{j}$ **5.** (a) $(0,86\ m/s^2)\hat{i} - (0,16\ m/s^2)\hat{j}$; (b) 0,88 m/s²; (c) −11° **7.** (a) $(-32,0\ N)\hat{i} - (20,8\ N)\hat{j}$; (b) 38,2 N; (c) −147° **9.** (a) 8,37 N; (b) −133°; (c) −125° **11.** 9,0 m/s² **13.** (a) 4,0 kg; (b) 1,0 kg; (c) 4,0 kg; (d) 1,0 kg **15.** (a) 108 N; (b) 108 N; (c) 108 N **17.** (a) 42 N; (b) 72 N; (c) 4,9 m/s² **19.** $1,2 \times 10^5$ N **21.** (a) 11,7 N; (b) −59,0° **23.** (a) $(285\ N)\hat{i} - (705\ N)\hat{j}$; (b) $(285\ N)\hat{i} - (115\ N)\hat{j}$; (c) 307 N; (d) −22,0°; (e) 3,67 m/s²; (f) −22,0° **25.** (a) 0,022 m/s²; (b) $8,3 \times 10^4$ km; (c) $1,9 \times 10^3$ m/s **27.** 1,5 mm **29.** (a) 494 N; (b) para cima; (c) 494 N; (d) para baixo **31.** (a) 1,18 m; (b) 0,674 s; (c) 3,50 m/s **33.** $1,8 \times 10^4$ N **35.** (a) 46,7°; (b) 28,0° **37.** (a) 0,62 m/s²; (b) 0,13 m/s²; (c) 2,6 m **39.** (a) $2,2 \times 10^{-3}$ N; (b) $3,7 \times 10^{-3}$ N **41.** (a) 1,4 m/s²; (b) 4,1 m/s **43.** (a) 1,23 N; (b) 2,46 N; (c) 3,69 N; (d) 4,92 N; (e) 6,15 N; (f) 0,250 N **45.** (a) 31,3 kN; (b) 24,3 kN **47.** $6,4 \times 10^3$ N **49.** (a) 2,18 m/s²; (b) 116 N; (c) 21,0 m/s² **51.** (a) 3,6 m/s²; (b) 17 N **53.** (a) 0,970 m/s²; (b) 11,6 N; (c) 34,9 N **55.** (a) 1,1 N **57.** (a) 0,735 m/s²; (b) para baixo; (c) 20,8 N **59.** (a) 4,9 m/s²; (b) 2,0 m/s²; (c) para cima; (d) 120 N **61.** $2Ma/(a+g)$ **63.** (a) 8,0 m/s; (b) $+x$ **65.** (a) 0,653 m/s³; (b) 0,896 m/s³; (c) 6,50 s **67.** 81,7 N **69.** 2,4 N **71.** 16 N **73.** (a) 2,6 N; (b) 17° **75.** (a) 0; (b) 0,83 m/s²; (c) 0 **77.** (a) 0,74 m/s²; (b) 7,3 m/s² **79.** (a) 11 N; (b) 2,2 kg; (c) 0; (d) 2,2 kg **81.** 195 N **83.** (a) 4,6 m/s²; (b) 2,6 m/s² **85.** (a) a corda arrebenta; (b) 1,6 m/s² **87.** (a) 65 N; (b) 49 N **89.** (a) $4,6 \times 10^3$ N; (b) $5,8 \times 10^3$ N **91.** (a) $1,8 \times 10^2$ N; (b) $6,4 \times 10^2$ N **93.** (a) 44 N; (b) 78 N; (c) 54 N; (d) 152 N **95.** (a) 4 kg; (b) 6,5 m/s²; (c) 13 N

CAPÍTULO 6

T **1.** (a) zero (porque não há uma tentativa de deslizamento); (b) 5 N; (c) não; (d) sim; (e) 8 N **2.** ($\vec{a}$ aponta para o centro da trajetória circular) (a) $\vec{a}$ aponta para baixo, $\vec{F}_N$ aponta para cima; (b) $\vec{a}$ e $\vec{F}_N$ apontam para cima

P **1.** (a) diminui; (b) diminui; (c) aumenta; (d) aumenta; (e) aumenta **3.** (a) permanece o mesmo; (b) aumenta; (c) aumenta; (d) não **5.** (a) para cima; (b) horizontal, na sua direção; (c) não varia; (d) aumenta; (e) aumenta **7.** A princípio, $\vec{f}_s$ aponta para cima ao longo da rampa e o módulo aumenta a partir de mg sen θ até atingir $f_{s,máx}$. Daí em diante, a força se torna a força de atrito cinético, que aponta para cima ao longo da rampa e cujo módulo é f_k (um valor constante menor que $f_{s,máx}$). **9.** Primeiro 4, depois 3 e depois 1,2 e 5 empatadas **11.** (a) todas iguais; (b) todas iguais; (c) 2,3,1

PR **1.** 36 m **3.** (a) $2,0 \times 10^2$ N; (b) $1,2 \times 10^2$ N **5.** (a) 6,0 N; (b) 3,6 N; (c) 3,1 N **7.** (a) $1,9 \times 10^2$ N; (b) 0,56 m/s² **9.** (a) 11 N; (b) 0,14 m/s² **11.** (a) $3,0 \times 10^2$ N; (b) 1,3 m/s² **13.** (a) $1,3 \times 10^2$ N; (b) não; (c) $1,1 \times 10^2$ N; (d) 46 N; (e) 17 N **15.** 2° **17.** (a) $(17\ N)\hat{i}$; (b) $(20\ N)\hat{i}$; (c) $(15\ N)\hat{i}$ **19.** (a) não; (b) $(-12\ N)\hat{i} + (5,0N)\hat{j}$ **21.** (a) 19°; (b) 3,3 kN **23.** 0,37 **25.** $1,0 \times 10^2$ N **27.** (a) 0; (b) $(-3,9\ m/s^2)\hat{i}$; $(-1,0\ m/s^2)\hat{i}$ **29.** (a) 66 N; (b) 2,3 m/s² **31.** (a) 3,5 m/s²; (b) 0,21 N **33.** 9,9 s **35.** $4,9 \times 10^2$ N **37.** (a) $3,2 \times 10^2$ km/h; (b) $6,5 \times 10^2$ km/h; (c) não **39.** 2,3 **41.** 0,60 **43.** 21 m **45.** (a) mais leve; (b) 778 N; (c) 223 N; (d) 1,11 kN **47.** (a) 10 s; (b) $4,9 \times 10^2$ N; (c) $1,1 \times 10^3$ N **49.** $1,37 \times 10^3$ N **51.** 2,2 km **53.** 12° **55.** $2,6 \times 10^3$ N **57.** 1,81 m/s **59.** (a) 8,74 N; (b) 37,9 N; (c) 6,45 m/s; (d) na direção da haste **61.** (a) 27 N; (b) 3,0 m/s² **63.** (b) 240 N; (c) 0,60 **65.** (a) 69 km/h; (b) 139 km/h; (c) sim **67.** $g(\text{sen}\,\theta - 2^{0,5}\mu_k \cos\theta)$ **69.** 3,4 m/s² **71.** (a) 35,3 N; (b) 39,7 N; (c) 320 N **73.** (a) 7,5 m/s²; (b) para baixo; (c) 9,5 m/s²; (d) para baixo **75.** (a) $3,0 \times 10^5$ N; (b) 1,2° **77.** 147 m/s **79.** (a) 13 N; (b) 1,6 m/s² **81.** (a) 275 N; (b) 877 N **83.** (a) 84,2 N; (b) 52,8 N; (c) 1,87 m/s² **85.** 3,4% **87.** (a) $3,21 \times 10^3$ N; (b) sim **89.** (a) 222 N; (b) 334 N; (c) 311 N; (d) 311 N; (e) c, d **91.** (a) $v_0^2/(4g\ \text{sen}\,\theta)$; (b) não **93.** (a) 0,34; (b) 0,24 **95.** (a) $\mu_k mg/(\text{sen}\,\theta - \mu_k \cos\theta)$; (b) $\theta_0 = \tan^{-1}\mu_s$ **97.** 0,18

CAPÍTULO 7

T **1.** (a) diminui; (b) permanece a mesma; (c) negativo, nulo **2.** (a) positivo; (b) negativo; (c) nulo **3.** nula

P **1.** são todas iguais **3.** (a) positivo; (b) negativo; (c) negativo **5.** *b* (trabalho positivo), *a* (trabalho nulo), *c* (trabalho negativo, *d* (trabalho mais negativo) **7.** são todos iguais **9.** (a) A; (b) B

PR **1.** (a) $2,9 \times 10^7$ m/s; (b) $2,1 \times 10^{-13}$ J **3.** (a) 5×10^{14} J; (b) 0,1 megaton de TNT; (c) 8 bombas **5.** (a) 2,4 m/s; (b) 4,8 m/s **7.** 0,96 J **9.** 20 J **11.** (a) 62,3°; (b) 118° **13.** (a) $1,7 \times 10^2$ N; (b) $3,4 \times 10^2$ m; (c) $-5,8 \times 10^4$ J; (d) $3,4 \times 10^2$ N; (e) $1,7 \times 10^2$ m; (f) $-5,8 \times 10^4$ J **15.** (a) 1,50 J; (b) aumenta **17.** (a) 12 kJ; (b) −11

kJ; (c) 1,1 kJ; (d) 5,4 m/s **19.** 25 J **21.** (a) $-3Mgd/4$; (b) Mgd; (c) $Mgd/4$; (d) $(gd/2)^{0,5}$ **23.** 4,41 J **25.** (a) 25,9 kJ; (b) 2,45 N **27.** (a) 7,2 J; (b) 7,2 J; (c) 0; (d) -25 J **29.** (a) 0,90 J; (b) 2,1 J; (c) 0 **31.** (a) 6,6 m/s; (b) 4,7 m **33.** (a) 0,12 m; (b) 0,36 J; (c) $-0,36$ J; (d) 0,060 m; (e) 0,090 J **35.** (a) 0; (b) 0 **37.** (a) 42 J; (b) 30 J; (c) 12 J; (d) 6,5 m/s, eixo $+x$; (e) 5,5 m/s, eixo $+x$; (f) 3,5 m/s, eixo $+x$ **39.** 4,00 N/m **41.** $5,3 \times 10^2$ J **43.** (a) 0,83 J; (b) 2,5 J; (c) 4,2 J; (d) 5,0 W **45.** $4,9 \times 10^2$ W **47.** (a) $1,0 \times 10^2$ J; (b) 8,4 W **49.** $7,4 \times 10^2$ W **51.** (a) 32,0 J; (b) 8,00 W; (c) 78,2° **53.** (a) 1,20 J; (b) 1,10 m/s **55.** (a) $1,8 \times 10^5$ ft · lb; (b) 0,55 hp **57.** (a) 797 N; (b) 0; (c) $-1,55$ kJ; (d) 0; (e) 1,55 kJ; (f) F varia durante o deslocamento **59.** (a) 1×10^5 megatons de TNT; (b) 1×10^7 bombas **61.** -6 J **63.** (a) 314 J; (b) -155 J; (c) 0; (d) 158 J **65.** (a) 98 N; (b) 4,0 cm; (c) 3,9 J; (d) $-3,9$ J **67.** (a) 23 mm; (b) 45 N **69.** 165 kW **71.** -37 J **73.** (a) 13 J; (b) 13 J **75.** 235 kW **77.** (a) 6 J; (b) 6,0 J **79.** (a) 0,6 J; (b) 0; (c) $-0,6$ J

CAPÍTULO 8

T **1.** não (em duas trajetórias de a a b, o trabalho é -60 J; na terceira, é 60 J) **2.** 3,1,2 (veja a Equação 8-6) **3.** (a) todas iguais; (b) todas iguais **4.** (a) CD, AB, BC (0) (com base nas inclinações); (b) o sentido positivo de x **5.** são todas iguais

P **1.** (a) 3,2,1; (b) 1,2,3 **3.** (a) 12 J; (b) -2 J **5.** (a) aumenta; (b) diminui; (c) diminui; (d) permanece constante em AB e BC e diminui em CD **7.** $+30$ J **9.** 2,1,3

PR **1.** 89 N/cm **3.** (a) 167 J; (b) -167 J; (c) 196 J; (d) 29 J; (e) 167 J; (f) -167 J; (g) 296 J; (h) 129 J **5.** (a) 4,31 mJ; (b) $-4,31$ mJ; (c) 4,31 mJ; (d) $-4,31$ mJ; (e) todos aumentariam **7.** (a) 13,1 J; (b) $-13,1$ J; (c) 13,1 J; (d) todos aumentam **9.** (a) 17,0 m/s; (b) 26,5 m/s; (c) 33,4 m/s; (d) 56,7 m; (e) continuariam as mesmas **11.** (a) 2,08 m/s; (b) 2,08 m/s; (c) aumentaria **13.** (a) 0,98 J; (b) $-0,98$ J; (c) 3,1 N/cm **15.** (a) $2,6 \times 10^2$ m; (b) permanece o mesmo; (c) diminui **17.** (a) 2,5 N; (b) 0,31 N; (c) 30 cm **19.** (a) 784 N/m; (b) 62,7 J; (c) 62,7 J; (d) 80,0 cm **21.** (a) 8,35 m/s; (b) 4,33 m/s; (c) 7,45 m/s; (d) diminuem **23.** (a) 4,85 m/s; (b) 2,42 m/s **25.** $-3,2 \times 10^2$ J **27.** (a) não; (b) $9,3 \times 10^2$ N **29.** (a) 35 cm; (b) 1,7 m/s **31.** (a) 39,2 J; (b) 39,2 J; (c) 4,00 m **33.** (a) 2,40 m/s; (b) 4,19 m/s **35.** (a) 39,6 cm; (b) 3,64 cm **37.** -18 mJ **39.** (a) 2,1 m/s; (b) 10 N; (c) $+x$; (d) 5,7 m; (e) 30 N; (f) $-x$ **41.** (a) $-3,7$ J; (c) 1,3 m; (d) 9,1 m; (e) 2,2 J; (f) 4,0 m; (g) $(4 - x)e^{-x/4}$; (h) 4,0 m **43.** (a) 5,6 J; (b) 3,5 J **45.** (a) 30,1 J; (b) 30,1 J; (c) 0,225 **47.** 0,53 J **49.** (a) $-2,9$ kJ; (b) $3,9 \times 10^2$ J; (c) $2,1 \times 10^2$ N **51.** (a) 1,5 MJ; (b) 0,51 MJ; (c) 1,0 MJ; (d) 63 m/s **53.** (a) 67 J; (b) 67 J; (c) 46 cm **55.** (a) $-0,90$ J; (b) 0,46 J; (c) 1,0 m/s **57.** 1,2 m **59.** (a) 19,4 m; (b) 19,0 m/s **61.** (a) $1,5 \times 10^{-2}$ N; (b) $(3,8 \times 10^2)g$ **63.** (a) 7,4 m/s; (b) 90 cm; (c) 2,8 m; (d) 15 m **65.** 20 cm **67.** (a) 7,0 J; (b) 22 J **69.** 3,7 J **71.** 4,33 m/s **73.** 25 J **75.** (a) 4,9 m/s; (b) 4,5 N; (c) 71°; (d) permanece a mesma **77.** (a) 4,8 N; (b) $+x$; (c) 1,5 m; (d) 13,5 m; (e) 3,5 m/s **79.** (a) 24 kJ; (b) $4,7 \times 10^2$ N **81.** (a) 5,00 J; (b) 9,00 J; (c) 11,0 J; (d) 3,00 J; (e) 12,0 J; (f) 2,00 J; (g) 13,0 J; (h) 1,00 J; (i) 13,0 J; (j) 1,00 J; (l) 11,0 J; (m) 10,8 m; (n) volta para $x = 0$ e para. **83.** (a) 6,0 kJ; (b) $6,0 \times 10^2$ W; (c) $3,0 \times 10^2$ W; (d) $9,0 \times 10^2$ W **85.** 880 MW **87.** (a) $v_0 = (2gL)^{0,5}$; (b) $5mg$; (c) $-mgL$; (d) $-2mgL$ **89.** (a) 109 J; (b) 60,3 J; (c) 68,2 J; (d) 41,0 J **91.** (a) 2,7 J; (b) 1,8 J; (c) 0,39 m **93.** (a) 10 m; (b) 49 N; (c) 4,1 m; (d) $1,2 \times 10^2$ N **95.** (a) 5,5 m/s; (b) 5,4 m; (c) permanecem as mesmas **97.** 80 mJ **99.** 24 W **101.** -12 J **103.** (a) 8,8 m/s; (b) 2,6 kJ; (c) 1,6 kW **105.** (a) $7,4 \times 10^2$ J; (b) $2,4 \times 10^2$ J **107.** 15 J **109.** (a) $2,35 \times 10^3$ J; (b) 352 J **111.** 738 m **113.** (a) $-3,8$ kJ; (b) 31 kN **115.** (a) 300 J; (b) 93,8 J; (c) 6,38 m **117.** (a) 5,6 J; (b) 12 J; (c) 13 J **119.** (a) 1,2 J; (b) 11 m/s; (c) não; (d) não **121.** (a) $2,1 \times 10^6$ kg; (b) $(100 + 1,5t)^{0,5}$ m/s; (c) $(1,5 \times 10^6)/(100 + 1,5t)^{0,5}$ N; (d) 6,7 km

CAPÍTULO 9

T **1.** (a) na origem; (b) no quarto quadrante; (c) no eixo y, abaixo da origem; (d) na origem; (e) no terceiro quadrante; (f) na origem **2.** (a)–(c) no centro de massa, ainda na origem (as forças são internas ao sistema e não podem deslocar o centro de massa) **3.** (Considere as inclinações e a Equação 9-23). (a) 1,3 e depois 2 e 4 empatadas (força nula); (b) 3 **4.** (a) mantém inalterado; (b) mantém inalterado (veja a Equação 9-32); (c) diminui (Equação 9-35) **5.** (a) nula; (b) positiva (inicial para baixo, final para cima); (c) $+y$ **6.** (Não há força externa; $\vec{P}$ é conservado.) (a) 0; (b) não; (c) $-x$ **7.** (a) 10 kg·m/s; (b) 14 kg·m/s; (c) 6 kg·m/s **8.** (a) 4 kg·m/s; (b) 8 kg·m/s; (c) 3 J **9.** (a) 2 kg·m/s (conservação da componente x do momento) (b) 3 kg·m/s (conservação da componente y do momento)

P **1.** (a) 2 N, para a direita; (b) 2 N, para a direita; (c) maior que 2 N, para a direita **3.** b, c, a **5.** (a) x sim, y não; (b) x sim, y não; (c) x não, y sim **7.** (a) c, a energia cinética não pode ser negativa; d, a energia cinética total não pode aumentar; (b) a; (c) b **9.** (a) um estava em repouso; (b) 2; (c) 5; (d) igual (como o choque de duas bolas de sinuca) **11.** (a) C; (b) B; (c) 3

PR **1.** (a) $-1,50$ m; (b) $-1,43$ m **3.** (a) $-6,5$ cm; (b) 8,3 cm; (c) 1,4 cm **5.** (a) $-0,45$ cm; (b) $-2,0$ cm **7.** (a) 0; (b) $3,13 \times 10^{-11}$ m **9.** (a) 28 cm; (b) 2,3 m/s **11.** $(-4,0 \text{ m})\hat{i} + (4,0 \text{ m})\hat{j}$ **13.** 53 m **15.** (a) $(2,35\hat{i} - 1,57\hat{j})$ m/s²; (b) $(2,35\hat{i} - 1,57\hat{j})t$ m/s, com t em segundos; (d) retilínea, fazendo um ângulo de 34° para baixo **17.** 4,2 m **19.** (a) $7,5 \times 10^4$ J; (b) $3,8 \times 10^4$ kg·m/s; (c) 39° ao sul do leste **21.** (a) 5,0 kg·m/s; (b) 10 kgm/s **23.** $1,0 \times 10^3$ a $1,2 \times 10^3$ kg·m/s **25.** (a) 42 N·s; (b) 2,1 kN **27.** (a) 67 m/s; (b) $-x$; (c) 1,2 kN; (d) $-x$ **29.** 5 N **31.** (a) $2,39 \times 10^3$ N·s; (b) $4,78 \times 10^5$ N; (c) $1,76 \times 10^3$ N·s; (d) $3,52 \times 10^5$ N **33.** (a) 5,86 kg·m/s; (b) 59,8°; (c) 2,93 kN; (d) 59,8° **35.** $9,9 \times 10^2$ N **37.** (a) 9,0 kg·m/s; (b) 3,0 kN; (c) 4,5 kN; (d) 20 m/s **39.** 3,0 mm/s **41.** (a) $-(0,15 \text{ m/s})\hat{i}$; (b) 0,18 m **43.** 55 cm **45.** (a) $(1,00\hat{i} - 0,167\hat{j})$ km/s; (b) 3,23 MJ **47.** (a) 14 m/s; (b) 45° **49.** $3,1 \times 10^2$ m/s **51.** (a) 721 m/s; (b) 937 m/s **53.** (a) 33%; (b) 23%; (c) diminui **55.** (a) $+2,0$ m/s; (b) $-1,3$ J; (c) $+40$ J; (d) o sistema recebeu energia de alguma fonte, como, por exemplo, uma pequena explosão **57.** (a) 4,4 m/s; (b) 0,80 **59.** 25 cm **61.** (a) 99 g; (b) 1,9 m/s; (c) 0,93 m/s **63.** (a) 3,00 m/s; (b) 6,00 m/s **65.** (a) 1,2 kg; (b) 2,5 m/s **67.** -28 cm **69.** (a) 0,21 kg; (b) 7,2 m **71.** (a) $4,15 \times 10^5$ m/s; (b) $4,84 \times 10^5$ m/s **73.** 120° **75.** (a) 433 m/s; (b) 250 m/s **77.** (a) 46 N; (b) nenhuma **79.** (a) $1,57 \times 10^6$ N; (b) $1,35 \times 10^5$ kg; (c) 2,08 km/s **81.** (a) 7290 m/s; (b) 8200 m/s; (c) $1,271 \times 10^{10}$ J; (d) $1,275 \times 10^{10}$ J **83.** (a) 1,92 m; (b) 0,640 m **85.** (a) 1,78 m/s; (b) menor; (c) menor; (d) maior **87.** (a) 3,7 m/s; (b) 1,3 N·s; (c) $1,8 \times 10^2$ N **89.** (a) $(7,4 \times 10^3 \text{ N·s})\hat{i} - (7,4 \times 10^3 \text{ N·s})\hat{j}$; (b) $(-7,4 \times 10^3 \text{ N·s})\hat{i}$; (c) $2,3 \times 10^3$ N; (d) $2,1 \times 10^4$ N; (e) $-45°$ **91.** $+4,4$ m/s **93.** $1,18 \times 10^4$ kg **95.** (a) 1,9 m/s; (b) $-30°$; (c) elástica **97.** (a) 6,9 m/s; (b) 30°; (c) 6,9 m/s; (d) $-30°$; (e) 2,0 m/s; (f) $-180°$ **99.** (a) 25 mm; (b) 26 mm; (c) para baixo; (d) $1,6 \times 10^{-2}$ m/s² **101.** 29 J **103.** 2,2 kg **105.** 5,0 kg **107.** (a) 50 kg/s; (b) $1,6 \times 10^2$ kg/s **109.** (a) $4,6 \times 10^3$ km; (b) 73% **111.** 190 m/s **113.** 28,8 N **115.** (a) 0,745 mm; (b) 153°; (c) 1,67 mJ **117.** (a) $(2,67 \text{ m/s})\hat{i} + (-3,00 \text{ m/s})\hat{j}$; (b) 4,01 m/s; (c) 48,4° **119.** (a) $-0,50$ m; (b) $-1,8$ cm; (c) 0,50 m **121.** 0,22%

CAPÍTULO 10

T **1.** b e c **2.** (a) e (d) ($\alpha = d^2\theta/dt^2$ deve ser constante) **3.** (a) sim; (b) não; (c) sim; (d) sim **4.** são todos iguais **5.** 1, 2, 4, 3 (veja a

Equação 10-36) **6.** (veja a Equação 10-40) 1 e 3 empatados, 4, e depois 2 e 5 empatados (zero) **7.** (a) para baixo na figura ($\tau_{res} = 0$); (b) menor (considere os braços de alavanca)

P **1.** (a) *c*, *a* e depois *b* e *d* empatados; (b) *b*, depois *a* e *c* empatados, depois *d* **3.** todas iguais **5.** (a) diminuir; (b) horário; (c) anti-horário **7.** maior **9.** *c*,*a*,*b*

PR **1.** 14 rev **3.** (a) 4,0 rad/s; (b) 11,9 rad/s **5.** 11 rad/s **7.** (a) 4,0 m/s; (b) não **9.** (a) 3,00 s; (b) 18,9 rad **11.** (a) 30 s; (b) $1{,}8 \times 10^3$ rad **13.** (a) $3{,}4 \times 10^2$ s; (b) $-4{,}5 \times 10^{-3}$ rad/s^2; (c) 98 s **15.** 8,0 s **17.** (a) 44 rad; (b) 5,5 s; (c) 32 s; (d) $-2{,}1$ s; (e) 40 s **19.** (a) $2{,}50 \times 10^3$ rad/s; (b) 20,2 m/s^2; (c) 0 **21.** $6{,}9 \times 10^{-13}$ rad/s **23.** (a) 20,9 rad/s; (b) 12,5 m/s; (c) 800 rev/min^2; (d) 600 rev **25.** (a) $7{,}3 \times 10^{-5}$ rad/s; (b) $3{,}5 \times 10^2$ m/s; (c) $7{,}3 \times 10^{-5}$ rad/s; (d) $4{,}6 \times 10^2$ m/s **27.** (a) 73 cm/s^2; (b) 0,075; (c) 0,11 **29.** (a) $3{,}8 \times 10^3$ rad/s; (b) $1{,}9 \times 10^2$ m/s **31.** (a) 40 s; (b) 2,0 rad/s^2 **33.** 12,3 kg·m^2 **35.** (a) 1,1 kJ; (b) 9,7 kJ **37.** 0,097 kg·m^2 **39.** (a) 49 MJ; (b) $1{,}0 \times 10^2$ min **41.** (a) 0,023 kg·m^2; (b) 1,1 mJ **43.** $4{,}7 \times 10^{-4}$ kg·m^2 **45.** $-3{,}85$ N·m **47.** 4,6 N·m **49.** (a) 28,2 rad/s^2; (b) 338 N·m **51.** (a) 6,00 cm/s^2; (b) 4,87 N; (c) 4,54 N; (d) 1,20 rad/s^2; (e) 0,0138 kg·m^2 **53.** 0,140 N **55.** $2{,}51 \times 10^{-4}$ kg·m^2 **57.** (a) $4{,}2 \times 10^2$ rad/s^2; (b) $5{,}0 \times 10^2$ rad/s **59.** 396 N·m **61.** (a) $-19{,}8$ kJ; (b) 1,32 kW **63.** 5,42 m/s **65.** (a) 5,32 m/s^2; (b) 8,43 m/s^2; (c) 41,8° **67.** 9,82 rad/s **69.** $6{,}16 \times 10^{-5}$ kg·m^2 **71.** (a) 31,4 rad/s^2; (b) 0,754 m/s^2; (c) 56,1 N; (d) 55,1 N **73.** (a) $4{,}81 \times 10^5$ N; (b) $1{,}12 \times 10^4$ N·m; (c) $1{,}25 \times 10^6$ J **75.** (a) 2,3 rad/s^2; (b) 1,4 rad/s^2 **77.** (a) -67 rev/min^2; (b) 8,3 rev **81.** 3,1 rad/s **83.** (a) 1,57 m/s^2; (b) 4,55 N; (c) 4,94 N **85.** 30 rev **87.** 0,054 kg·m^2 **89.** $1{,}4 \times 10^2$ N·m **91.** (a) 10 J; (b) 0,27 m **93.** 4,6 rad/s^2 **95.** 2,6 J **97.** (a) $5{,}92 \times 10^4$ m/s^2; (b) $4{,}39 \times 10^4$ s^{-2} **99.** (a) 0,791 kg·m^2; (b) $1{,}79 \times 10^{-2}$ N·m **101.** (a) $1{,}5 \times 10^2$ cm/s; (b) 15 rad/s; (c) 15 rad/s; (d) 75 cm/s; (e) 3,0 rad/s **103.** (a) 7,0 kg·m^2; (b) 7,2 m/s; (c) 71°

CAPÍTULO 11

T **1.** (a) igual; (b) menor **2.** menor (considere a transferência de energia, de energia cinética de rotação para energia potencial gravitacional) **3.** (desenhe os vetores e use a regra da mão direita) (a) $\pm z$; (b) $\pm y$; (c) $-x$ **4.** (veja a Equação 11-21) (a) 1 e 2 empatados, 2 e 4 empatados e depois 5 (zero); (b) 2 e 3 **5.** (veja as Equações 11-23 e 11-16) (a) 3, 1; depois 2 e 4 empatados (zero); (b) 3 **6.** (a) todos iguais (mesmo τ, mesmo t e, portanto, mesmo ΔL); (b) esfera, disco, anel (ordem inversa de I) **7.** (a) diminui; (b) permanece o mesmo ($\tau_{res} = 0$ e, portanto, L é conservado); (c) aumenta

P **1.** *a*, depois *b* e *c* empatados, depois *e*, depois *d* (zero) **3.** (a) fica girando no mesmo lugar; (b) rola na sua direção; (c) rola para longe de você **5.** (a) 1, 2, 3 (zero); (b) 1 e 2 empatados, depois 3; (c) 1 e 3 empatados, depois 2 **7.** (a) permanece o mesmo; (b) aumenta; (c) diminui; (d) permanece o mesmo, diminui, aumenta **9.** *D*, *B* e depois *A* e *C* empatados

PR **1.** (a) 0; (b) (22 m/s)$\hat{i}$; (c) (-22 m/s)$\hat{i}$; (d) 0; (e) $1{,}5 \times 10^3$ m/s^2; (f) $1{,}5 \times 10^3$ m/s^2; (g) (22 m/s)$\hat{i}$; (h) (44 m/s)$\hat{i}$; (i) 0; (j) 0; (k) $1{,}5 \times 10^3$ m/s^2; (l) $1{,}5 \times 10^3$ m/s^2 **3.** $-3{,}15$ J **5.** 0,020 **7.** (a) 63 rad/s; (b) 4,0 m **9.** 4,8 m **11.** (a) ($-4{,}0$N)$\hat{i}$; (b) 0,60 kg·m^2 **13.** 0,50 **15.** (a) $-(0{,}11$ m$)\omega$; (b) $-2{,}1$ m/s^2; (c) -47 rad/s^2; (d) 1,2 s; (e) 8,6 m; (f) 6,1 m/s **17.** (a) 13 cm/s^2; (b) 4,4 s; (c) 55 cm/s; (d) 18 mJ; (e) 1,4 J; (f) 27 rev/s **19.** ($-2{,}0$ N·m)$\hat{i}$ **21.** (a) (6,0 N·m)$\hat{j}$ + (8,0 N·m)$\hat{k}$; (b) (-22 N·m)$\hat{i}$ **23.** (a) ($-1{,}5$ N·m)$\hat{i}$ $-$(4,0 N·m)$\hat{j}$ $-$ (1,0 N·m)$\hat{k}$; (b) ($-1{,}5$ N·m)$\hat{i}$ $-$ (4,0 N·m)$\hat{j}$ $-$(1,0 N·m)$\hat{k}$ **25.** (a) (50 N·m)$\hat{k}$; (b) 90° **27.** (a) 0; (b) (8,0 N·m)$\hat{i}$ + (8,0 N·m)$\hat{k}$ **29.** (a) 9,8 kg·m^2/s; (b) $+z$ **31.** (a) 0; (b) $-22{,}6$ kg·m^2/s; (c) $-7{,}84$ N·m; (d) $-7{,}84$ N·m **33.** (a) ($-1{,}7 \times 10^2$ kg·m^2/s)$\hat{k}$; (b) (+56 N·m)$\hat{k}$; (c) (+56 kg·m^2/s^2)$\hat{k}$ **35.** (a) $48t\hat{k}$ N·m; (b) aumentando **37.** (a) $4{,}6 \times 10^{-3}$ kg·m^2; (b) $1{,}1 \times 10^{-3}$ kg·m^2/s; (c) $3{,}9 \times 10^{-3}$ kg·m^2/s **39.** (a) 1,47 N·m; (b) 20,4 rad; (c) $-29{,}9$ J; (d) 19,9 W **41.** (a) 1,6 kg·m^2; (b) 4,0 kg·m^2/s **43.** (a) 1,5 m; (b) 0,93 rad/s; (c) 98 J; (d) 8,4 rad/s; (e) $8{,}8 \times 10^2$ J; (f) da energia interna das patinadoras **45.** (a) 3,6 rev/s; (b) 3,0; (c) a força que o homem exerce sobre os tijolos converte energia interna do homem em energia cinética **47.** 0,17 rad/s **49.** (a) 750 rev/min; (b) 450 rev/min; (c) horário **51.** (a) 267 rev/min; (b) 0,667 **53.** $1{,}3 \times 10^3$ m/s **55.** 3,4 rad/s **57.** (a) 18 rad/s; (b) 0,92 **59.** 11,0 m/s **61.** 1,5 rad/s **63.** 0,070 rad/s **65.** (a) 0,148 rad/s; (b) 0,0123; (c) 181° **67.** (a) 0,180 m; (b) horário **69.** 0,041 rad/s **71.** (a) 1,6 m/s^2; (b) 16 rad/s^2; (c) (4,0 N)$\hat{i}$ **73.** (a) 0; (b) 0; (c) $-30t^3\hat{k}$ kg·m^2/s; (d) $-90t^2\hat{k}$ N·m; (e) $30t^3\hat{k}$ kg·m^2/s; (f) $90t^2\hat{k}$ N·m **75.** (a) 149 kg·m^2; (b) 158 kg·m^2/s; (c) 0,744 rad/s **77.** (a) $6{,}65 \times 10^{-5}$ kg·m^2/s; (b) não; (c) 0; (d) sim **79.** (a) 0,333; (b) 0,111 **81.** (a) 58,8 J; (b) 39,2 J **83.** (a) 61,7 J; (b) 3,43 m; (c) não **85.** (a) $mvR/(I + MR^2)$; (b) $mvR^2/(I + MR^2)$ **87.** a velocidade de rotação ficaria menor; o dia ficaria cerca de 0,8 s mais longo **89.** (a) 12,7 rad/s; (b) horário **91.** (a) 0,81 mJ; (b) 0,29; (c) $1{,}3 \times 10^{-2}$ N **93.** (a) $mR^2/2$; (b) um cilindro circular

ÍNDICE

A

- Aceleração, 19
  - angular, 320
    - constante, 256
      - pedra de amolar com, 256
      - rotor com, 257
  - bidimensional de um coelho, 66
  - centrípeta, 73
  - constante, 22, 25
    - equações de movimento com, 24
    - para baixo, 69
  - de um foguete, 233
  - em queda livre, 26
  - instantânea, 19, 65
  - linear constante, 255
  - média, 19, 65
  - nula, 69
  - positiva, 21
  - vertical, 100
- Acelerômetro, 20
- Aderência, 123
- Alcance horizontal, 70
- Aluno que gira, 302
- Alvo
  - em movimento, 229
  - estacionário, 227
  - pesado, 228
- Ampère, 319
- Ângulo(s)
  - de um vetor, medida dos, 45
  - entre dois vetores usando produto escalar, 51
  - plano, 320
  - sólido, 320
- Antiderivada, 25
- Ar
  - efeito do, 71
  - velocidades terminais no, 127
- Área, 320
- Atrito, 101, 121
  - propriedades do, 124
- Avogadro, constante de, 321

B

- Balança
  - de braços iguais, 100
  - de mola, 100
- Barra de metro padrão, 3
- Báskara, fórmula de, 327
- Bohr
  - magnéton de, 321
  - raio de, 321
- Bola que desce uma rampa, 291
- Boltzmann, constante de, 321

C

- Calor específico, 320
- Campo magnético, intensidade de, 320
- Candeia, 319
- Capacitância, 320
- Carga elementar, 321
- *Cataglyphis fortis*, 47
- Centro de massa, 207
  - de três partículas, 212
    - movimento do, 215
  - de uma placa vazada, 210
  - velocidade do, 225
- Cinemática, 13
- Coeficiente(s)
  - de arrasto, 126
  - de atrito
    - cinético, 124
    - estático, 124
- Colisão(ões)
  - de uma bola com um taco, 217
  - elástica, 224
    - em dois pêndulos, 230
    - em uma dimensão, 227
  - em duas dimensões, 230
  - em série, 219
  - entre um carro de corrida e um muro de proteção, 220
  - inelástica(s)
    - em uma dimensão, 224
    - representação esquemática de uma, 224
  - perfeitamente inelásticas unidimensionais, 225
  - simples, 217
  - traseiras, 28
- Componente(s)
  - escalares, 46
  - radial, 267
  - soma de vetores a partir das, 46
  - tangencial, 259, 267
  - vetoriais, 46
- Comprimento(s), 3, 319
  - aproximados, 4
- Condutividade térmica, 320
- Configuração de referência, 177
- Conservação do momento
  - angular
    - barata sobre um disco, 305
    - rotação de uma roda e de um banco, 304
  - linear, lei de, 221
- Constante
  - de Avogadro, 321
  - de Boltzmann, 321
  - de força, 154
  - de Planck, 321
  - de Rydberg, 321
  - de Stefan-Boltzmann, 321
  - elástica, 154
  - elétrica, 321
  - fundamentais da física, 321
  - gravitacional, 321
  - magnética, 321
  - universal dos gases, 321
- Conversão(ões)
  - em cadeia, 3
  - fatores de, 3, 323-326
- Corpo(s)
  - livre, diagrama de, 96
  - maciços, 209
  - rígido, 249
    - reta de referência do, 251
- Corrente elétrica, 319
- Cramer, regra de, 328
- Curva(s)
  - compensada, carro em, 132
  - de energia potencial, interpretação de uma, 182
  - não compensada, carro em uma, 131
  - pilotos de caça fazendo, 74

D

- Dados astronômicos, 322
- Decomposição do vetor, 42
- Densidade de fluxo magnético, 320
- Derivadas, 329
- Desaceleração, 20
- Deslizamento, 123
- Deslocamento, 13, 14, 61, 62, 63
  - angular, 250, 255
- Direção radial, 73
- Distância perpendicular, 258

E

- "Efeito chicote", 28
- Eixo(s)
  - de rotação, 249
  - fixo, 249
  - paralelos, teorema dos, 263
- Elementos
  - propriedades dos, 330-332
  - tabela periódica dos, 333
- Empuxo, 232
  - de um foguete, 233
- Energia
  - cinética, 146
    - de rotação, 261
      - teste explosivo, 266
    - de um praticante de *bungee jump*, 172
    - em um choque de locomotivas, 146
  - conservação de, 189
    - lei de, 145
  - mecânica
    - conservação da, 179
      - em um toboágua, 181
  - o que é?, 145
  - potencial, 172
    - cálculo da, 176
    - curva de uma, interpretação, 182
    - elástica, 173, 177
    - gráfico de uma, interpretação, 185
    - gravitacional, 172, 177
      - de uma preguiça, escolha o nível de referência para a, 178
  - térmica, variação da, 188
  - total, 189
  - transferência, 145
    - internas de, 190
- Equação(ões)
  - da trajetória, 70
  - de movimento para acelerações linear e angular constantes, 256
- Equilíbrio, 96
  - estável, 184
  - instável, 184
  - neutro, 184
  - ponto de, 184
- Escalares, 40
- Estado relaxado, 154
- Expansão(ões)
  - exponencial, 327
  - logarítmica, 327
  - trigonométricas, 328
- Explosão
  - bidimensional e momento, 223
  - unidimensional e velocidade relativa, 222

F

- Fatores de conversão, 3, 323-326
- Física
  - constantes fundamentais da, 321
  - o que é?
    - centro de massa e momento linear, 207
    - energia
      - cinética e trabalho, 145
      - potencial e conservação da energia, 172
    - força e movimento, 91, 121
    - medição, 1
    - movimento
      - em duas e três dimensões, 61
      - retilíneo, 13
    - rolamento, torque e momento angular, 286
    - rotação, 249
    - vetores, 40

- Fluxo magnético, 320
- Força(s), 92
  - alinhadas, 97
  - centrípeta, 129
  - com um ângulo variável, 107
  - conservativas, 173, 174
  - constante, 148
    - independência da trajetória para o trabalho de, 174
  - de arrasto, 126
  - de atrito, 121
    - cinético, 122, 123
    - estático, 123
  - de tração, 101
  - dissipativas, 173, 174
  - do rolamento, 289
  - elástica, 154
  - em um elevador, 107
  - externa, 96, 190
  - gravitacional, 99
    - trabalho realizado pela, 151
  - inclinada, 125
  - interna, 96
  - movimento e, 91-120, 121-144
  - não alinhadas, 98
  - normal, 100
  - princípio de superposição para, 92
  - restauradora, 154
  - resultante, 92
  - total, 92
  - variável, 148, 154
    - unidimensional, 157
- Formiga do deserto, 47
- Fórmula(s)
  - de Báskara, 327
  - matemáticas, 327-329
- Fotografia estroboscópica de uma bola de tênis quicando, 67
- Frequência, 320
- Função(ões)
  - trigonométricas, 45
    - do ângulo θ, 327

G

- Giroscópio, precessão de um, 306
- Gráfico(s)
  - de energia potencial, interpretação de um, 185
  - integração de, em análise de movimento, 27
  - para um tatu
    - em movimento, 15
    - em repouso, 15
- *Grand jeté*, 214
- Grandeza(s)
  - angulares são vetores?, 254
  - de escalares, 40
  - escalar, 50
  - fundamentais, 1
  - medindo, 1
  - ordem de, estimativa de, 4
  - vetorial, 14, 40
- Graus, 45

H

- Henry, 320
- Hooke, lei de, 154

I

- Identidades trigonométricas, 327
- Impulso, 217, 218
  - bidimensional, 220
- Inclinação, 15
- Indutância, 320
- Inércia, momento de, 249
- Integral(is), 329
  - definida, 25
- Intensidade
  - de campo magnético, 320
  - luminosa, 319
  - radiante, 320
- Ioiô, 292

J

- Joule, 145, 320

L

- Lance livre, 61
- Lei(s)
  - da conservação do momento
  - da física, vetores e, 49
  - de conservação
    - angular, 302
    - de um momento
      - angular, 302
      - linear, 221
  - de Hooke, 154
  - de Newton
    - aplicando as, 103
    - primeira, 91
    - segunda, 95
      - para rotações, 268
    - terceira, 102
- Lesões de pescoço causadas pelo "efeito chicote", 28
- Linha de ação, 268
- Liquefação, 7
- *Loop* vertical, 130

M

- Magnéton
  - de Bohr, 321
  - nuclear, 321
- Massa(s), 6, 94, 319
  - aproximada, 7
  - atômica, unidade, 7
  - centro de, 207
  - de elétron, 321
  - de múon, 321
  - de próton, 321
  - do átomo
    - de deutério, 321
    - de hélio, 321
    - de hidrogênio, 321
  - específica, 7, 320
  - iguais, 228
- Mecânica newtoniana, 91
- Medição, 1-12
- Metro, 319
- Módulo, 14
- Mol, 319
- Momento
  - angular, 294
    - conservação do, 302
    - de um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo, 300
    - de um sistema de duas partículas, 296, 299
    - definição, 296
  - conservação do, 226
  - de inércia, 261
    - alguns, 263
    - cálculo do, 262
    - de uma barra homogênea, 265
  - energia cinética em colisões e, 224
  - linear, 216
    - conservação de, 221
    - de um sistema de partículas, 217
  - magnético
    - do elétron, 321
    - do próton, 321
- Movimento(s)
  - angular, 249
  - balístico, 67
    - análise do, 69
    - de um projétil, 68
  - circular uniforme, 73, 129
  - de translação e rotação, correspondências entre, 272, 301
  - de um coelho, 62
  - de uma montanha-russa, 260
  - do centro de massa de três partículas, 215
  - em duas e três dimensões, 61-90
  - estado do, 146
  - força e, 91-119, 121-144
  - horizontal, 68, 69
  - integração de gráficos em análise de, 27
  - linear, 249
  - relativo
    - bidimensional: aviões, 77
    - em duas dimensões, 77
    - em uma dimensão, 75
    - unidimensional, 76
  - retilíneo, 13-39
  - roda de bicicleta em, fotografia, 287
  - unidimensional, 13
  - vertical, 68, 70
- Multiplicação de vetor(es), 49
  - por um
    - escalar, 49
    - vetor, 50
- Múon, massa do, 321

N

- Newton
  - primeira lei de, 91, 92
  - segunda lei de, 95
  - terceira lei de, 102

O

- Origem, 13

P

- Padrão(ões), 1
  - fundamentais, 1
  - secundários, 3
- Par de forças da terceira lei de Newton, 102
- Partícula, 13
- Pascal, 320
- Pedra de amolar com aceleração angular constante, 256
- Pêndulo balístico, 226
- Período de revolução, 73
- Peso, 99
  - aparente, 100
- Pilotos de caça fazendo curvas, 74
- Pitágoras, teorema de, 327
- Planck, constante de, 321
- Planetas, algumas propriedades dos, 322
- Plano de simetria, 209
- Ponto(s)
  - de equilíbrio, 184
  - de referência, 177
  - de retorno, 182, 184
  - de simetria, 209
  - zero, 13
- Posição(ões), 13
  - angular, 250
    - zero, 250
  - de ovo, 127
  - variação de, 40
  - vetor, 61
- Potência
  - instantânea, 161, 191
  - média, 160, 191
- Precessão
  - de um giroscópio, 306
  - velocidade de, 307
- Prefixos das unidades do SI, 2
- Primeira lei de Newton, 91, 92
- Princípio(s)
  - da conservação da energia mecânica, 179
  - para superposição para a força, 92
- Problemas, táticas para solução de, 45

Produto
- de vetores, 328
- escalar, 50
  - ângulo entre dois vetores usando, 51
- vetorial, 50, 51, 53
  - usando vetores unitários, 54

Projétil, 67
- lançado de um avião, 71
- pesado, 229

Q

Queda
- de um pinguim, torque, derivada do momento e a, 298
- livre
  - aceleração em, 26
  - trajetória em, 26

Quilograma, 319
- padrão, 6

R

Radianos, 45, 250
Raio de Bohr, 321
Rebocador espacial, 222
Referencial(is), 75
- inerciais, 93
- não inercial, 93

Regra(s)
- da mão direita, 52, 53, 254
- de Cramer, 328

Resistência elétrica, 320
Reta de referência, 250
- do corpo rígido, 251

Rolamento
- como uma
  - combinação de translação e rotação, 286
  - rotação pura, 288
- corpos em, 307
- energia cinética de, 288
- forças do, 289
- para baixo em uma rampa, 289

Rotação, 249-285
- com aceleração angular constante, 255
- eixo de, 249
- energia cinética de, 261
- segunda lei de Newton para, 268, 297
- sentido de, 254
- trabalho e energia cinética de, 270
- variáveis da, 249

Rotor com aceleração angular constante, 257
Rydberg, constante de, 321

S

Salto
- de trampolim, 303
- em distância, 303

Segunda lei de Newton, 95
- para rotações, 268, 297
- para um sistema de partículas, 212

Sentido
- de rotação, 254
- negativo, 14
- positivo, 14

SI. *Veja* Sistema Internacional de Unidades
Símbolos matemáticos, 327
Sinal(is)
- do trabalho, 148
- matemáticos, 327

Sistema(s)
- de coordenadas dextrogiro, 46
- de ensaio de rotação, 266
- de massa variável: um foguete, 231
  - aceleração, cálculo da, 231
  - velocidade, cálculo da, 232
- de partículas, 207
  - momento linear de um, 217
  - segunda lei de Newton para, 212
- Internacional de Unidades, 2, 15, 319-320
  - unidades
    - fundamentais, 319
    - secundárias, 320
    - suplementares, 320
- isolado, 189

Soma(s)
- de vetores usando
  - componentes, 47
  - vetores unitários, 47
- geométrica de vetores, 41, 54
- gráfica de vetores em um teste de campo, 42
- vetorial, 41

Street luge, 286
Superfície sem atrito, 92

T

Tabela periódica dos elementos, 333
Temperatura termodinâmica, 319
Tempo, 5, 319
- intervalos de, aproximados, 5

Teorema
- binomial, 327
- de Pitágoras, 327
- do trabalho e energia cinética com uma força variável, 158
- dos eixos paralelos, 263

Terceira lei de Newton, 102
- par de forças da, 102

Terra, distâncias da, algumas, 322
Tesla, 320
Teste do percurso fechado, 174
Tiro de canhão contra um navio pirata, 72
Torque, 249, 267
- definição de, 293
- exercido por uma força de uma partícula, 294
- revisão do, 292

Tour jeté, 303
Trabalho, 147
- de forças conservativas, independência da trajetória para, 174
- energia cinética e, 147
- expressão para o, 147
- integração bidimensional, 160
- por integração gráfica, cálculo, 159
- realizado por
  - duas forças constantes, 150
  - levantar e baixar um objeto, 152
  - pela força gravitacional, 151
  - um elevador acelerado, 153
  - uma força
    - aplicada, 156
    - constante, 151
    - elástica, 154
    - externa sobre um sistema, 186
    - variável genérica, 157
  - uma mola para mudar a energia cinética, 156
- sinal do, 148
- teorema do, 149
- total, 149
- trajetórias equivalentes para calcular o, 176
- unidade de, 149
- variação da energia potencial e, 173

Tração, 101
Trajetória
- da cabeça, 214
- de duas bolas de beisebol, 70
- de uma bola, levando em conta a resistência do ar, 70
- do centro de massa, 214
- em queda livre, 26
- equação da, 70
- equivalentes para calcular o trabalho, 176
- parabólica, 70, 207

Transferências internas de energia, 190
Triângulos, 327

U

Unidade(s), 1
- da segunda lei de Newton, 96
- de massa atômica, 7
- de trabalho, 149
- de três grandezas fundamentais do SI, 2
- derivadas, 2
- do SI, prefixos das, 2
- fundamentais do SI, 319
- mudança de, 3
- secundárias do SI, 320
- Sistema Internacional de, 2
- suplementares do SI, 320

V

Variáveis lineares e angulares
- movimento de uma montanha-russa, 260
- relações entre, 258

Velocidade
- angular
  - a partir da
    - aceleração angular, 254
    - posição angular, 252
  - escalar, 251
  - média, 251
- bidimensional de um coelho, 65
- da luz no vácuo, 321
- escalar
  - instantânea, 17, 18
  - média, 14, 16
- instantânea, 17, 63
- média, 14, 15, 63
  - de um carro velho, 16
- terminal(is), 126
  - de uma gota de chuva, 128
  - no ar, 127

Vetor(es), 40-60
- componentes de, 43
  - determinação dos, 44
- decomposição de, 43
- escalares e, 40
- leis da física e, 49
- multiplicação de, 49
  - por um
    - escalar, 49
    - vetor, 50
- posição, 61
  - bidimensional, 62
- resultante, 41
- soma geométrica de, 41
- unitários, 45
  - soma de vetores usando, 47

Volt, 320
Volume, 320

W

Watt, 161, 320